УДК 517.5

К. В. Соліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ БІЛІНІЙНИХ НАБЛИЖЕНЬ КЛАСІВ $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

We obtain exact-order estimates for the best bilinear approximations of the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ of periodic functions of two variables in the space L_q for some relations between the parameters p, q, θ.

Получены точные по порядку оценки наилучших билинейных приближений классов $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ периодических функций двух переменных в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p, q, θ.

Вступ. Роботу присвячено дослідженню білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p, q, θ. У вступі наведено означення класів та коротко історію їх дослідження в окресленому напрямку, у другій частині містяться допоміжні твердження. Основною є третя частина, де викладено отримані результати щодо оцінок найкращих білінійних наближень.

Нехай $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Підмножину функцій $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

позначимо через $L^{\circ}_p(\pi_d)$.

Означимо простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B \subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою $\Omega(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, — мажорантної функції для мішаного модуля неперервності l-го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$ та числових параметрів p і θ, $1 \le p, \theta \le \infty$.

Отже, для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1, d}}} \|\Delta^l_h f(\cdot)\|_p$$

— мішаний модуль неперервності порядку l функції f, де $\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_d} \ldots \Delta^l_{h_1} f(x) = \Delta^l_{h_d}(\ldots(\Delta^l_{h_1} f(x)))$, $h = (h_1, \ldots, h_d)$, — мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1, d}$. Тут

$$\Delta^l_{h_j} f(x) := \sum_{n=o}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Нехай далі $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}^d_+$;

3) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \ne j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le C \left(\prod_{j=1}^{d} m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, $C > 0$ — деяка стала.

Множину таких функцій Ω позначимо через $\Psi_{l,d}$. У випадку $d = 1$ пишемо Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f, \cdot) \in \Psi_{l,d}$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_{l,d}$ додатковим умовам, які опишемо у термінах двох понять, уведених С. Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0; \infty)$, майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \le C_1 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \le \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0; \infty)$, майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \ge C_2 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Нехай $d = 1$ і $\Omega \in \Psi^{(1,2)}_l$, тобто для $\Omega(t)$, $t \ge 0$, виконуються, принаймні, умови 1 і 2. Будемо писати:

i) $\Omega \in S^\alpha$ $(\alpha > 0)$, якщо функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

ii) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$. Умови належності функції Ω до множин S^α і S_l часто називають в літературі умовами Барі – Стєчкіна [2].

При $d > 1$ для функції $\Omega \in \Psi^{(1,2)}_{l,d}$ будемо вважати, що $\Omega \in S^{\alpha,d}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, d}$ (відповідно $\Omega \in S_{l,d}$, $l \in \mathbb{N}$), якщо $\Omega(t_1, \ldots, t_d)$ як функція змінної t_j, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких значеннях інших змінних t_i, $i \ne j$, належить множині S^{α_j} (відповідно S_l).

Зауважимо, що у випадку $d = 1$ будемо використовувати позначення $S^{\alpha,1} \equiv S^\alpha$ та $S_{l,1} \equiv S_l$ відповідно.

Покладемо також $\Phi^d_{\alpha,l} = \Psi_{l,d} \cap S^\alpha \cap S_l$.

Отже, нехай $1 \le p, \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$. Тоді

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B := \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon |f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} < \infty \right\},$$

де напівнорма $|f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t \ge 0} \dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Визначимо норму у просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ таким чином:

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} := \|f\|_p + |f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}, \quad 1 \le p, \theta \le \infty.$$

Наведене означення просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ (з незначною модифікацією) взято із роботи [3]. При $\theta = \infty$ простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ (з позначенням $S^{\Omega}_{p}H$) уведені і вивчались у роботі [4].

Шкала просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ є природним узагальненням шкали просторів Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$ (див. наприклад, [5]), і $S^{\Omega}_{p,\theta}B \equiv B^r_{p,\theta}$ при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j < l$, $j = \overline{1,d}$ (зазначимо, що при $\theta = \infty$ $B^r_{p,\theta}$ — простори Нікольського H^r_p [6]).

У подальшому будемо використовувати порядкові співвідношення. Запис $A \asymp B$ означає двосторонню нерівність між виразами A і B, тобто $C_3 B \le A \le C_4 B$, де $C_3,\ C_4 > 0$ — сталі, значення яких можуть бути різними в різних місцях. Також якщо $A \le C_5 B$, $C_5 > 0$, та $A \ge C_6 B$, $C_6 > 0$, будемо писати $A \ll B$ і $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів $\asymp$, $\ll$ і $\gg$.

Сформулюємо необхідні при доведенні одержаних у роботі результатів відомі твердження, що стосуються еквівалентного в сенсі відношення $\asymp$ зображення норми $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}$ функцій $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$.

Ці зображення подаються у термінах визначеного порядку росту p-норм деяких тригонометричних поліномів, які будуються на основі розкладу функції $f \in L_p(\pi_d)$ в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

Отже, нехай $f \in L_p(\pi_d)$ і

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad (k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d,$$

де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f і для кожного вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$,

$$\rho(s) := \{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\}.$$

В роботі [3] встановлено, що при $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$

$$\|f\|_{SB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_s \dfrac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Як бачимо, таке зображення норми не охоплює випадки $p = 1$ і $p = \infty$. Деяка модифікація правої частини (2) дозволяє встановити подібне зображення і в цих випадках. Введемо необхідні позначення.

Нехай

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n} \cos kt$$

— ядро Валле Пуссена порядку $2n$ і в точці $x = (x_1, \ldots, x_d)$

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad s = (s_1, \ldots, s_d), \quad s_j \in \mathbb{N}, \quad j = \overline{1,d}. \tag{3}$$

Якщо $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, то покладемо

$$A_s(f,x) := f * A_s = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t-x) A_s(t) dt, \quad x = (x_1, \ldots, x_d). \tag{4}$$

В роботі [7] встановлено, що при $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ має місце співвідношення

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{5}$$

і відповідно в [4] при $\theta = \infty$

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{6}$$

Далі в формулюваннях тверджень задіяно простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у випадку, коли функція Ω має спеціальний вигляд

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \quad \omega \in \Phi^1_{\alpha,l}, \quad \alpha > 0. \tag{7}$$

Отже, тут $\omega(\cdot)$ — довільна функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l і $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$. Згідно з попередніми означеннями зрозуміло, що

$$\omega \in \Phi^1_{\alpha,l} \Longrightarrow \Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}, \quad \alpha = (\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{d}).$$

Зауважимо, що до множини $\Phi^1_{\alpha,l}$, $l \in \mathbb{N}$, належить, наприклад, функція

$$\omega(u) = \begin{cases} \dfrac{u^r}{\left(\log^+ \dfrac{1}{u}\right)^{\beta}}, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

де $\log^+ \tau = \max\{1, \log \tau\}$, $0 < r < l$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Далі будемо використовувати термін „клас $S^{\Omega}_{p,\theta}B$”, розуміючи одиничну кулю у просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$, і позначати цю множину функцій так само, як і увесь простір $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

1. Історія питання та допоміжні твердження. У цьому пункті наведено означення досліджуваної апроксимативної характеристики у випадку функцій багатьох змінних з певною конкретизацією для двовимірного випадку (в загальному випадку функцій $2d$ ($d > 1$) змінних відповідне означення міститься, наприклад, у [8, с. 85]). Також коротко дано історичну довідку щодо найкращих білінійних наближень та їх застосувань і сформульовано допоміжні твердження, які будемо використовувати далі.

Нехай $L_q(\pi_2)$, $q = (q_1, q_2)$ — множина функцій $f(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x_1, x_2)\|_{q_1,q_2} = \| \, \|f(\cdot, x_2)\|_{q_1} \|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку у просторі $L_{q_1}(\pi)$, де $\pi := \pi_1$, по змінній $x_1 \in \mathbb{R}$, а потім від результату — по змінній $x_2 \in \mathbb{R}$ у просторі $L_{q_2}(\pi)$. Для $f \in L_q(\pi_2)$ означимо найкраще білінійне наближення порядку M:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(x_1), v_j(x_2)} \|f(x_1, x_2) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x_1) v_j(x_2)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi)$ і $\tau_0(f)_{q_1,q_2} := \|f(x_1, x_2)\|_{q_1,q_2}$.

Якщо $F \subset L_q(\pi_2)$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{8}$$

При $q_1 = q_2 = q$ будемо писати відповідно $\tau_M(f)_q$ і $\tau_M(F)_q$.

Дослідження найкращих білінійних наближень було розпочато ще на початку минулого сторіччя. Так, у 1907 р. E. Schmidt [9] довів теорему про наближення періодичних функцій двох змінних $f(x, y)$ в L_2 білінійними формами $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$, де, зокрема, вказав спосіб побудови найкращих білінійних форм.

C. A. Micchelli та A. Pinkus [10], досліджуючи білінійні наближення деяких функцій двох змінних, заданих на квадраті $[0, 1] \times [0, 1]$, застосували отримані результати для знаходження точних значень поперечників класів диференційовних функцій.

М.-Б.А. Бабаєв [11, 12] розглянув питання білінійних наближень неперіодичних функцій.

Поведінка величини $\tau_M(P)_{2,2}$ для функцій P із класів, аналогічних до класів Соболєва, вивчалась у роботі М. В. Мірошина і В. В. Хромова [13].

Пізніше Р. С. Ісмагілов [14] встановив зв'язок між найкращими білінійними наближеннями функцій виду $f(x - y)$, $f(x) \in F$, і поперечниками за Колмогоровим класів F.

Дослідженню білінійних наближень функцій $2d$ змінних ($d \geq 1$) з класів $W^r_{p,\alpha}$ і H^r_p, які є аналогами класів С. Л. Соболєва та С. М. Нікольського, присвячено низку робіт В. М.Темлякова [8, 15 – 18].

Також відзначимо роботи А. С. Романюка [19, 20] і А. С. Романюка, В. С. Романюка [21], які присвячені дослідженню білінійних наближень функцій $2d$ змінних із класів О. В. Бєсова та їх аналогів. У згаданих роботах можна ознайомитись з більш детальною бібліографією в цьому напрямі.

Нехай $C^d(N)$ позначає множину векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$ з цілими координатами, що задовольняють умову $|k_j| \le N$, $j = \overline{1, d}$.

Справедливим є наступне твердження.

Лема А [17]. *Нехай задано число N і $M = N^d$. Тоді для заданої функції*

$$g(x) = \sum_{k \in C^d(2N)} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| \le 1$ і $|\widehat{g}(k)| = 1$ при $k \in C^d(N)$, виконується співвідношення

$$\tau_M(g(x-y))_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Нехай $\mathrm{T}(C^d(2^n))$ позначає множину тригонометричних поліномів з номерами гармонік з $C^d(2^n)$.

Теорема А [22]. *Нехай $t \in \mathrm{T}(C^d(2^n))$. Тоді при $1 \le q \le p \le \infty$ має місце нерівність*

$$\|t\|_p \ll 2^{nd(1/q - 1/p)} \|t\|_q. \tag{9}$$

Зауважимо, що ця нерівність була встановлена С. М. Нікольським і отримала назву *нерівності різних метрик*. В одновимірному випадку при $p = \infty$ відповідну нерівність довів Д. Джексон [23].

Покладемо $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 \le n} \rho(s)$, де $\|s\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$. Множину Q_n називають східчасто-гіперболічним хрестом. Відомо (див., наприклад, [24]), що для кількості точок $|Q_n|$ цієї множини має місце співвідношення

$$|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{10}$$

Для $G \subset \mathbb{Z}^d$, де $\mathbb{Z}^d$ — цілочислова решітка в $\mathbb{R}^d$, через $\mathrm{T}(G, d)$ позначимо множину тригонометричних поліномів d змінних

$$\mathrm{T}(G, d) = \left\{ f \colon f(x) = \sum_{k \in G} c_k e^{i(k,x)} \right\},$$

і для G_1, $G_2 \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G_1, G_2, 2d)$ — множину тригонометричних поліномів $2d$ змінних

$$\mathrm{T}(G_1, G_2, 2d) = \left\{ f \colon f(x,y) = \sum_{k_1 \in G_1,\ k_2 \in G_2} c_{k_1,k_2} e^{i((k_1,x)+(k_2,y))} \right\}.$$

Лема Б [25]. *Нехай $f \in \mathrm{T}(Q_\mu, Q_\nu, 2d)$. Тоді*

$$\tau_M(f(x,y))_\infty \ll \min\{1, M^{-1}\} |Q_\mu|^{1/2} |Q_\nu|^{1/2} (\mu\nu)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\log\left(1 + \frac{|Q_\mu|}{M+1}\right) \log\left(1 + \frac{|Q_\nu|}{M+1}\right) \right)^{1/2} \|f\|_2. \tag{11}$$

2. Основні результати. У цьому пункті наведено результати щодо порядкових оцінок найкращих білінійних наближень функцій двох змінних, що належать до класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \le p \le \infty$, у просторі $L_{q,q}(\pi_2)$, $1 \le q \le \infty$, який у такому випадку збігається з простором $L_q(\pi_2)$.

Сформулюємо і доведемо наступне твердження.

Теорема. *Нехай* $1 \le p,\, q,\, \theta \le \infty$ *і* $\Omega \in \Phi^2_{\alpha,l}$, $\alpha > \alpha_0$, *де*

$$\alpha_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \dfrac{1}{2}, & 2 \le p \le q \le \infty, \\ \dfrac{1}{p}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases}$$

Тоді справедливими є наступні оцінки:

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \asymp \begin{cases} \Omega(M^{-2})M^{1/p-1/q}, & 1 \le p \le q \le 2, \\ \Omega(M^{-2}), & 2 \le p \le q \le \infty, \\ \Omega(M^{-2})M^{1/p-1/2}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty. \end{cases} \tag{12}$$

Доведення. Оскільки для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ при $1 \le \theta \le \infty$ мають місце включення

$$S^{\Omega}_{p,1}B \subset S^{\Omega}_{p,\theta}B \subset S^{\Omega}_{p,\infty}B = S^{\Omega}_{p}H,$$

то оцінки зверху в теоремі достатньо довести для класів $S^{\Omega}_{p}H$, а знизу — для $S^{\Omega}_{p,1}B$.

Встановимо спочатку оцінки зверху. При цьому будемо дотримуватися схеми міркувань, яка використовувалась при дослідженні білінійних наближень функцій із класів $W^r_{p,\alpha}$ і H^r_p (див. [8, c. 105 – 109]).

Нехай $f \in S^{\Omega}_{p}H$, $1 \le p \le q \le \infty$. Тоді для f має місце зображення

$$f(x) = \sum_{s_1,s_2 \ge 0} A_s(f,x), \quad x = (x_1,x_2), \quad s = (s_1,s_2) \tag{13}$$

(ряд збігається у просторі $L_p(\pi_2)$), де $A_s(f,x)$ визначено рівністю (4).

Для заданого $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\widetilde{M} = 2^n$ і розглянемо функції

$$f_{\widetilde{M},1}(x) = \sum_{|k_1| < \widetilde{M}} \widehat{V}_{\widetilde{M}/2}(k_1) e^{ik_1x_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ik_1x_1} dx_1$$

і

$$f_{\widetilde{M},2}(x) = \sum_{|k_2| < \widetilde{M}} \widehat{V}_{\widetilde{M}/2}(k_2) e^{ik_2x_2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - f_{\widetilde{M},1}(x) \Big) e^{-ik_2x_2} dx_2,$$

де $\widehat{V}_m(l) = (2\pi)^{-1} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} V_m(t) e^{-ilt} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції $V_m(t)$, $t \in \mathbb{R}$, по тригонометричній системі. Зрозуміло, що сума $f_{\widetilde{M},1}(x) + f_{\widetilde{M},2}(x)$ зображується у вигляді

$$f_{\widetilde{M},1}(x) + f_{\widetilde{M},2}(x) = \sum_{i=1}^{4\widetilde{M}-2} u_i(x_1) v_i(x_2), \tag{14}$$

де u_i і v_i, $i = \overline{1, 4\widetilde{M} - 2}$, — деякі функції із $L_q(\pi)$.

Розклад функції

$$g(x) = f(x) - f_{\widetilde{M},1}(x) - f_{\widetilde{M},2}(x) \tag{15}$$

по тригонометричній системі не містить гармонік $e^{i(k,x)}$ з k такими, що $\min_j |k_j| \leq \dfrac{\widetilde{M}}{2}$ і, очевидно,

$$g(x) = \sum_{s_1, s_2 > n} A_s(f, x), \quad s = (s_1, s_2). \tag{16}$$

Далі покладемо

$$M_s = [\widetilde{M} \cdot 2^{-\kappa((s_1+s_2)-2n)}], \quad s = (s_1, s_2), \quad s_1, s_2 > n,$$

де число $\kappa > 0$ є вільним у подальшому виборі, а $[c]$ — ціла частина числа $c \in \mathbb{R}$.

Нехай $M = C(\kappa)2^n$, де $C(\kappa)$ — достатньо велике число. Тоді

$$M_0 := 4\widetilde{M} - 2 + \sum_{s_1, s_2 > n} M_s < M, \quad M_0 \asymp 2^n, \tag{17}$$

до того ж існує $n_0 = n_0(\kappa) \geq n$ таке, що $M_s \geq 1$ при $n \leq s_1, s_2 \leq n_0$ і $M_s = 0$ при $s_1, s_2 > n_0$.

Розглянемо наближення в $L_q(\pi_2)$ функції $A_s(f, x)$, $s_1, s_2 > n$, для $f \in S^{\Omega}_p H$ (при різних співвідношеннях між p і q, $1 \leq p \leq q \leq \infty$) за допомогою білінійних агрегатів $\sum_i u_i^*(x_1)v_i^*(x_2)$ з M_s доданками в сумі. Функції $A_s(f, x)$ є тригонометричними поліномами порядку 2^{s_1} по змінній x_1 і порядку 2^{s_2} по змінній x_2 і зображуються у вигляді

$$A_s(f, x) = \sum_k A_s(f; x_1^{k_1}, x_2^{k_2}) V_{2^{s_1}}(x_1 - x_1^{k_1}) V_{2^{s_2}}(x_2 - x_2^{k_2}),$$

де $k = (k_1, k_2)$,

$$x_1^{k_1} = k_1 \pi 2^{-s_1 - 1}, \quad k_1 = 0, 1, \ldots, 2^{s_1+2} - 1,$$

$$x_2^{k_2} = k_2 \pi 2^{-s_2 - 1}, \quad k_2 = 0, 1, \ldots, 2^{s_2+2} - 1,$$

і підсумовування проводиться за всіма парами (k_1, k_2).

Позначимо через G_s множину, що складається з M_s точок (k_1, k_2), яким відповідають найбільші числа $|A_s(f, x_1^{k_1}, x_2^{k_2})|$, і покладемо

$$g_s(x_1, x_2) = \sum_{k \in G_s} A_s(f, x_1^{k_1}, x_2^{k_2}) V_{2^{s_1}}(x_1 - x_1^{k_1}) V_{2^{s_2}}(x_2 - x_2^{k_2}) := \sum_{i=1}^{M_s} u_i^s(x_1) v_i^s(x_2). \tag{18}$$

У [8, с. 105, 106] показано, що

$$\|A_s(f, x_1, x_2) - g_s(x_1, x_2)\|_q \ll \min\{M_s^{-\beta}, 1\} 2^{\beta(s_1+s_2)} \|A_s(f, x)\|_p, \quad \beta = 1/p - 1/q. \tag{19}$$

Нехай $1 \leq p \leq q \leq 2$, а число $\kappa > 0$ в означенні послідовності $(M_s)_{s_1, s_2 > n}$ таке, що $(1 + \kappa)\beta < \alpha$, де α взято з умови теореми.

Тоді, враховуючи, що для $f \in S_p^{\Omega} H$ (див. [4])

$$\|A_s(f, x_1, x_2)\|_p \ll \Omega(2^{-(s_1+s_2)}), \tag{20}$$

і беручи до уваги зображення (16) та (18), маємо $\left(\text{далі } M^* = \sum_{s_1, s_2 > n} M_s\right)$

$$\tau_{M^*}(g)_q \leq \sum_{s_1, s_2 > n} \|A_s(f, x) - g_s(x)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} M_s^{-\beta} 2^{\beta(s_1+s_2)} \|A_s(f, x)\|_p + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \|A_s(f, x)\|_q \asymp$$

$$\asymp \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} \left(\widetilde{M} 2^{-\kappa((s_1+s_2)-2n)}\right)^{-\beta} 2^{\beta(s_1+s_2)} \|A_s(f, x)\|_p + \sum_{s_1, s_2 > n_0} \|A_s(f, x)\|_q = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \tag{21}$$

Оцінимо спочатку перший доданок у (21). Оскільки функція $\Omega \in \Phi^2_{\alpha, l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, то

$$\mathcal{I}_1 \ll \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} M^{-\beta} 2^{\kappa\beta((s_1+s_2)-2n) + \beta(s_1+s_2)} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \asymp$$

$$\asymp M^{-\beta} 2^{-2n\kappa\beta} \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) 2^{(s_1+s_2)(\kappa\beta+\beta)} \asymp$$

$$\asymp M^{-\beta} 2^{-2n\kappa\beta} \sum_{n < s_1, s_2 < n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\kappa\beta-\beta)} \ll$$

$$\ll M^{-\beta} 2^{-2n\kappa\beta} \Omega(2^{-2n}) 2^{2n(\kappa\beta+\beta)} \asymp \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)}. \tag{22}$$

Для оцінки величини $\mathcal{I}_2$, використовуючи теорему A, можемо записати

$$\mathcal{I}_2 \ll \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{(s_1+s_2)(1/p-1/q)} \|A_s(f, x)\|_p \ll \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{(s_1+s_2)\beta} \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \ll$$

$$\ll \sum_{s_1, s_2 > n_0} \frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\beta)} \ll \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} \sum_{s_1, s_2 > n_0} 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\beta)}.$$

Зауважимо, що до $\mathcal{I}_2$ будуть входити доданки лише з тими s_1, s_2, для яких $M_s = 0$, тобто для цього повинна виконуватись умова $\widetilde{M} \cdot 2^{\kappa((s_1+s_2)-2n)} < 1$. Як зазначалося вище, $\widetilde{M} = 2^n$, і тому цю вимогу запишемо у вигляді

$$2^{n-\kappa((s_1+s_2)-2n)} < 1,$$

що рівносильно виконанню нерівності

$$s_1 + s_2 > \frac{n}{\kappa} + 2n.$$

Продовжимо оцінку величини $\mathcal{I}_2$:

$$\mathcal{I}_2 \ll \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{(n/\kappa+2n)(\beta-\alpha)} = \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)} 2^{(n/\kappa+2n)(\beta-\alpha)+n(2\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)} 2^{-\frac{n}{\kappa}(\alpha-\beta-\beta\kappa)}. \tag{23}$$

Далі, оскільки, згідно з вибором κ, $\alpha-\beta-\beta\kappa>0$, то $\mathcal{I}_2 \ll \mathcal{I}_1$ і з (21) будемо мати

$$\tau_{M^*}(g)_q \ll \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}} 2^{-n(2\alpha-\beta)} = \Omega(2^{-2n}) 2^{n\beta} = \Omega(M^{-2}) M^{1/p-1/q}. \tag{24}$$

Отже, для довільної функції $f \in S^{\Omega}_p H$, внаслідок рівності (15), із урахуванням зображення (14) (див. також (17)) і оцінки (24) отримаємо

$$\tau_M(f)_q \ll \Omega(M^{-2}) M^{1/p-1/q}, \quad 1 \le p \le q \le 2.$$

Нехай тепер $2 \le p \le q \le \infty$. Зауважимо, що в цьому випадку достатньо встановити оцінку зверху в теоремі при $p=2$. Отже, нехай $f \in S^{\Omega}_2 H$. Згідно з лемою Б для функції двох змінних $g(x)$ вигляду

$$g(x) = \sum_{\substack{k_1 \in Q_{s_1} \\ k_2 \in Q_{s_2}}} c_{k_1,k_2} e^{i(k_1x_1+k_2x_2)},$$

що належить до $T(Q_{s_1}, Q_{s_2}, 2)$, беручи до уваги співвідношення (11) для $d=1$, можемо записати

$$\tau_{M_s}(g(x))_\infty \ll$$

$$\ll \min\{1, M_s^{-1}\} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_1}}{M_s+1}\right) \log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_2}}{M_s+1}\right) \|g\|_2, \quad s=(s_1,s_2). \tag{25}$$

Далі, оскільки $A_s(f,x) \in T(Q_{s_1+1}, Q_{s_2+1}, 2)$ і, крім того, має місце нерівність (17), внаслідок (25) отримаємо (при $n < s_1, s_2 \le n_0$)

$$\tau_{M_s}(A_s(f,x))_\infty \ll M_s^{-1} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_1}}{M_s+1}\right) \log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_2}}{M_s+1}\right) \Omega(2^{-(s_1+s_2)}). \tag{26}$$

Виберемо $\kappa>0$ в означенні послідовності $(M_s)_{s_1,s_2>n}$ так, щоб виконувалась нерівність $\alpha-\kappa-\dfrac{1}{2}>0$ $\left(\text{за умовою у випадку, що розглядається, } \alpha > \dfrac{1}{2}\right)$. Далі, як і в попередньому випадку, будемо використовувати зображення (13) – (16) і співвідношення (17). Враховуючи, що $\Omega \in \Phi^2_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{2}$, використовуючи оцінку (26) та теорему А, можемо записати

$$\tau_M(f)_\infty \ll \sum_{s_1,s_2>n} \tau_{M_s}(A_s(f,x))_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{s_1=n+1}^{n_0} \sum_{s_2=n+1}^{n_0} M_s^{-1} 2^{\frac{s_1+s_2}{2}} \log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_1}}{M_s}\right) \log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_2}}{M_s}\right) \Omega(2^{-(s_1+s_2)}) +$$

$$+\sum_{s_1,s_2>n_0}\|A_s(f,x)\|_\infty \ll$$

$$\ll \widetilde{M}^{-1}2^{-2\kappa n}\sum_{s_1=n+1}^{n_0}\sum_{s_2=n+1}^{n_0}\Omega(2^{-(s_1+s_2)})2^{-(s_1+s_2)(-1/2-\kappa)}+\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{\frac{s_1+s_2}{2}}\|A_s(f,x)\|_2 \ll$$

$$=\widetilde{M}^{-1}2^{-2\kappa n}\sum_{s_1=n+1}^{n_0}\sum_{s_2=n+1}^{n_0}\frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\kappa-1/2)}+\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{\frac{s_1+s_2}{2}}\Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \ll$$

$$\ll \widetilde{M}^{-1}2^{-2\kappa n}\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}\sum_{s_1=n+1}^{n_0}\sum_{s_2=n+1}^{n_0}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-\kappa-1/2)}+$$

$$+\sum_{s_1,s_2>n_0}\frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/2)} \ll$$

$$\ll \widetilde{M}^{-1}2^{-2\kappa n}\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}2^{-2n(\alpha-\kappa-1/2)}+\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/2)} \asymp$$

$$\asymp M^{-1}2^{n}\Omega(2^{-2n})+\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/2)} \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-2n})+\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/2)}. \tag{27}$$

Далі, повторюючи для оцінки другого доданка (27) міркування, аналогічні до тих, які використовувались для оцінки величини $\mathcal{I}_2$ (див. (21) – (23)), і враховуючи, що $\alpha-\kappa-\dfrac{1}{2}>0$, записуємо

$$\tau_M(f)_\infty \ll \Omega(2^{-2n}) \asymp \Omega(M^{-2}).$$

Отже, у випадку $2\le p\le q\le\infty$, $\Omega\in\Phi^2_{\alpha,l}$, $\alpha>\dfrac{1}{2}$ оцінку зверху для $\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q$ доведено.

Нехай тепер $1\le p<2<q\le\infty$ і $\Omega\in\Phi^2_{\alpha,l}$, $\alpha>\dfrac{1}{p}$. В цьому випадку оцінку зверху в теоремі достатньо довести для $q=\infty$. Як і в попередньому випадку, застосовуючи лему Б до функції $A_s(f,x)-g_s(x)$ (див. нерівність (25)) і враховуючи при цьому, що $A_s(f,x)\in T(Q_{s_1+1},Q_{s_2+1},2)$, $f\in S^{\Omega}_pH$, а $g_s(x)\in T(Q_{s_1},Q_{s_2},2)$, можемо записати

$$\tau_M(A_s(f,x)-g_s(x))_\infty \ll M_s^{-1}2^{\frac{s_1+s_2}{2}}\log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_1}}{M_s}\right)\log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_2}}{M_s}\right)\|A_s(f,x)-g_s(x)\|_2. \tag{28}$$

З іншого боку, згідно з оцінками (19) і (20)

$$\|A_s(f,x_1,x_2)-g_s(x_1,x_2)\|_2 \ll M_s^{-\gamma}2^{\gamma(s_1+s_2)}\Omega(2^{-(s_1+s_2)}),\quad \gamma=1/p-1/2. \tag{29}$$

Співставляючи (28) і (29) та враховуючи (18), отримуємо

$$\tau_{2M_s}(A_s(f,x))_\infty \ll M_s^{-1-\gamma}2^{\gamma(s_1+s_2)}2^{\frac{s_1+s_2}{2}}\log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_1}}{M_s}\right)\log^{1/2}\left(1+\frac{2^{s_2}}{M_s}\right)\Omega(2^{-(s_1+s_2)}).$$

Зауважимо, що така ж порядкова оцінка зберігається і для $\tau_{M_s}(A_s(f,x))_\infty$.

Далі виберемо $\kappa>0$ в означенні послідовності $(M_s)_{s_1,s_2>n}$ так, щоб виконувалась нерівність $0<\kappa<\dfrac{\alpha-1/p}{1/2+1/p}$ $\left(\text{нагадаємо, що за умовою } \alpha>\dfrac{1}{p}\right)$. Тоді, як і в попередньому випадку, для $f\in S^{\Omega}_{p}H$ можемо записати

$$\tau_M(f)_\infty \ll \sum_{s_1,s_2>n}\tau_{M_s}(A_s(f,x))_\infty \ll \sum_{s_1=n+1}^{n_0}\sum_{s_2=n+1}^{n_0}M_s^{-1-\gamma}2^{(s_1+s_2)(\gamma+1/2)}\Omega(2^{-(s_1+s_2)})+$$

$$+\sum_{s_1,s_2>n_0}\|A_s(f,x)\|_\infty \asymp \widetilde{M}^{-1-\gamma}2^{-2n\kappa(1/2+1/p)}\times$$

$$\times\sum_{s_1=n+1}^{n_0}\sum_{s_2=n+1}^{n_0}\frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}}2^{-\kappa(s_1+s_2)(-1/2-1/p)}\cdot 2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/p)}+$$

$$+\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{\frac{s_1+s_2}{p}}\|A_s(f,x)\|_p \asymp$$

$$\ll \widetilde{M}^{-(1/2+1/p)}2^{-2n\kappa(1/2+1/p)}\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}\sum_{s_1=n+1}^{n_0}\sum_{s_2=n+1}^{n_0}2^{-(s_1+s_2)[(\alpha-1/p)-\kappa(1/2+1/p)]}+$$

$$+\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{\frac{s_1+s_2}{p}}\Omega(2^{-(s_1+s_2)}) \asymp$$

$$\ll \widetilde{M}^{-(1/2+1/p)}2^{-2n\kappa(1/2+1/p)}\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}2^{-2n[(\alpha-1/p)-\kappa(1/2+1/p)]}+$$

$$+\sum_{s_1,s_2>n_0}\frac{\Omega(2^{-(s_1+s_2)})}{2^{-\alpha(s_1+s_2)}}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/p)} \asymp$$

$$\asymp \widetilde{M}^{-(1/2+1/p)}\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}2^{-n(2\alpha-2\cdot 1/p)}+\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/p)} \asymp$$

$$\asymp \frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}2^{-n(2\alpha-(1/p-1/2))}+\frac{\Omega(2^{-2n})}{2^{-2\alpha n}}\sum_{s_1,s_2>n_0}2^{-(s_1+s_2)(\alpha-1/p)} \ll \Omega(2^{-2n})2^{n(1/p-1/2)}.$$

Звідси отримуємо остаточну оцінку

$$\tau_M(f)_\infty \ll \Omega(M^{-2})M^{1/p-1/2}.$$

Оцінки зверху в (12) встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінок знизу. Для цього будемо будувати екстремальні функції $g(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)$, де f — функція однієї змінної така, що $g \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, як функція двох змінних. При цьому, як зазначалося раніше, достатньо обмежитися значенням $\theta = 1$.

Нехай $1 \leq p \leq q \leq 2$. По заданому натуральному числу M знайдемо $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{n-1} \leq M < 2^n$, і розглянемо білінійне наближення функції двох змінних

$$f_1(x_1, x_2) = C_7 \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-1/p)n} V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2), \quad C_7 > 0.$$

Покажемо спочатку, що при належному виборі додатної сталої C_7 функція f_1 належить класу $S^{\Omega}_{p,1}B$. За означенням норми функції в цьому класі маємо

$$\|f_1\|_{S^{\Omega}_{p,1}B} = C_7 \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-1/p)n} \sum_{s_1, s_2 > 0} \Omega^{-1}(2^{-(s_1+s_2)}) \|A_s(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))\|_p \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-1/p)n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} \Omega^{-1}(2^{-(s_1+s_2)}) \|A_s(x_1, x_2)\|_1 \|(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))\|_p. \tag{30}$$

Оскільки $\|A_s\|_1 \leq C_8$ (див., наприклад, [15, с. 35]) та $\|V_{2^{n+2}}\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}$, $1 \leq p \leq \infty$ (див., наприклад, [15, с. 28]), то оцінку (30) можна продовжити таким чином:

$$\|f_1\|_{S^{\Omega}_{p,1}B} \ll \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-1/p)n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} \Omega^{-1}(2^{-(s_1+s_2)}) \|(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))\|_p \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-2n}) 2^{-(1-1/p)n} \Omega^{-1}(2^{-2(n+3)}) 2^{n(1-1/p)} \asymp 1.$$

Отже, при певному виборі сталої $C_7 > 0$ функція f_1 належить класу $S^{\Omega}_{p,1}B$.

Далі, у [8, с.107] встановлено, що

$$\tau_M(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))_{q,1} \gg 2^{-n(1/q-1)},$$

а отже,

$$\tau_M(f_1)_{q,1} \asymp \Omega(2^{-2n}) 2^{-n(1-1/p)} \tau_M(V_{2^{n+2}}(x_1 - x_2))_{q,1} \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-2n}) 2^{-n(1-1/p)} 2^{n(1-1/q)} = \Omega(2^{-2n}) 2^{-n(1/q-1/p)} = \Omega(M^{-2}) M^{1/p-1/q}.$$

Звідси випливає відповідна оцінка знизу і для $\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q$.

У випадку $2 \leq p \leq q \leq \infty$ розглянемо функцію

$$f_2(x_1, x_2) = C_9 \Omega(2^{-2n}) 2^{-n/2} R_n(x_1 - x_2), \quad C_9 > 0,$$

де $R_n(t) = \sum_{k=-2^n}^{2^n} \varepsilon_k e^{ikt}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, — поліном Рудіна – Шапіро (див., наприклад, [26, с. 155]), для якого виконується порядкова нерівність $\|R_n\|_\infty \ll 2^{n/2}$.

Як і в попередньому випадку, можна показати, що при належному виборі додатної сталої C_9 функція f_2 належить класу $S^{\Omega}_{p,1}B$.

Нехай $M = 2^n$. Оскільки функція $R_n(t)$ задовольняє умови леми А при $d = 1$, то виконується порядкова нерівність

$$\tau_M(R_n(x_1 - x_2))_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Таким чином, можемо записати

$$\tau_M(f_2(x_1 - x_2))_{2,1} \gg \Omega(2^{-2n})2^{-n/2}\tau_M(R_n(x_1 - x_2))_{2,1} \gg \Omega(2^{-2n}) = \Omega(M^{-2}),$$

звідки, очевидно, при будь-якому $M \in \mathbb{N}$

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,1}B)_q \gg \Omega(M^{-2}).$$

Насамкінець оцінка знизу у випадку $1 \le p < 2 < q \le \infty$ випливає з оцінок знизу для $1 \le p \le q \le 2$ при $q = 2$ внаслідок монотонності норми, тобто $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_q$, $q \ge 2$.

Оцінки знизу, а отже, і теорему доведено.

Зауваження. **1.** При $\theta = \infty$ твердження теореми є поширенням відповідних результатів В. М. Темлякова [8, с. 101] (теорема 4.2) для класів H^r_p на класи S^{Ω}_pH.

2. З доведеної теореми при $\Omega(t) = t^r$ і відповідних обмеженнях на параметр r можна отримати твердження для класів $B^r_{p,\theta}$, встановлене в роботі [21].

1. *Бернштейн С. Н.* Конструктивная теория функций (1931 – 1953) // Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – 626 с.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
4. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. – 1994. – **20**, № 1. – P. 35 – 48.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
7. *Стасюк С. А., Федуник О. В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 692 – 704.
8. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
9. *Schmidt E.* Zur Theoric der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**. – P. 433 – 476.
10. *Micchelli C. A., Pinkus A.* Some problem in the approximation of functions of two variables and n-widths of integral operators // J. Approxim. Theory. – 1978. – **24**. – P. 51 – 77.
11. *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 6. – С. 10 – 21.
12. *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса W^r_q билинейным формами // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 1. – С. 122 – 129.
13. *Мирошин Н. В., Хромов В. В.* Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Мат. заметки. – 1982. – **32**, № 5. – С. 721 – 727.
14. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
15. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
16. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1991. – **194**. – С. 229 – 248.

17. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243 – 252.
18. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. – 1987. – **176**, № 1. – С. 16 – 33.
19. *Романюк А. С.* Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, № 1. – С. 222 – 236.
20. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
21. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.
22. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
23. *Jakson D.* Certain problem of closet approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1993. – **39**, № 12. – P. 889 – 906.
24. *Никольская Н. С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Докл. АН СССР. – 1973. – **208**, № 5. – С. 1283 – 1285.
25. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **181**. – С. 250 – 267.
26. *Кашин С. Б., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.

Отримано 08.02.12