УДК 517.5

Н. В. Дерев'янко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain exact-order estimates for the trigonometric widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some relations between the parameters p and q.

Получены точные по порядку оценки тригонометрических поперечников классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q.

Вступ. У цій роботі досліджуються тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при $1 \le p, q, \theta \le \infty$.

Для того щоб сформулювати постановку задачі, наведемо необхідні позначення, означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та апроксимативної характеристики, яку будемо вивчати.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, ..., x_d)$, $y = (y_1, ..., y_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d$, і $L_p(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $h \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

і означимо за формулою

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x)\ , \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x),$$

кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f(x)$ у точці $x = (x_1, ..., x_d)$ з кроком h, яку також можна подати за допомогою співвідношення

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C_l^n f(x + nh).$$

Означимо модуль неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f \in L_p(\pi_d)$ згідно з формулою

$$\Omega_l(f; t)_p = \sup_{|h| \le t} \|\Delta_h^l f(x)\|_p\ ,$$

де $|h|$ — евклідова норма h.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задана на $\mathbb{R}_+ = \{t, t \ge 0\}$ та задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0) = 0, \quad \Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ є неперервною;

3) $\Omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+ \;\; \Omega(nt) \le C n^l \Omega(t)$, де $l \in \mathbb{N}$, стала $C \ge 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f;t)_p \in \Psi_l$.

Будемо писати:

1) $\Omega \in S^\alpha$, якщо $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає з деяким $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha} \;, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1 \;;$$

2) $\Omega \in S_l$, $l > 0$, якщо $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає з деяким $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma} \;, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1 \;.$$

Умови належності функції Ω до множин S^α і S_l часто називають умовами Барі – Стєчкіна [1].

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Для наочності наведемо приклад функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$:

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+ \dfrac{1}{t} \right)^b \;, & t > 0 \;, \\ 0, & t = 0 \;, \end{cases}$$

де $\log^+ t = \max\{1, \; \log t\}, \;\; 0 < r < l$, а b — фіксоване дійсне число.

Тепер перейдемо безпосередньо до означення просторів $B^\Omega_{p,\theta}$ [2, 3].

Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Будемо вважати, що $f \in B^\Omega_{p,\theta}$, якщо f задовольняє такі умови:

1) $f \in L_p(\pi_d)$;

2) $\|f\|_{b^\Omega_{p,\theta}} < \infty$, де $\|f\|_{b^\Omega_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$\|f\|_{b^\Omega_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\Omega(f;t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty \;, \\ \sup\limits_{t>0} \dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^\Omega_{p,\theta}$ є лінійним нормованим простором з нормою

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \|f\|_p + \|f\|_{b^\Omega_{p,\theta}}.$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то простори $B^\Omega_{p,\theta}$ збігаються з просторами О. В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [4] і, зокрема, при $\theta = \infty$ отримаємо $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — простори, введені С. М. Нікольським [5]. Якщо

$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1$, то будемо говорити, що функція f належить класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$, і зберігати при цьому для класів ті самі позначення, що і для відповідних просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

У подальших міркуваннях ми будемо використовувати порядкові співвідношення. Означимо їх. Для двох послідовностей $\mu_1(n)$ і $\mu_2(n)$ запис $\mu_1 \asymp \mu_2$ означає, що існують сталі $C_3,\ C_4 > 0$ такі, що $C_3\mu_1(n) \le \mu_2(n) \le C_4\mu_1(n)$. Записи $\mu_1 \ll \mu_2$ або $\mu_1 \gg \mu_2$ означають $C\mu_1(n) \le \mu_2(n)$ і $\mu_2(n) \le C\mu_1(n)$ відповідно. Всі сталі $C_i,\ i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатись у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій здійснюється наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Позначимо через $V_m(t),\ m \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt\ .$$

Багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, означимо формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j)\ .$$

Для функції $f \in L_p(\pi_d)$ розглянемо оператор згортки $\mathbf{V}_m$ цієї функції з ядром $V_m(x)$, тобто

$$\mathbf{V}_m f = f * V_m = \mathrm{V}_m(f, x)\ .$$

Таким чином, $V_m(f, x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції $f(x)$. Покладемо для $f \in L_p(\pi_d)$

$$\sigma_0(f, x) = V_1(f, x)\ ,\quad \sigma_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x)\ ,\quad s \in \mathbb{N}\ .$$

У наведених позначеннях при $1 \le p \le \infty$ (з точністю до абсолютних сталих) класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна визначити таким чином (див. [3]): $B^{\Omega}_{p,\theta} = \{f \in L_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\}$, де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty\ , \\ \sup\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty\ . \end{cases} \tag{1}$$

Зазначимо, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентне співвідношення для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, використовуючи в (1) замість $\sigma_s(f, x)$ „блоки” ряду Фур’є функції $f(x)$.

1. Означення апроксимативних характеристик та допоміжні твердження. Означимо апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, що досліджуються у роботі.

Нехай $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас. Тригонометричний поперечник класу F у просторі L_q означається формулою [6]

$$d^T_m(F, L_q) = \inf_{\Omega_m} \sup_{f\in F} \inf_{t(\Omega_m,x)} ||f(\cdot) - t(\Omega_m, \cdot)||_q\ , \tag{2}$$

де

$$t(\Omega_m, x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \ e^{i(k^j, x)} \ , \quad \Omega_m = \{k^1, ..., k^m\}$$

— набір векторів $k^j = (k_1^j, ..., k_d^j)$, $j = \overline{1, m}$, із цілочислової решітки Z^d, c_j — довільні числа.

Вперше тригонометричний поперечник був уведений Р. С. Ісмагіловим [6]. Величина (2) для різних функціональних класів досліджувалась у багатьох роботах. З детальнішою інформацією, а також відповідною бібліографією можна ознайомитися, наприклад, у роботах [7 – 10].

При встановленні оцінок поперечників $d_m^T(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q)$ будемо використовувати відомі оцінки для найкращих m-членних тригонометричних наближень функцій із класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ та наближень цих класів тригонометричними поліномами зі спектром у кубічних областях. Для формулювання відповідних результатів наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $f \in L_q(\pi_d)$, через $e_m(f, \ L_q)$ позначимо найкраще m-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, яке означається таким чином:

$$e_m(f, \ L_q) = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^m} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^m} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{m} c_j \ e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q ,$$

де $\{k^j\}_{j=1}^m$ — набір векторів $k^j = \{k_1^j, ..., k_d^j\}$ з цілочисловими координатами, c_j — довільні числа, $(k^j, x) = k_1^j x_1 + ... + k_d^j x_d$.

Якщо F — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_m(F, \ L_q) = \sup_{f \in F} e_m(f, \ L_q) \ . \tag{3}$$

Величина $e_m(f, \ L_2)$ для функції однієї змінної була введена С. Б. Стєчкіним [11] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_m(f, \ L_q)$ і $e_m(F, \ L_q)$, $1 \le q \le \infty$, почали досліджувати вже з точки зору апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій відповідно. Перші оцінки величини $e_m(f, \ L_\infty)$ для деяких конкретних функцій отримав Р. С. Ісмагілов [6]. Систематичне вивчення величини (3) на класах періодичних функцій багатьох змінних С. Л. Соболєва $W_{p,\alpha}^r$ та С. М. Нікольського H_p^r розпочав В. Н. Темляков [12]. Подальші дослідження величин $e_m(F, \ L_q)$ на класах функцій $W_{p,\alpha}^r$ та H_p^r було продовжено у роботах Е. С. Белінського [8, 13]. Відмітимо також роботи [14 – 16], в яких проводилися дослідження величин (3) для деяких важливих функціональних класів.

Далі, нехай $T_{\square_{2^n}} = \{t(x) \colon t(x) = \sum_{k \in \square_{2^n}} c_k e^{i(k,x)}, \ c_k \in \mathbb{C}$, де

$$\square_{2^n} = \{k = (k_1, ..., k_d) \colon |k_j| < 2^n, \ 1 \le j \le d\}.$$

Для $f \in L_q, \ 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$E_{\square_{2^n}}(f, \ L_q) = \inf_{t(\cdot) \in T_{\square_{2^n}}} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q$$

і для функціонального класу $F \subset L_q$ відповідно

$$E_{\square_{2^n}}(F, L_q) = \sup_{f \in F} E_{\square_{2^n}}(f, \ L_q) \ .$$

Сформулюємо кілька тверджень, які будуть використані при встановленні відповідних результатів.

Теорема А [5]. *Нехай* $n_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$, *і*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq n_j} c_k \, e^{i(k,x)} \ .$$

Тоді при $1 \leq q < p \leq \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/q-1/p} \|t\|_q \ . \tag{4}$$

Нерівність (4) доведена С. М. Нікольським і називається „нерівністю різних метрик”. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [17].

Лема А [18]. *Нехай* $2 \leq q < \infty$. *Тоді для довільного тригонометричного полінома*

$$P(\Theta_m, x) = \sum_{j=1}^{m} e^{i(k^j,x)}$$

і для довільного $n \leq m$ *знайдуться тригонометричний поліном* $\widetilde{P}(\Theta_n, x)$, *який містить не більш як* n *гармонік, і стала* $C_q > 0$ *такі, що*

$$\|P(\Theta_m, \cdot) - \widetilde{P}(\Theta_n, \cdot)\|_q \leq C_q m n^{-1/2} \ ,$$

до того ж $\Theta_n \subset \Theta_m$, *всі коефіцієнти* $\widetilde{P}(\Theta_n, x)$ *однакові і не перевищують за модулем* mn^{-1}.

Позначимо тепер через $\mu(s)$, $s = 0, 1, 2, \ldots,$ підмножину цілочислової решітки вигляду

$$\mu(s) = \{k = (k_1, ..., k_d) : \ 2^{s-1} \leq \max_{j=\overline{1,d}} |k_j| < 2^s\}$$

і для $f \in L_p(\pi_d)$ введемо позначення

$$f_0(x) = \widehat{f}(0) \ \ i \ \ f_s(x) = \sum_{k \in \mu(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} \ , \ \ s = 1, 2, ... \ ,$$

де

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коефіцієнт Фур'є функції f.

Теорема Б [19]. *Нехай* $f \in L_p(\pi_d)$, $1 < p < \infty$. *Тоді існують сталі* $C_5(p)$ *і* $C_6(p)$ *такі, що*

$$C_5(p) ||f||_p \leq \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |f_s|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_6(p) \|f\|_p \ . \tag{5}$$

Теорема В [20]. *Нехай* $1 \leq p, q, \theta \leq \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > \alpha(p,q)$, *де*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} d(1/p - 1/q)_+ \ , & 1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ або } 1 \leq q \leq p \leq \infty \ , \\ \\ \max\{d/p; d/2\} \ - & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді для будь-яких $m \in \mathbb{N}$ *має місце оцінка*

$$e_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{(1/p - \max\{1/q;1/2\})_+} \ ,$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема Г [21]. *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, *а функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з деяким* $\alpha > d(1/p - 1/q)_+$. *Тоді*

$$E_{\square_{2^n}}(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/q)_+} \ ,$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

2. Оцінки тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p < 2 \le q < p/(p-1)$, $1 \le \theta \le \infty$, *функція* Ω *належить* $\Phi_{\alpha,l}$ *при деякому* $\alpha > d$. *Тоді справджується співвідношення*

$$d^T_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/2} \ . \tag{6}$$

Доведення. Зауважимо, що оцінка знизу в (6) отримується з теореми В. Оскільки, згідно з означеннями величин $e_m(F,\ L_q)$ і $d^T_m(F,\ L_q)$, виконується нерівність

$$e_m(F,\ L_q) \le d^T_m(F, L_q) \ , \tag{7}$$

то можемо записати (навіть для $\alpha > d/p$)

$$d^T_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ge e_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \gg \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/2} \ .$$

Оцінку знизу встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки зверху. Оскільки права частина (6) від θ не залежить, а зі збільшенням параметра θ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_p,$$

то оцінку зверху достатньо встановити для $d^T_m(B^{\Omega}_{p,\infty},\ L_q)$, тобто $d^T_m(H^{\Omega}_p,\ L_q)$.

Візьмемо довільне $m \in \mathbb{N}$ і підберемо $n \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувались нерівності $2^{(n-1)d} \le m \le 2^{nd}$, тобто $m \asymp 2^{nd}$.

Для $s = 0, 1, 2, \ldots$ покладемо

$$m_s = \begin{cases} 2^{sd} \ , & 0 \le s < n \ , \\ [\Omega^{-1}(2^{-n}) 2^{sd} \Omega(2^{-s})] + 1 \ , & n \le s \le n_0, \\ 0, & s > n_0, \end{cases}$$

де $[a]$ — ціла частина числа a і $n_0 = \left[n \dfrac{\alpha/d - 1/p + 1/2}{\alpha/d - 1/p + 1/q} \right] + 1$. Тоді оцінимо $\sum_{s=0}^{n_0} m_s$:

$$\sum_{s=0}^{n_0} m_s \le \sum_{s=0}^{n-1} 2^{sd} + \sum_{s=n}^{n_0} \Omega^{-1}(2^{-n}) 2^{sd} \Omega(2^{-s}) + \sum_{s=n}^{n_0} 1 \ll$$

$$\ll 2^{nd} + \Omega^{-1}(2^{-n}) \sum_{s=n}^{n_0} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-s(\alpha-d)} + (n_0 - n + 1) = \mathcal{J}_1 \ .$$

Оскільки $\Omega(t) \in S^{\alpha}$ з деяким $\alpha > d$, то має місце співвідношення

$$\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \leq \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \ , \quad s \geq n.$$

Оцінку для $\mathcal{J}_1$ можна продовжити таким чином:

$$\mathcal{J}_1 \ll 2^{nd} + \Omega^{-1}(2^{-n}) \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n}^{n_0} 2^{-s(\alpha-d)} + (n_0 - n + 1) \ll$$

$$\ll 2^{nd} + 2^{\alpha n} 2^{-n(\alpha-d)} + (n_0 - n + 1) =$$

$$= 2^{nd} + 2^{nd} + (n_0 - n + 1) \ll 2^{nd} \left(1 + \frac{n_0 - n + 1}{2^{nd}}\right) \asymp m \ .$$

Отже, маємо

$$\sum_{s=0}^{n_0} m_s \ll m \ .$$

Розглянемо тригонометричний поліном

$$t_s(x) = \sum_{k \in \mu(s)} e^{i(k,x)}$$

і зауважимо, що при кожному s він складається з $|\mu(s)|$ доданків, тобто їх кількість дорівнює за порядком $2^{(s+1)d}$. Через $|A|$ позначаємо кількість елементів скінченної множини $A \subset \mathbb{Z}^d$.

Далі, оскільки для довільного $s = 0, 1, 2, ...$ виконується нерівність $m_s \leq 2^{(s+1)d}$, то згідно з лемою А існують тригонометричний поліном $t(\Theta_{m_s}, x)$, який містить не більше m_s гармонік, і стала C_q такі, що

$$\|t_s(\cdot) - t(\Theta_{m_s}, \cdot)\|_q \leq C_q 2^{(s+1)d} m_s^{-1/2} \ll 2^{sd} m_s^{-1/2} \ ,$$

до того ж $\Theta_{m_s} \subset \Theta_{2^{(s+1)d}}$, всі коефіцієнти $t(\Theta_{m_s}, x)$ однакові і за модулем не перевищують $2^{(s+1)d} m_s^{-1}$.

Побудуємо підпростір тригонометричних поліномів з „номерами” гармонік з об’єднання множин $P = \bigcup_{0 \leq s < n} \mu(s)$ і $Q = \bigcup_{n \leq s \leq n_0} \Theta_{m_s}$ і переконаємося, що наближення поліномом з даного простору реалізує порядок тригонометричного поперечника $d_m^T(H_p^{\Omega}, L_q)$ при $1 \leq p < < 2 \leq q < p/(p-1)$.

Нехай f — довільна функція із класу H_p^{Ω}. Розглянемо для цієї функції наближаючий поліном з „номерами” гармонік з $P \bigcup Q$ вигляду

$$t(x) = \sum_{s=0}^{n-1} f_s(x) + \sum_{s=n}^{n_0} (t(\Theta_{m_s}, x) * f_s(x)) \ .$$

Тоді

$$\|f(\cdot)-t(\cdot)\|_q \le \left\| \sum_{s=n}^{n_0} f_s(\cdot) - (f_s(\cdot) * t(\Theta_{m_s}, \cdot)) \right\|_q + $$

$$+ \left\| \sum_{s>n_0} f_s(\cdot) \right\|_q = \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 \ . \tag{8}$$

Спочатку встановимо оцінку зверху для доданка $\mathcal{J}_3$ у випадку $p \neq 1$. Оскільки для $f \in H_p^{\Omega}$ виконується нерівність

$$\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \le \Omega(2^{-s}), \ s = 0, 1, 2, \dots \ ,$$

то згідно з нерівністю Мінковського і „нерівністю різних метрик" отримуємо

$$\mathcal{J}_3 = \left\| \sum_{s>n_0} f_s(\cdot) \right\|_q \le \sum_{s>n_0} \|f_s(\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s>n_0} 2^{sd(1/p-1/q)} \|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \le$$

$$\le \sum_{s>n_0} 2^{sd(1/p-1/q)} \Omega(2^{-s}) = \sum_{s>n_0} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-sd(\alpha/d-1/p+1/q)} \ .$$

Оскільки $\Omega(t) \in S^{\alpha}$ з $\alpha > d$, то має місце співвідношення

$$\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \ , \quad s > n_0 > n \ .$$

Продовжуємо оцінку $\mathcal{J}_3$:

$$\mathcal{J}_3 \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s>n_0} 2^{-sd(\alpha/d-1/p+1/q)} \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n \frac{\alpha/d-1/p+1/2}{\alpha/d-1/p+1/q} d(\alpha/d-1/p+1/q)} =$$

$$= \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-nd(\alpha/d-1/p+1/2)} =$$

$$= \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/2)} \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/2} \ . \tag{9}$$

Перейдемо до встановлення оцінки зверху величини $\mathcal{J}_2$. З цією метою для кожного $s \in \in [n, n_0]$ розглянемо лінійний оператор T_s, який діє на функцію $f(x) \in L_p$ таким чином:

$$T_s f(x) = f(x) * (t_s(x) - t(\Theta_{m_s}; x)) \ .$$

Тоді має місце таке твердження.

Лема Б [22]. *Нехай* $1 < p < 2 < q < p/(p-1)$. *Тоді норма оператора* T_s *з* L_p *в* $L_q(||T_s||_{p\to q})$ *задовольняє співвідношення*

$$\|T_s\|_{p\to q} = \sup_{\|f\|_p\le 1} \|T_s f\|_q \ll 2^{sd} m_s^{-(1/2+1/p')} ,$$

де $p' = p/(p-1)$.

Нехай спочатку $p \in (1,2)$. Використовуючи послідовно теорему Б, нерівність Мінковського і лему Б (для $n \le s \le n_0$), можемо записати

$$\mathcal{J}_2 \ll \left\| \left(\sum_{s=n}^{n_0} |f_s(\cdot) - (f_s(\cdot) * t(\Theta_{m_s}, \cdot))|^2 \right)^{1/2} \right\|_q =$$

$$= \left\| \sum_{s=n}^{n_0} |f_s(\cdot) - (f_s(\cdot) * t(\Theta_{m_s}, \cdot))|^2 \right\|_{q/2}^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{s=n}^{n_0} \| \, |f_s(\cdot) - (f_s(\cdot) * t(\Theta_{m_s}, \cdot))|^2 \, \|_{q/2} \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{s=n}^{n_0} \|f_s(\cdot) - (f_s(\cdot) * t(\Theta_{m_s}, \cdot))\|_q^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{s=n}^{n_0} \|T_s f_s(\cdot)\|_q^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{s=n}^{n_0} \|T_s\|_{p\to q}^2 \|f_s(\cdot)\|_p^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s=n}^{n_0} 2^{2sd} m_s^{-(1+2/p')} ||f_s(\cdot)||_p^2 \right)^{1/2} . \qquad (10)$$

Підставляючи в (10) замість m_s їхні значення і виконуючи відповідні перетворення, отримуємо

$$\mathcal{J}_2 \ll \left(\sum_{s=n}^{n_0} 2^{2sd} \Omega^{1+2/p'}(2^{-n}) 2^{-sd(1+2/p')} \Omega^{-(1+2/p')}(2^{-s}) \|\sigma_s(f,\cdot)\|_p^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \Omega^{1/2+1/p'}(2^{-n}) \left(\sum_{s=n}^{n_0} \Omega^{-(1+2/p')}(2^{-s}) \Omega^2(2^{-s}) 2^{sd(1-2/p')} \right)^{1/2} =$$

$$= \Omega^{3/2-1/p}(2^{-n}) \left(\sum_{s=n}^{n_0} \Omega^{2/p-1}(2^{-s}) 2^{sd(2/p-1)} \right)^{1/2} =$$

$$= \Omega^{3/2-1/p}(2^{-n}) \left(\sum_{s=n}^{n_0} \left(\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \right)^{2/p-1} 2^{-s(\alpha-d)(2/p-1)} \right)^{1/2} .$$

Враховуючи, що згідно з умовами теореми функція $\Omega(t) \in S^\alpha$ з деяким $\alpha > d$ і виконуються нерівності $2/p - 1 > 0$ і $\alpha - d > 0$, оцінку величини $\mathcal{J}_2$ можна продовжити таким чином:

$$\mathcal{J}_2 \ll \Omega^{3/2-1/p}(2^{-n}) \left(\frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \right)^{1/p-1/2} \left(\sum_{s=n}^{n_0} 2^{-s(\alpha-d)(2/p-1)} \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-n})2^{\alpha n(1/p-1/2)}2^{-n(\alpha-d)(1/p-1/2)} =$$

$$= \Omega(2^{-n})2^{nd(1/p-1/2)} \asymp \Omega(m^{-1/d})m^{1/p-1/2}\,. \qquad (11)$$

Отже, підставивши (9) і (11) в (8), одержимо оцінку

$$\|f(\cdot)-t(\cdot)\|_q \ll \Omega(m^{-1/d})m^{1/p-1/2}\,, \quad 1<p<2\le q<\frac{p}{p-1}\,.$$

Звідси випливає оцінка зверху для поперечника $d_m^T(H_p^\Omega,\ L_q)$, а також і для поперечника $d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega,\ L_q)$, $1<p<2\le q<p/(p-1)$, $1\le\theta<\infty$.

Встановимо тепер оцінку зверху для тригонометричного поперечника $d_m^T(H_1^\Omega,\ L_q)$, $2\le$ $\le q<\infty$.

Нехай p_1 — число, яке задовольняє умову $1<p_1<2$. Його значення уточнимо пізніше. Доданок $\mathcal{J}_3$ оцінюється так само, як і в попередньому випадку. Для величини $\mathcal{J}_2$, повторивши до певного місця міркування, які проводилися вище, отримаємо

$$\mathcal{J}_2 \ll \left(\sum_{s=n}^{n_0}\|T_s f_s(\cdot)\|_q^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{s=n}^{n_0}\|T_s\|_{p_1\to q}^2\|f_s(\cdot)\|_{p_1}^2\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s=n}^{n_0}\|T_s\|_{p_1\to q}^2\|\sigma_s(f,\cdot)\|_{p_1}^2\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s=n}^{n_0}2^{2sd}m_s^{-(1+2/p_1')}\|\sigma_s(f,\cdot)\|_{p_1}^2\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Застосувавши до $\|\sigma_s(f,\cdot)\|_{p_1}$ нерівність різних метрик і підставивши в (12) значення m_s, будемо мати

$$\mathcal{J}_2 \ll \left(\sum_{s=n}^{n_0}2^{2sd}m_s^{-(1+2/p_1')}2^{2sd(1-1/p_1)}\|\sigma_s(f,\cdot)\|_1^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \Omega^{1/2+1/p_1'}(2^{-n})\left(\sum_{s=n}^{n_0}\Omega^{1-2/p_1'}(2^{-s})2^{sd}\right)^{1/2} =$$

$$= \Omega^{1/2+1/p_1'}(2^{-n})\left(\sum_{s=n}^{n_0}\left(\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}}\right)^{1-2/p_1'}2^{-s(\alpha-2\alpha/p_1'-d)}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \Omega^{1/2+1/p_1'}(2^{-n})\left(\frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\right)^{1/2-1/p_1'}\left(\sum_{s=n}^{n_0}2^{-s(\alpha-2\alpha/p_1'-d)}\right)^{1/2} =$$

$$= \Omega(2^{-n})2^{\alpha n(1/2-1/p_1')}\left(\sum_{s=n}^{n_0}2^{-s(\alpha-2\alpha/p_1'-d)}\right)^{1/2}.$$

Тепер підберемо число p_1 таким чином, щоб виконувалась умова $\alpha-2\alpha/p_1'-d>0$, де $1/p_1+1/p_1'=1$. Це можливо, оскільки згідно з умовами теореми $\alpha>d$.

Продовжимо оцінку $\mathcal{J}_2$:

$$\mathcal{J}_2 \ll \Omega(2^{-n})2^{\alpha n(1/2-1/p_1')}2^{-n(\alpha/2-\alpha/p_1'-d/2)} \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-n})2^{nd/2} \asymp \Omega(m^{-1/d})m^{1/2} .$$

Звідси, беручи до уваги оцінку величини $\mathcal{J}_3$, знаходимо шукану оцінку для поперечника $d_m^T(H_1^\Omega,\ L_q)$, а відповідно і оцінку $d_m^T(B_{1,\theta}^\Omega,\ L_q)$, $1 \leq \theta < \infty$.

Теорему доведено.

На завершення наведемо твердження щодо порядків тригонометричних поперечників $d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ для інших співвідношень між параметрами p та q, яке є наслідком відомих результатів .

Теорема 2. *Нехай* $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *або* $1 \leq p \leq q \leq 2$ *і* $1 \leq \theta \leq \infty$, *функція* Ω *належить* $\Phi_{\alpha,l}$ *при деякому* $\alpha > d(1/p-1/q)_+$. *Тоді має місце порядкова оцінка*

$$d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega, L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d})m^{(1/p-1/q)_+} . \tag{13}$$

Оцінку зверху в (13) отримуємо з теореми Г згідно з нерівністю

$$d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega,\ L_q) \leq E_{\square_{2^n}}(B_{p,\theta}^\Omega, L_q),\ m \asymp 2^{nd},$$

а оцінка знизу є наслідком теореми В.

Зауваження. **1.** Якщо $\Omega(t) = t^r$, $r > d$, $1 \leq p < 2 \leq q < p/(p-1)$, $1 \leq \theta \leq \infty$, то

$$d_m^T(B_{p,\theta}^r)_q \asymp m^{-r/d+1/p-1/2} . \tag{14}$$

Оцінку (14) встановлено у роботі [22].

2. Для тих співвідношень між параметрами p і q, які задовольняють умови теорем 1 і 2, згідно з теоремою В можемо записати

$$d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega,\ L_q) \asymp e_m(B_{p,\theta}^\Omega,\ L_q) .$$

3. Питання про порядки поперечників $d_m^T(B_{p,\theta}^\Omega,\ L_q)$ у випадках $2 \leq p < q \leq \infty$ і $1 < p < 2$, $p/(p-1) < q \leq \infty$ залишається відкритим.

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Liu Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. – 2002. – **18**, № 3. – P. 815 – 832.
3. *Xu Guiqiao.* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. – 2005. – **25**, № 4. – P. 663 – 671.
4. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
5. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
6. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
7. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.

8. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294 – 1297.
9. *Романюк А. С.* Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 1. – С. 71 – 96.
10. *Майоров В. Е.* Тригонометрические n-поперечники класса W^r_1 в пространстве L_q // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. – М.: ЦЭМИ, 1976. – С. 199 – 208.
11. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
12. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 301 – 305.
13. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 46 – 47.
14. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
15. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших M-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
16. *Стасюк С. А.* Найкращі тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_1 // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 265 – 275.
17. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**, № 12. – P. 889 – 906.
18. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1991. – № 2. – С. 3 – 7.
19. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
20. *Войтенко С. П.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 9. – С. 1189 – 1199.
21. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студ. – 2011. – **35**, № 1. – С. 66 – 73.
22. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1348 – 1366.

Одержано 21.02.12