УДК 517.5

**С. А. Пичугов** (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. транспорта)

# ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ УКЛОНЕНИЙ НАИЛУЧШИХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

In the case of uniform approximation of continuous periodic functions of one variable by trigonometric polynomials, we obtain lower bounds for the Jackson constants of the best linear methods of approximation.

У випадку рівномірної апроксимації неперервних періодичних функцій однієї змінної тригонометричними поліномами отримано оцінки знизу сталих Джексона для найкращих лінійних методів наближень.

**1. Введение**. Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительнозначных непрерывных $2\pi$-периодических функций с нормой $\|f\| = \max\{|f(x);\, x \in \mathrm{R}|\}$; $\omega(f,h) = \sup\{\|\Delta_t f\|;\, |t| \le h\}$, $h \ge 0$, — модуль непрерывности $f$ из $C_{2\pi}$, где $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$; $\mathfrak{I}^{n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов $T_{n-1}(x)$, $T_{n-1}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_r \cos rx + \mu_r \sin rx$, степени не выше $n-1$;

$$e_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|;\, T_{n-1} \in \mathfrak{I}^{n-1}\right\}$$

— наилучшее приближение $f$ подпространством $\mathfrak{I}^{n-1}$.

По теореме Джексона (см., например, [1]) при любом фиксированном $\alpha > 0$ и всех $n \in \mathrm{N}$ конечна величина

$$\chi\left(\mathfrak{I}^{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right) := \sup\left\{\frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f, \dfrac{\alpha}{n}\right)};\, f \in C_{2\pi},\, f \ne \mathrm{const}\right\},$$

которая является точной константой в соответствующем неравенстве Джексона для наилучших приближений

$$e_{n-1}(f) \le \chi\left(\mathfrak{I}^{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right)\omega\left(f, \frac{\alpha}{n}\right). \tag{1}$$

Н. П. Корнейчук доказал [2], что при всех $n \in \mathrm{N}$

$$1 - \frac{1}{2n} \le \chi\left(\mathfrak{I}^{n-1}; \frac{\pi}{n}\right) \le 1\,. \tag{2}$$

В работе [3] было получено обобщение этого результата: при всех $k, n \in \mathrm{N}$

$$\frac{k+1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \le \chi\left(\mathfrak{I}^{n-1}; \frac{\pi}{nk}\right) \le \frac{k+1}{2}\,. \tag{3}$$

Наряду с наилучшими приближениями функций важное значение имеет также их приближение линейными методами.

Пусть $L_{n-1}$ — совокупность линейных полиномиальных операторов $A_{n-1}\colon C_{2\pi} \to \mathfrak{I}^{n-1}$,

$$\chi\left(A_{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right) := \sup\left\{\frac{\|f - A_{n-1}f\|}{\omega\left(f, \frac{\alpha}{n}\right)};\ f \in C_{2\pi},\ f \neq \mathrm{const}\right\} \tag{4}$$

— константа Джексона для приближения линейным методом $A_{n-1}$, а

$$\chi\left(L_{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right) = \inf\left\{\chi\left(A_{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right);\ A_{n-1} \in L_{n-1}\right\} \tag{5}$$

— точная константа Джексона для наилучшего линейного метода приближения.

В настоящий момент константы (5) и наилучшие линейные методы при $n > 1$ неизвестны.

В [4] доказано, что при $n = 2, 3, \ldots$

$$\chi\left(L_{n-1}; \frac{\pi}{n}\right) > 1. \tag{6}$$

Это означает (см. (2)), что точные неравенства Джексона для наилучших приближений (1) при $n > 1$ и $\alpha = \pi$ не реализуются линейным методом.

В связи с этим представляют интерес оценки сверху и снизу величин $\chi\left(L_{n-1}; \frac{\alpha}{n}\right)$.

Известно много оценок сверху для этих констант, вытекающих из вычисления величин (4) для конкретных линейных методов. Мы отметим работу С. Б. Стечкина [5] по вычислению константы Джексона (4) $\chi\left(\theta_{n-1}; \frac{\pi}{n}\right)$ для приближения линейным методом Фавара $\theta_{n-1}$:

$$\theta_{n-1}(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) F_{n-1}(t)\, dt,$$

$$F_{n-1}(t) = 1 + 2\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{r\pi}{2n} \cos rt. \tag{7}$$

**Теорема 1** [5]. *При всех* $n \in \mathrm{N}$ *справедливы равенства*

$$\sup\left\{\frac{\|f - \theta_{n-1}f\|}{\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)};\ f \in C_{2\pi},\ f \neq \mathrm{const}\right\} = \frac{1 + \|F_{n-1}\|_1}{2}, \tag{8}$$

*причем*

$$\sup_n \frac{1}{2}\left(1+\|F_{n-1}\|_1\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\int_0^{\pi/2} u \operatorname{ctg} u \cos tu \, du\right| dt\right),$$

*где* $\|F_{n-1}\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F_{n-1}|\, dt$.

По подсчетам Н. П. Корнейчука [6] (подробности которых не были опубликованы)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\int_0^{\pi/2} u \operatorname{ctg} u \cos tu \, du\right| dt \le 1{,}36 .$$

Из теоремы 1 вытекает следующая оценка сверху для наилучшего линейного метода в случае $\alpha = \pi$:

$$\chi\left(L_{n-1}; \frac{\pi}{n}\right) \le \chi\left(\theta_{n-1}; \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\|F_{n-1}\|_1\right) \le 1{,}18, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{9}$$

Ниже мы получим оценки снизу для констант $\chi(L_{2n-1}; \pi/2n)$, уточняющие (6). При этом будет найдено точное значение $\chi(L_1; \pi/2)$ и наилучший линейный метод $A_1$, который совпал с методом Фавара $\theta_1$. Кроме того, получим оценки снизу для констант $\chi(L_{2n-1}; \pi/2nk)$, $k = 2, 3, \ldots$, из которых, в частности, следует, что точные неравенства Джексона для наилучших приближений по крайней мере для четных $n$ не реализуются линейным методом ни при каком значении $k \in \mathrm{N}$.

**2. Формулировки основных результатов.** Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.** *При всех* $n \in \mathrm{N}$

$$\chi\left(L_{2n-1}; \frac{\pi}{2n}\right) \ge \chi\left(L_1; \frac{\pi}{2}\right) = \chi\left(\theta_1; \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1+\|F_1\|_1}{2} = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}} . \tag{10}$$

**Теорема 3.** *При* $k = 2, 3, \ldots$ *и всех* $n \in \mathrm{N}$

$$\chi\left(L_{2n-1}; \frac{\pi}{2nk}\right) \ge \chi\left(L_1; \frac{\pi}{2k}\right) \ge$$

$$\ge \frac{k+1}{2} - \frac{k}{\pi}\gamma_k + \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{4k}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma_k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma_k\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4k} - \sin\frac{\pi}{4k}\right)\right), \tag{11}$$

*где* $\gamma_k$ *из* $(0; \pi/2k)$ — *корень уравнения*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma_k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma_k\right) = \frac{\sin(\pi/4k)}{\pi/4k} . \tag{12}$$

***Следствие.*** *При* $k = 2, 3, \ldots$ *и всех* $n \in \mathrm{N}$

$$\chi\left( L_{2n-1}; \frac{\pi}{2nk} \right) > \frac{k+1}{2}.$$

**3. Вспомогательные утверждения.** Пусть $\overline{\Omega}_{n,k}$, $k \in \mathrm{N}$ и $n = 2, 3, \ldots$, — класс ограниченных измеримых $2\pi$-периодических функций, удовлетворяющих условиям

$$f(0) = 0, \quad f(-x) = f(x), \qquad \sup_{|x-x'| \le \pi/nk} |f(x) - f(x')| \le 1.$$

**Лемма 1.** *Имеют место соотношения*

$$\chi\left( L_{n-1}; \frac{\pi}{nk} \right) = \inf_{\left\{K_{n-1}(t) = 1 + 2\sum_{r=1}^{n-1} \lambda_r \cos rt\right\}} \sup_{f \in \overline{\Omega}_{n,k}} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} K_{n-1}(t) f(t) dt \right|. \tag{13}$$

***Доказательство.*** Для заданных $k \in \mathrm{N}$ и $n = 2, 3, \ldots$ построим равномерное разбиение отрезка $[0, \pi]$ точками $j\pi/nk$, $j = 0, 1, \ldots, nk$, и определим кусочно-постоянную функцию $\omega_{n,k}(h)$, $h \ge 0$, по этому разбиению условиями $\omega_{n,k}(0) = 0$, $\omega_{n,k}(h) = j$ при $h \in \left( (j-1)\frac{\pi}{nk}, j\frac{\pi}{nk} \right]$, $j = 1, \ldots, nk$, $\omega_{n,k}(h) = nk$ при $h \ge \pi$. Рассмотрим класс функций $\Omega_{n,k} := \left\{ f \in C_{2\pi} \colon \omega(f, h) \le \omega_{n,k}(h),\ h \ge 0 \right\}$. Очевидно, что для функций $f \in C_{2\pi}$ условия $\omega(f, \pi/nk) \le 1$ и $f \in \Omega_{n,k}$ эквивалентны. Поэтому

$$\chi\left( L_{n-1}; \frac{\pi}{nk} \right) = \inf_{A_{n-1} \in L_{n-1}} \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{\| f - A_{n-1} f \|}{\omega(f, \pi/nk)} =$$

$$= \inf_{A_{n-1} \in L_{n-1}} \sup_{\omega(f, \pi/nk) \le 1} \| f - A_{n-1} f \| = \inf_{A_{n-1} \in L_{n-1}} \sup_{f \in \Omega_{n,k}} \| f - A_{n-1} f \|. \tag{14}$$

Класс функций $\Omega_{n,k}$ является инвариантным относительно сдвига, поэтому нижнюю грань в (14) достаточно вычислить для операторов $\overline{A}_{n-1}$, перестановочных со сдвигами [7, с. 195], т. е. для операторов свертки с полиномиальным ядром

$$\overline{A}_{n-1}(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - x) K_{n-1}(t) dt,$$

где

$$K_{n-1}(t) = \lambda_0 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \lambda_r \cos rt + \mu_r \sin rt. \tag{15}$$

Ясно, что в (14) достаточно ограничиться операторами $\overline{A}_{n-1}$, точными на константах, поэтому в (15) $\lambda_0 = 1$.

Из инвариантности по сдвигу класса $\Omega_{n,k}$ и операторов $\overline{A}_{n-1}$ следует, что

$$\chi\left(L_{n-1};\frac{\pi}{nk}\right) = \inf_{\overline{A}_{n-1}} \sup_{f\in\Omega_{n,k}} \left|f(0)-\overline{A}_{n-1}(f,0)\right|, \tag{16}$$

а из точности $\overline{A}_{n-1}$ на константах — что в (16) без ограничения общности достаточно ограничиться функциями $f$ такими, что $f(0)=0$. Для такой функции $f$ из $\Omega_{n,k}$ ее четная часть $f_1(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ также принадлежит $\Omega_{n,k}$. Пусть $a_r(f)$ — косинус-коэффициенты Фурье $f$. Тогда

$$\sum_{r=1}^{n-1}\lambda_r a_r(f) = f(0)-\overline{A}_{n-1}(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{n-1}(t)f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} K_{n-1,1}(t)f_1(t)\,dt, \tag{17}$$

где $K_{n-1,1}(t)=1+2\sum_{r=1}^{n-1}\lambda_r\cos rt$.

Теперь видно, что экстремум интегрального функционала (17) реализуется для функций из класса $\overline{\Omega}_{n,k}$.

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Для всех* $k,n,j\in\mathrm{N}$ *справедливы соотношения*

$$\chi\left(L_{nj-1};\frac{\pi}{njk}\right) \ge \chi\left(L_{j-1};\frac{\pi}{jk}\right). \tag{18}$$

***Доказательство.*** Пусть $E$ — банахово пространство периодических четных и измеримых функций $f$, $f(0)=0$, с нормой

$$\|f\|_E = \sup_{x',x''}\frac{|f(x')-f(x'')|}{\omega_{j,k}(|x'-x''|)}.$$

Класс $\overline{\Omega}_{j,k}$ является единичным шаром в $E$. По теореме двойственности С. М. Никольского [8], если $F_0, F_1, \ldots, F_{j-1}$ — линейные функционалы на $E$ и

$$H_{j-1} = \left\{f\in E;\ F_r(f)=0,\ r=\overline{1,j-1}\right\},$$

то

$$\inf_{\lambda_r\in\mathrm{R}}\left\|F_0+\sum_{r=1}^{j-1}\lambda_r F_r\right\|_{E^*} = \sup\left\{F_0(f);\ \|f\|_E\le 1,\ f\in H_{j-1}\right\}. \tag{19}$$

Пусть $F_0(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$, $F_r(f)=a_r(f)$. Тогда из леммы 1 и (19) получаем соотношение двойственности для наилучших линейных приближений:

$$\chi\left(L_{j-1};\frac{\pi}{jk}\right) = \inf_{\lambda_r\in\mathrm{R}}\sup_{f\in\overline{\Omega}_{j,k}}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt+\sum_{r=1}^{j-1}\lambda_r a_r(f)\right| =$$

$$= \sup\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt;\ f\in\overline{\Omega}_{j,k},\ a_r(f)=0,\ r=\overline{1,j-1}\right\}. \qquad (20)$$

Пусть $G_f(x):=f(nx)$ для функции $f(x)$ из $\overline{\Omega}_{j,k}\cap H_{j-1}$. Тогда $a_r(G_f)=0$, $r = \overline{1,nj-1}$, и

$$\sup\left\{\left|G_f(x')-G_f(x'')\right|;\ |x'-x''|\le\frac{\pi}{njk}\right\} = \sup\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|;\ |x'-x''|\le\frac{\pi}{jk}\right\},$$

т. е. $G_f\in\overline{\Omega}_{nj,k}\cap H_{nj-1}$. Поэтому

$$\chi\left(L_{nj-1};\frac{\pi}{njk}\right) = \sup\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi G(t)\,dt;G\in\overline{\Omega}_{nj,k}\cap H_{nj-1}\right| \ge$$

$$\ge \sup\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi G_f(t)\,dt;\ f\in\overline{\Omega}_{j,k}\cap H_{j-1}\right| =$$

$$= \sup\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt;\ f\in\overline{\Omega}_{j,k}\cap H_{j-1}\right| = \chi\left(L_{j-1};\frac{\pi}{jk}\right).$$

Лемма 2 доказана.

В частности, при $j=2$

$$\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2nk}\right) \ge \chi\left(L_1;\frac{\pi}{nk}\right). \qquad (21)$$

Аналогичные (21) соотношения использовал В. В. Шалаев [9] для оценок снизу уклонений линейных методов для классов $H^\omega$.

**4. Доказательство основных результатов.** ***Доказательство теоремы* 2.** Из лемм 2, 1 следует, что

$$\chi\left(L_{2n-1};\frac{\pi}{2nk}\right) \ge \chi\left(L_1;\frac{\pi}{2k}\right) = \inf_{\lambda\in\mathrm{R}}\sup_{f\in\overline{\Omega}_{2,k}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi K_1(t)f(t)dt\right|, \qquad (22)$$

где $K_1(t)=1+2\lambda\cos t$.

Пусть $k=1$. Для произвольного значения параметра $\gamma\in[0,\pi/2)$ определим следующие функции $f_\gamma(x)$ и $g_\gamma(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,1}$:

$$f_\gamma(0)=0;\quad f_\gamma(x)=1,\ x\in(0,\pi-\gamma];\quad f_\gamma(x)=0,\ x\in[\pi-\gamma,\pi];\quad f_\gamma(-x)=f_\gamma(x);$$

$$f_\gamma(x+2\pi)=f_\gamma(x);$$

$$g_\gamma(x)=f_\gamma(x),\ |x|\le\frac{\pi}{2};\qquad g_\gamma(x)=f_\gamma(x)+1,\ |x|\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right);\qquad g_\gamma(\pi)=0;$$

$$g_\gamma(x+2\pi)=g_\gamma(x).$$

Эти функции используем для оценок снизу $\chi(L_1;\pi/2)$.

Если $\lambda\ge\pi/4$, то

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi K_1(t)f_\gamma(t)dt\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi(1+2\lambda\cos t)f_\gamma(t)dt\right| = 1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\sin\gamma \ge 1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma\,. \tag{23}$$

Если же $\lambda\in[0,\pi/4]$, то

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi K_1(t)g_\gamma(t)\,dt\right| = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi K_1(t)f_\gamma(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi K_1(t)\,dt =$$

$$=\left(1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\sin\gamma\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2\lambda}{\pi}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}(\sin\gamma-1)\ge\frac{3}{2}-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}(\sin\gamma-1)=1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma\,. \tag{24}$$

Если $\lambda<0$, то оценки снизу (23), (24) получим заменой функций $f_\gamma(x)$ и $g_\gamma(x)$ соответственно на функции $f_\gamma(\pi-x)$ и $g_\gamma(\pi-x)$, которые также принадлежат классу $\overline{\Omega}_{2,1}$.

Теперь из (22) – (24) следует необходимая оценка снизу

$$\chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right)\ge\max_{\gamma\in[0,\pi/2]}\left(1-\frac{\gamma}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma\right)=1-\frac{\gamma_1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\gamma_1\,,$$

где $\gamma_1=\arccos(2/\pi)$.

Для оценки сверху величины $\chi(L_1;\pi/2)$ рассмотрим линейный метод свертки с ядром $K_1(t)=1+\frac{\pi}{2}\cos t$. Это ядро совпадает с ядром $F_1$ метода Фавара (см. (7)). Поскольку $F_1(\pi-\gamma_1)=0$, то

$$\|F_1\|_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left|1+\frac{\pi}{2}\cos t\right|dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi-\gamma_1}\left(1+\frac{\pi}{2}\cos t\right)dt-\int_{\pi-\gamma_1}^{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\cos t\right)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\pi-\gamma_1+\frac{\pi}{2}\sin\gamma_1\right)-\left(\gamma_1-\frac{\pi}{2}\sin\gamma_1\right)\right)=1-\frac{2\gamma_1}{\pi}+\sin\gamma_1\,,$$

и по теореме 1

$$\chi\left( L_1; \frac{\pi}{2} \right) \le \chi\left( \theta_1; \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}\left(1 + \| F_1 \|_1 \right) = 1 - \frac{\gamma_1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\gamma_1 .$$

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Пусть $k = 2, 3, \ldots$. Для произвольного значения параметра $\gamma \in \left[ 0, \pi/2k \right)$ рассмотрим следующую кусочно-постоянную функцию $f_\gamma(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,k}$:

$$f_\gamma(0) = 0; \qquad f_\gamma(-x) = f_\gamma(x);$$

$$f_\gamma(x) = j \quad \text{для} \quad x \in \left( (j-1)\frac{\pi}{2k}, j\frac{\pi}{2k} \right], \qquad j = 1, \ldots, k;$$

$$f_\gamma(x) = k \quad \text{для} \quad x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k} - \gamma \right];$$

$$f_\gamma(x) = k - j \quad \text{для} \quad x \in \left( \frac{\pi}{2} + j\frac{\pi}{2k} - \gamma, \frac{\pi}{2} + (j+1)\frac{\pi}{2k} - \gamma \right], \qquad j = 1, \ldots, k-1;$$

$$f_\gamma(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in (\pi - \gamma, \pi]; \qquad f_\gamma(x + 2\pi) = f_\gamma(x).$$

Вычислим значение интеграла $\dfrac{1}{\pi}\left| \int_0^\pi (1 + 2\lambda\cos t) f_\gamma(t) dt \right|$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_\gamma(t)dt = \frac{1}{\pi} 2\sum_{j=1}^{k-1} j\frac{\pi}{2k} + \frac{1}{\pi} k\left( \frac{\pi}{2k} + \frac{\pi}{2k} - \gamma \right) = \frac{k+1}{2} - \frac{k\gamma}{\pi},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_\gamma(t)\cos t dt = -\sum_{j=1}^{k-1} \sin j\frac{\pi}{2k} + \sum_{j=1}^{k} \sin\left( \frac{\pi}{2} + j\frac{\pi}{2k} - \gamma \right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{k-1} \sin j\frac{\pi}{2k} + \sin\gamma + \sum_{j=1}^{k-1}\left( \cos j\frac{\pi}{2k}\cos\gamma + \sin j\frac{\pi}{2k}\sin\gamma \right).$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{k-1} \cos j\frac{\pi}{2k} = \sum_{j=1}^{k-1} \sin j\frac{\pi}{2k} = \frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\left( \cos\frac{\pi}{4k} - \sin\frac{\pi}{4k} \right),$$

то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f_\gamma(t)\cos t\, dt = \frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\left( \cos\frac{\pi}{4k} - \sin\frac{\pi}{4k} \right)(\cos\gamma + \sin\gamma - 1) + \sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\left( \cos\left( \frac{\pi}{4k} - \gamma \right) - \sin\left( \frac{\pi}{4k} - \gamma \right) - \left( \cos\frac{\pi}{4k} - \sin\frac{\pi}{4k} \right) \right) =: \frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\psi(\gamma).$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}(1+2\lambda\cos t)\,f_\gamma(t)dt\right| = \left|\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\psi(\gamma)\right|. \tag{25}$$

Пусть $\lambda \geq \dfrac{\pi}{4}$. Так как

$$\psi'(\gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right) \geq 0 \quad \text{для} \quad \gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2k}\right],$$

то $\psi(\gamma)\geq\psi(0)=0$ и

$$\left|\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\psi(\gamma)\right| \geq \frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma}{\pi}+\frac{1}{4\sin(\pi/4k)}\psi(\gamma) := \psi_1(\gamma). \tag{26}$$

Далее, поскольку

$$\psi_1''(\gamma) = \frac{1}{4\sin(\pi/4k)}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma\right)\right) < 0$$

для $\gamma\in(0,\pi/2k)$, $\psi_1(0)=\psi_1(\pi/2k)=(k+1)/2$, функция $\psi_1(\gamma)$ строго выпуклая вверх на $[0,\pi/2k]$ и имеет на этом отрезке единственный максимум в точке $\gamma_k$, определяемой условием $\psi_1{}'(\gamma_k)=0$, т. е. $\gamma_k$ — корень уравнения (12).

Из (25), (26) следует, что

$$\inf_{\lambda\geq\frac{\pi}{4}}\sup_{f\in\overline{\Omega}_{2,k}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}(1+2\lambda\cos t)\,f(t)dt\right| \geq \psi_1(\gamma_k)=\frac{k+1}{2}-\frac{k\gamma_k}{\pi}+$$

$$+\frac{1}{4\sin(\pi/4k)}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4k}-\gamma_k\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4k}-\sin\frac{\pi}{4k}\right)\right\}. \tag{27}$$

Заметим, что так как $\psi_1(\gamma)>\psi_1(0)=(k+1)/2$, то значение правой части неравенства (27) строго больше $(k+1)/2$.

Пусть $\lambda\in[0,\pi/4]$. Теперь для оценки снизу используем функции $g_\gamma(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,k}$:

$$g_\gamma(x) = f_\gamma(x) \quad \text{для} \quad |x|\leq\frac{\pi}{2}; \qquad g_\gamma(x) = f_\gamma(x)+1 \quad \text{для} \quad |x|\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right);$$

$$g_\gamma(\pi) = 0; \qquad g_\gamma(x+2\pi) = g_\gamma(x).$$

Тогда (см. (25))

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}(1+2\lambda\cos t)\,g_\gamma(t)dt\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}(1+2\lambda\cos t)\,f_\gamma(t)dt+\int_{\pi/2}^{\pi}(1+2\lambda\cos t)\,dt\right| =$$

$$= \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k\gamma}{\pi} + \frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\psi(\gamma)\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{\pi}\right) =$$

$$= \frac{k}{2} + 1 - \frac{k\gamma}{\pi} + \frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma\right) - \cos\frac{\pi}{4k} - \sin\frac{\pi}{4k}\right\} =:$$

$$=: \frac{k}{2} + 1 - \frac{k\gamma}{\pi} + \frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\psi_2(\gamma). \qquad (28)$$

Поскольку $\psi_2'(\gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4k} - \gamma\right) > 0$, то $\psi_2(\gamma) \le \psi_2\left(\frac{\pi}{2k}\right) = 0$, и при $\lambda \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (см. (26))

$$\frac{k}{2} + 1 - \frac{k\gamma}{\pi} + \frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{2\sin(\pi/4k)}\psi_2(\gamma) \ge$$

$$\ge \frac{k}{2} + 1 - \frac{k\gamma}{\pi} + \frac{1}{4\sin(\pi/4k)}\psi_2(\gamma) = \psi_1(\gamma) \ge \psi_1(\gamma_k). \qquad (29)$$

Из (28), (29) следует, что оценка снизу (27) справедлива для всех $\lambda \ge 0$. Если $\lambda < 0$, то такую же оценку получим, если вместо функций $f_\gamma(x)$ и $g_\gamma(x)$ использовать функции $f_\gamma(\pi - x)$ и $g_\gamma(\pi - x)$.

Теперь из (22) получаем утверждение теоремы 3.

**5. Дополнения к теореме 2.** 1. Так как $\gamma_1 = \arccos\frac{1}{\pi} = 0{,}8806892354\ldots$, то

$$\chi\left(L_1; \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\gamma_1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\gamma_1 = 1{,}105256831\ldots.$$

2. Приведем еще другое доказательство теоремы 2, основанное на соотношении двойственности (20) (при $j = 2$ и $k = 1$).

Рассмотрим следующую функцию $h(x)$ из $\overline{\Omega}_{2,1}$:

$$h(0) = 0; \quad h(x) = 1, \quad |x| \in (0, \pi/2]; \quad h(x) = 1 + \sin\gamma_1, \quad |x| \in (\pi/2, \pi - \gamma_1];$$

$$h(x) = \sin\gamma_1, \quad |x| \in (\pi - \gamma_1, \pi); \quad h(\pi) = 0; \quad h(x + 2\pi) = h(x),$$

где $\gamma_1$ из $(0, \pi/2)$ такое, что $\cos\gamma_1 = 2/\pi$.

Тогда $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(x)\cos x\,dx = 0$ и

$$\chi\left(L_1; \frac{\pi}{2}\right) \ge \frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(x)\,dx = 1 - \frac{\gamma_1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\gamma_1.$$

Это доказательство проще первоначального, но из него не видно экстремального свойства ядра

$$K_1(t) = 1 + \frac{\pi}{2}\cos t\,.$$

В заключение докажем двусторонние оценки для константы $\chi\left(L_2; \frac{\pi}{3}\right)$.

**Лемма 3.** *Имеют место неравенства*

$$1{,}110042 < \chi\left(L_2; \frac{\pi}{3}\right) < 1{,}125681\,. \tag{30}$$

***Доказательство.*** Оценка сверху следует из теоремы 1: так как $\|F_2\|_1 < 1{,}251361$ (вычисления в программе Maple), то

$$\chi\left(L_2; \frac{\pi}{3}\right) \le \chi\left(\theta_2; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+\|F_2\|_1}{2} < 1{,}125681\,.$$

Для оценки снизу с помощью параметров $\xi_1$, $\xi_2$, $\beta_1$, $\beta_2$,

$$\xi_1 \in (\pi/3, \pi/2], \quad \xi_2 \in [2\pi/3, \pi), \quad \beta_1 \in (1, 2], \quad \beta_2 - \beta_1 \in (0, 1], \tag{31}$$

определим функции $h(x)$ из класса $\overline{\Omega}_{2,1}$:

$$h(0) = 0; \quad h(x) = 1, \quad |x| \in (0, \pi/3]; \quad h(x) = 1 + \beta_1, \quad |x| \in (\pi/3, \xi_1];$$

$$h(x) = \beta_1, \quad |x| \in (\xi_1, \xi_2]; \quad h(x) = \beta_2; \quad |x| \in (\xi_2, \pi]; \quad h(x + 2\pi) = h(x)\,.$$

Пусть $a_1(h) = a_2(h) = 0$. Тогда

$$\beta_2 - \beta_1 = \frac{\sin\xi_1}{1 - 2\cos\xi_2}\,\frac{1 - 2\cos\xi_1}{\sin\xi_2}, \quad \beta_1 = \frac{\sin\xi_1}{1 - 2\cos\xi_2}\,\frac{2}{\sin(\pi/3)}(\cos\xi_1 - \cos\xi_2), \tag{32}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h(x)dx = \frac{\xi_1}{\pi} + \frac{\sin\xi_1}{1 - 2\cos\xi_2}\left(\frac{1 - 2\cos\xi_1}{\sin\xi_2}\left(1 - \frac{\xi_2}{\pi}\right) + \frac{4}{3\sin(\pi/3)}(\cos\xi_1 - \cos\xi_2)\right) =:$$

$$=: \varphi(\xi_1, \xi_2)$$

и из соотношений двойственности (20) следует, что $\chi\left(L_2; \frac{\pi}{3}\right) \ge \sup\varphi(\xi_1, \xi_2)$, где верхняя грань вычисляется при ограничениях (31), (32). Оценку снизу этой верхней грани получим, положив $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\xi_2 = \frac{5}{6}\pi$. Тогда

$$\beta_1 = \beta_2 - \beta_1 = \sqrt{3} - 1\,,$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2},\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}+\frac{5}{6}\left(\sqrt{3}-1\right) = 1{,}11004234\ldots .$$

Из (10) и (18) при $j=3$, $k=1$ получаем следующее дополнение к оценкам снизу в теореме 2:

$$\chi\left(L_{6n+r};\frac{\pi}{6n+r+1}\right) \geq \chi\left(L_1;\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}105256\ldots \quad \text{при} \quad r=1,\,3,$$

$$\chi\left(L_{6n+r};\frac{\pi}{6n+r+1}\right) \geq \chi\left(L_2;\frac{\pi}{3}\right) > 1{,}110042 \quad \text{при} \quad r=2,\,5.$$


1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 514 – 515.
3. *Корнейчук Н. П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки. – 1982. – **32**, № 5. – С. 669 – 674.
4. *Шалаев В. В.* Некоторые точные оценки приближения функций линейными полиномиальными методами: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 1980.
5. *Стечкин С. Б.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фавара // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **119**. – С. 26 – 34.
6. *Корнейчук Н. П.* Об оценке приближений функций класса $H^{\alpha}$ тригонометрическими многочленами // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – 1961. – **1**. – С. 148 – 154.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 624 с.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – С. 207 – 256.
9. *Шалаев В. В.* О погрешности наилучшего на классе $H^{\omega}$ периодических функций линейного полиномиального метода. – Днепропетровск, 1980. – 17 с. – Деп. в Укр НИИИТИ.


Получено 20.12.11