УДК 517.5

А. С. Романюк, В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ НИКОЛЬСКОГО – БЕСОВА

We obtain exact-order estimates for the best bilinear approximations of Nikol'skii – Besov classes in the spaces of functions $L_q(\pi_{2d})$.

Знайдено точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського – Бєсова у функціональних просторах $L_q(\pi_{2d})$.

В работе исследуются приближения функций $2d$ переменных, принадлежащих классам Никольского – Бесова $B^r_{p,\theta}$, линейными комбинациями произведений функций d переменных. Такого вида приближения называют билинейными, и наряду с классическими методами приближения с помощью алгебраических или тригонометрических полиномов они занимают важное место в теории аппроксимации. Об этом подробнее будет идти речь в следующем пункте.

Приведем сначала определения рассматриваемых классов функций и исследуемой аппроксимативной характеристики.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d-мерное евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots \ldots, x_d)$, а $L_p(\pi_d)$ — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций f, для которых

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Здесь $\pi_d := \prod_{i=1}^d [0; 2\pi)$.

Определим кратную разность порядка $k \in \mathbb{N}$ функции f в точке x с шагом $h \in \mathbb{R}^d$ индуктивно по формулам

$$\Delta_h f(x) = \Delta_h^1 f(x) := f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x)), \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Положим также $\Delta_h^0 f(x) := f(x)$.

Пусть далее

$$\omega_k(f;t)_p := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^k f\|_p,$$

где $|h| = \left(\sum_{i=1}^d h_i^2 \right)^{1/2}$ — модуль непрерывности k-го порядка функции $f \in L_p(\pi_d)$.

Будем говорить, что функция $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, принадлежит пространству $B^r_{p,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r > 0$, если

$$\left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \le \theta < \infty$$

и

$$\sup_{t>0} \omega_k(f;t)_p t^{-r} < \infty \quad \text{при} \quad \theta = \infty.$$

При этом предполагается, что $k > r$.

Норму на линейных пространствах $B^r_{p,\theta}$ определим по формулам

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \omega_k(f,t)_p t^{-r}.$$

Пространства $B^{\,r}_{p,\,\theta}$ введены О. В. Бесовым [1] и при этом $B^{\,r}_{p,\,\infty} = H^{\,r}_p$, где $H^{\,r}_p$ — пространства, введенные С. М. Никольским [2]. Известно, что при $1 \le \theta \le \theta' < \infty$ $B^{\,r}_{p,\,\theta} \hookrightarrow B^{\,r}_{p,\,\theta'}$, т. е., как для функциональных множеств, справедливо вложение $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{p,\theta'}$ и $\|f\|_{B^r_{p,\theta'}} \le C\|f\|_{B^r_{p,\theta}}$, $f \in B^r_{p,\theta}$, $C > 0$.

В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться эквивалентным определением нормы функций из пространств $B^{\,r}_{p,\,\theta}$ и H^r_p.

Пусть $V_l(u)$, $l \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_l(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos ku + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1} \frac{2l-k}{l} \cos ku$$

(при $l = 1$ вторую сумму полагаем равной нулю).

Многомерное ядро $V_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \ge 2$, определим по формуле

$$V_l(x) = \prod_{j=1}^{d} V_l(x_j).$$

На множестве $L_p(\pi_d)$ определим оператор свертки $\mathbf{V}_l\colon L_p(\pi_d) \longrightarrow L_1(\pi_d)$, действующий по формуле

$$\mathbf{V}_l f(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(y) V_l(x-y)dy.$$

Таким образом, с помощью оператора $\mathbf{V}_l$ определяются кратные средние Валле Пуссена функции $f \in L_p(\pi_d)$

$$V_l(f;x) := \mathbf{V}_l f(x),$$

которые естественным образом можно записать и в виде тригонометрического полинома, возникающего из разложения функции f в ряд Фурье по тригонометрической системе.

Далее для функции $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, положим

$$\sigma_0(f;x) := V_1(f,x), \qquad \sigma_s(f;x) := V_{2^s}(f;x) - V_{2^{s-1}}(f;x), \quad s = 1, 2, \ldots .$$

В принятых обозначениях для нормы $\|f\|_{B^r_{p,\theta}}$ имеют место соотношения (см., например, [3])

$$||f||_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \, ||\sigma_s(f;\cdot)||_p^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{2}$$

$$||f||_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{s\,r} \, ||\sigma_s(f;\cdot)||_p.$$

Здесь и далее для выражений A и B соотношение $A \asymp B$ означает, что существуют такие постоянные C_1 и C_2, $C_1 > C_2 > 0$, для которых $C_2B \le A \le C_1B$. Если же только $C_2B \le A$ $(A \le C_1B)$, то пишем $A \gg B$ $(A \ll B)$. Заметим также, что константы C_1 и C_2 в порядковых соотношениях, как правило, разные в разных местах текста. Зависимость этих констант от параметров не будет оговариваться каждый раз, а будет очевидна из контекста.

Пусть $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ — множество функций $f(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}^d$, 2π-периодических по каждой из $2d$ переменных с конечной смешанной нормой

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} := \Big\| \|f(\cdot,y)\|_{q_1} \Big\|_{q_2},$$

где справа норма функции $f(x,y)$ вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$, как от функции переменной $x \in \mathbb{R}^d$ (при фиксированном $y \in \mathbb{R}^d$), а затем от полученного результата, как от функции переменной $y \in \mathbb{R}^d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$.

Для $f \in L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ определим величину наилучшего билинейного приближения порядка M $(M \in \mathbb{N})$ согласно формуле

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(x),v_j(y)} \left\| f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)v_j(y) \right\|_{q_1,q_2}, \tag{3}$$

где $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$, $j = \overline{1,M}$. При $M = 0$ будем считать, что $\tau_0(f(x,y))_{q_1,q_2} :=$ $:= \|f(x,y)\|_{q_1,q_2}$.

Если $F \subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ — класс функций, то полагаем

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f\in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{4}$$

В завершение этого пункта отметим, что всюду ниже символом $B^r_{p,\theta}$ обозначается не все пространство $B^r_{p,\theta}$, а единичный шар этого пространства, т. е. множество функций $f \in B^r_{p,\theta}$, для которых $\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 1$.

1. Исторические сведения. По-видимому, первый результат о наилучших билинейных приближениях был получен Е. Шмидтом [4] еще в 1907 г. при исследовании интегральных уравнений. При этом выяснилось, что приближение функций $f(x,y)$ двух переменных, определенных на квадрате $[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$, билинейными формами в пространстве $L_{2,2}([0,1]^2)$ тесно связано со свойствами интегральных операторов

$$J_f(g) = \int_0^1 f(x,y)g(y)dy$$

с ядром $f(x,y)$. Точнее, в [4] было получено разложение (известное как разложение Е. Шмидта)

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y),$$

где $\{s_j(J_f)\}_{j=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность (перестановка) сингулярных чисел оператора J_f, т. е. $s_j(J_f)=\lambda_j(J_f^*J_f)$, $\{\lambda_j(T)\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность собственных чисел оператора T, J_f^* — оператор, сопряженный оператору J_f и, наконец, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированные системы собственных функций операторов $J_fJ_f^*$ и $J_f^*J_f$ соответственно.

Кроме того, Е. Шмидтом было доказано равенство

$$\left\|f(x,y)-\sum_{j=1}^{M}s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y)\right\|_{2,2}=\inf_{u_j,v_j\in L_2([0,1])}\left\|f(x,y)-\sum_{j=1}^{M}u_j(x)v_j(y)\right\|_{2,2},$$

в котором проявляется связь между величинами $\tau_M(f)_{2,2}$ и сингулярными числами $s_j(J_f)$ оператора J_f. Впоследствии эта связь была использована для получения оценок сингулярных чисел интегральных операторов в работе М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка [5] и установления оценок величин $\tau_M(f)_{2,2}$ в работе Н. В. Мирошина, В. В. Хромова [6]. Затем Р. С. Исмагилов [7] обнаружил связь между величинами $\tau_M(f(x-y))_{2,\infty}$ и поперечниками по Колмогорову класса F, которому принадлежит функция $f(x)$. Отметим также, что Ч. Мичелли и А. Пинкус [8], исследовав билинейные приближения некоторых функций двух переменных, заданных на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, применили полученные результаты для нахождения точных значений поперечников классов дифференцируемых функций. С более полной библиографией по указанным вопросам можно ознакомиться в работе Е. М. Чини [9].

Исследованию величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для некоторых классов периодических функций многих переменных посвящены работы В. Н. Темлякова [10 – 14], А. С. Романюка [15] и А. С. Романюка, В. С. Романюка [16], в которых содержится соответствующая библиография по этим направлениям. Отметим еще работы М.-Б. А. Бабаева [17, 18], в которых рассматриваются вопросы билинейных приближений непериодических функций.

Целью настоящей работы является получение точных по порядку оценок величин $\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ при условии $q_1=q_2=q$. Отметим, что в таком случае, согласно определениям, $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})\equiv L_q(\pi_{2d})$ и $\|f(x,y)\|_{q_1,q_2}=\|f(x,y)\|_q$ для $f\in L_q(\pi_{2d})$. Поэтому условимся писать $\tau_M(B^r_{p,\theta})_q$ вместо $\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q,q}$.

2. Порядковые оценки величин наилучших билинейных приближений классов $B^r_{p,\theta}$. Прежде чем сформулировать основной результат приведем два известных утверждения, систематически используемые в доказательстве.

Определим следующие множества:

$$C^d(N):=\{k=(k_1,\ldots,k_d),\ \ k_j\in\mathbb{Z},\ \ |k_j|\le N,\ \ j=\overline{1,d}\},\quad N=1,2,\ldots,$$

$$T(C^d(N)):=\left\{f\colon f(x)=\sum_{k\in C^d(N)}c_ke^{i(k,x)},\ \ c_k\in\mathbb{C},\ \ x=(x_1,\ldots,x_d)\right\}$$

и для $1\le q\le\infty$

$$T(C^d(N))_q:=\{f\in T(C^d(N))\colon\ \|f\|_q\le 1\}.$$

Теорема A. *Пусть* $t \in T(C^d(2^n))$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $1 \le q < p \le \infty$ *имеет место неравенство*

$$\|t\|_p \le 2^d \cdot 2^{nd(1/q-1/p)} \|t\|_q. \tag{5}$$

Неравенство (5) установлено С. М. Никольским [2] и называется „*неравенством разных метрик*”.

Следующее утверждение касается оценок колмогоровских поперечников классов $T(C^d(N))_2$ в пространстве $L_\infty(\pi_d)$.

Напомним определение колмогоровского поперечника. Пусть Φ — центрально-симметричное множество банахова пространства $\mathcal{X}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{L}_M$ — совокупность всевозможных подпространств L_M в $\mathcal{X}$ размерности, не превышающей M ($\dim L_M \le M$).

Величина

$$d_M(\Phi; \mathcal{X}) := \inf_{L_M \subset \mathcal{L}_M} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in L_M} \|f - u\|_{\mathcal{X}}$$

называется M-мерным колмогоровским поперечником множества Φ в пространстве $\mathcal{X}$.

Лемма A [11]. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$d_M(T(C^d(2^n))_2, L_\infty(\pi_d)) \ll M^{-1/2} 2^{nd/2} \left(\log \left(1 + \frac{2^{nd}}{M} \right) \right)^{1/2}.$$

Теперь перейдем к формулировке и доказательству основного результата.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$. *Имеют место соотношения*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} M^{-r/d+1/p-1/q}, & 1 \le p \le q \le 2, \quad r > 2d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right), \\ M^{-r/d}, & 2 \le p \le q \le \infty, \quad r > d, \\ & \text{или} \;\; 2 \le q \le p \le \infty, \quad r > 0, \\ M^{-r/d+1/p-1/2}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty, \quad r > \dfrac{2d}{p}. \end{cases}$$

Доказательство. Установим сначала оценки сверху. Заметим, что при этом достаточно установить требуемые оценки сверху в случае $\theta = \infty$, т. е. для величин $\tau_M(H^r_p)_q$.

Итак, пусть задана функция $f(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_{2d}) \in \mathbb{R}^{2d}$ и $f \in H^r_p$. Определим полиномы

$$A_n(f; z) := f(t) * (V_{2^n}(t) - V_{2^{n-1}}(t)), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_o(f; z) = f(t) * V_1(t).$$

Здесь $z = (z_1, \ldots, z_{2d}) \in \mathbb{R}^{2d}$.

В силу сходимости при $n \longrightarrow \infty$ средних Валле Пуссена к функции f в пространстве $L_p(\pi_{2d})$, функция $f \in H^r_p$ представима в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f; z) \tag{6}$$

в смысле сходимости ряда в $L_p(\pi_{2d})$.

Известно также, что для $f \in H^r_p$, $1 \le p \le \infty$,

$$\|A_n(f;\cdot)\|_p \ll 2^{-rn}. \tag{7}$$

Рассмотрим случаи: $1 \le p = q \le 2$, $r > 0$ и $2 \le q \le p$, $r > 0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$. В качестве приближающей функции для f рассмотрим функцию

$$g_1(z) = f(t) * V_{2^{m-1}}(t) = \sum_{n=0}^{m-1} A_n(f;z). \tag{8}$$

Тогда согласно определению ядра $V_{2^{m-1}}(t)$ можем записать

$$g_1(z) = g_1(x,y) = \sum_{k \in C^d(2^m-1)} c_k(y) e^{i(k,x)} = \sum_{j=0}^{M_1} u_j(x) v_j(y), \tag{9}$$

где $x = (z_1, \ldots, z_d)$, $y = (z_{d+1}, \ldots, z_{2d})$, $M_1 = (2^{m+1}-1)^d \asymp 2^{md}$ и $c_k, u_j, v_j \in L_q(\pi_d)$.

Исходя из представления (9) и принимая во внимание (6) – (8), получаем

$$\tau_{M_1}(f)_q \le \|f - g_1\|_q = \left\| \sum_{n=m}^{\infty} A_n(f;\cdot) \right\|_q \le \sum_{n=m}^{\infty} \left\| A_n(f;\cdot) \right\|_q \ll \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-rn} \ll 2^{-rm} \asymp M_1^{-r/d}.$$

Отсюда очевидным образом следует оценка $\tau_M(f)_q \ll M^{-r/d}$ при любом $M \in \mathbb{N}$, которая влечет оценку сверху величины $\tau_M(B^r_{p,\theta})_q$ в случаях $1 \le p = q \le 2$, $r > 0$ и $2 \le q \le p \le \infty$, $r > 0$.

При установлении оценок сверху для остальных соотношений между параметрами p, q, охватываемых теоремой 1, за исходные возьмем соотношения (6) и (8), из которых следует представление произвольной функции $f \in L_q(\pi_{2d})$, $1 \le q \le \infty$, в виде

$$f(z) = g_1(z) + \sum_{n=m}^{\infty} A_n(f;z) \tag{10}$$

при любых $m = 2, 3, \ldots$.

Тогда если $M \in \mathbb{N}$ — произвольное заданное число ($M > 2^{(m+1)d}$) и последовательность $\{M_n\}_{n=2}^{\infty}$ натуральных чисел такова, что $M_1 + \sum_{n=m}^{\infty} M_n \le M$, то

$$\tau_M(f)_q \le \sum_{n=m}^{\infty} \tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_q. \tag{11}$$

Приняв во внимание соотношение (11), по заданной последовательности $\{M_n\}_{n=2}^{\infty}$ построим вначале функции вида

$$g_n(z) = g_n(x,y) = \sum_{j=1}^{M_n} u_j^n(x) v_j^n(y), \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

с $u_j^n, v_j^n \in L_q(\pi_d)$, $j = 1, \ldots, M_n$, надлежащим образом приближающие в $L_q(\pi_{2d})$ функции $A_n(f;\cdot)$, $f \in L_p(\pi_{2d})$ при $1 \le p \le q \le \infty$.

Для $n \ge 2$ представим полином $A_n(f;z)$ в виде

$$A_n(f;z) = 2^{-2d(n+3)} \sum_{\mu,\nu} A_n(f; x^\mu, y^\nu) V_{2^{n+1}}(x - x^\mu,\, y - y^\nu),$$

где

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d), \qquad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d),$$

$$x_j^\mu = \frac{\mu_j \pi}{2^{n+2}}, \qquad \mu_j = 0, 1, \ldots, 2^{n+3} - 1, \quad j = \overline{1, d},$$

$$y_j^\nu = \frac{\nu_j \pi}{2^{n+2}}, \qquad \nu_j = 0, 1, \ldots, 2^{n+3} - 1, \quad j = \overline{1, d}.$$

Пусть B_n обозначает множество, состоящее из M_n точек (x^μ, y^ν) с наибольшими числами $\left|A_n(f; x^\mu, y^\nu)\right|$. Положим

$$g_n(x, y) := 2^{-2d(n+3)} \sum_{\mu, \nu : (x^\mu, y^\nu) \in B_n} A_n(f; x^\mu, y^\nu) V_{2^{n+1}}(x - x^\mu, y - y^\nu). \tag{13}$$

Очевидно, что функции, определяемые равенством (13), представляются (так же, как и функция $g_1(x, y)$) в виде (12), и согласно оценке, полученной в [10], для любой функции $f \in L_p(\pi_{2d})$ при $1 \le p \le q \le \infty$ и $n \ge 2$ можем записать

$$\|A_n(f; \cdot) - g_n(\cdot)\|_q \ll \min\{M_n^{-\beta}; 1\} 2^{2nd\beta} \|A_n(f; \cdot)\|_p, \quad \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \tag{14}$$

Докажем вспомогательное утверждение, на котором базируются промежуточные оценки величин $\tau_M(H_p^r)$.

Лемма 1. *Пусть* $f \in T(C^{2d}(2^n))$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\tau_M(f)_\infty \ll M^{-1} 2^{nd} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M}\right) \|f\|_2. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $2 \le M \le \dim T(C^d(2^n)) = (2^{n+1} + 1)^d$ и $\overline{M} := \left[\dfrac{M}{2}\right]$, где $[c]$ — целая часть числа $c \in \mathbb{R}$. Поскольку функция $f(z) = f(x, y)$, $x = (z_1, \ldots, z_d)$, $y = (z_{d+1}, \ldots, z_{2d})$, при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}^d$ принадлежит множеству $T(C^d(2^n))$, при любых заданных $v_j \in L_\infty(\pi_d)$ найдутся функции $u_j(x)$, $j = \overline{1, \overline{M}}$ ($u_j \in L_\infty(\pi_d)$), такие, что при каждом $y \in \mathbb{R}^d$ справедлива оценка

$$\left\| f(\cdot, y) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(\cdot) v_j(y) \right\|_\infty \ll d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \|f(\cdot, y)\|_2. \tag{16}$$

Положим

$$\psi(x, y) = f(x, y) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(x) v_j(y).$$

Тогда из (16) имеем

$$\left\| \|\psi(\cdot, y)\|_\infty \right\|_2 \ll d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2, L_\infty(\pi_d)) \|f\|_2. \tag{17}$$

Пусть $\overline{\psi}(x, y)$ обозначает ортогональную проекцию функции $\psi(x, y)$, как функции от y, на $T(C^d(2^n))$. Тогда

$$\overline{\psi}(x, y) = f(x, y) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(x) \overline{v}_j(y), \tag{18}$$

где $\overline{v}_j(y)$ — ортогональная проекция функции $v_j \in L_\infty(\pi_d)$ на $T(C^d(2^n))$.

Понятно, что

$$\|\overline{\psi}(x,\cdot)\|_2 \le \|\psi(x,\cdot)\|_2. \tag{19}$$

Поскольку при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^d$ функция $\overline{\psi}(x,y)$ принадлежит множеству $T(C^d(2^n))$, при любых заданных $u_j \in L_\infty(\pi_d)$, $j = \overline{M}+1,\ldots,M$, найдутся функции $v_j(y)$, $j = \overline{M}+1,\ldots,M$ $(v_j \in L_\infty(\pi_d))$, такие, что при каждом $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left\|\overline{\psi}(x,\cdot) - \sum_{j=\overline{M}+1}^{M} u_j(x)v_j(\cdot)\right\|_\infty \ll d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d))\|\overline{\psi}(x,\cdot)\|_2. \tag{20}$$

Исходя из определения $\tau_M(f)_\infty$ и принимая во внимание (18)–(20), находим

$$\tau_M(f)_\infty \le \left\| \|f(x,\cdot) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(x)\overline{v}_j(\cdot) - \sum_{j=\overline{M}+1}^{M} u_j(x)v_j(\cdot)\|_\infty \right\|_\infty \le$$

$$\le d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \big\| \|\psi(x,\cdot)\|_2 \big\|_\infty \le$$

$$\le d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \big\| \|\psi(\cdot,y)\|_\infty \big\|_2.$$

Далее, воспользовавшись оценкой (17) для второго сомножителя и применив лемму А, получим

$$\tau_M(f)_\infty \ll \left(d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d))\right)^2 \|f\|_2 \ll M^{-1}2^{nd}\log\left(1+\frac{2^{nd}}{M}\right)\|f\|_2.$$

Лемма доказана.

Перейдем к установлению оценок сверху в теореме 1 для величин $\tau_M(B^r_{p,\theta})_q$ в случае $2 \le p \le q \le \infty$, $r > d$. Очевидно, что искомую оценку достаточно установить для $p = 2$ и, согласно отмеченному ранее, для значения $\theta = \infty$, т. е. для классов H^r_2.

Итак, пусть $f \in H^r_2$ и $m \in \mathbb{N}$. Отправляясь от соотношения (11), полагаем в нем

$$M_1 = (2^{m+1}-1)^d \asymp 2^{md},$$

$$M_n = [M_1 2^{-\alpha(n-m)}], \quad n \ge m,$$

где $\alpha > 0$ — пока произвольное число. Пусть $M = C(\alpha)2^{md}$, где $C(\alpha) > 0$ достаточно большое. Тогда $M_0 := M_1 + \sum_{n=m}^{\infty} M_n < M$ и $M_0 \asymp 2^{md}$. Очевидно, существует $n_0 = n_0(\alpha) = [\lambda m]+1$, $\lambda > 1$, такое, что $M_n \ge 1$ при $m \le n \le n_0$ и $M_n = 0$ при $n > n_0$.

Далее, согласно лемме 1,

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll M_n^{-1}\, 2^{nd}\log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right)\|A_n(f;\cdot)\|_2, \quad n \le n_0,$$

откуда с учетом неравенства (7), а затем теоремы А получаем

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll M_n^{-1}\, 2^{-n(r-d)}\log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right)$$

и

$$\tau_M(f)_q \le \tau_M(f)_\infty \le \sum_{n=m}^{\infty} \tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll$$

$$\ll M_1^{-1} 2^{-\alpha m} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{-n(r-d-\alpha)} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n(r-d)}. \tag{21}$$

Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $r - d - \alpha > 0$ (это возможно, так как в рассматриваемом случае $r > d$). Тогда из (21) находим

$$\tau_M(f)_q \ll M_1^{-1} 2^{-\alpha m} 2^{-m(r-d-\alpha)} + 2^{-n_0(r-d)} \asymp 2^{-mr} \asymp M^{-r/d},$$

откуда получаем

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \ll M^{-r/d}$$

при $2 \le p \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $r > d$.

В случае $1 \le p < q \le 2$, $r > 2d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$ из соотношения (11), учитывая (14), для $f \in H^r_p$ при определенных выше n, n_0, m и $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ получаем

$$\tau_M(f)_q \le \sum_{n=m}^{n_0} \|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_q + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A_n(f;\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{-\beta} 2^{2nd\beta} \|A_n(f;\cdot)\|_p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A_n(f;\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{-\beta} 2^{2nd\beta} \cdot 2^{-rn} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{2nd(1/p-1/q)} 2^{-rn} \ll$$

$$\ll M_1^{-\beta} 2^{-\alpha\beta m} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{-n(r-\beta(2d+\alpha))} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n\left(r-2d(1/p-1/q)\right)}.$$

Выбирая $\alpha > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $r - \beta(2d + \alpha) > 0$, из предыдущего соотношения находим

$$\tau_M(f)_q \ll M_1^{-\beta} 2^{-\alpha\beta m} 2^{-m(r-\beta(2d+\alpha))} + 2^{-rm} \asymp 2^{-mr+md\beta} \asymp M^{-r/d+1/p-1/q}.$$

Отсюда получаем

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \ll M^{-r/d+1/p-1/q}.$$

Для завершения установления оценок сверху в теореме 1 осталось рассмотреть случай $1 \le p < 2 < q \le \infty$, $r > \dfrac{2d}{p}$. Как и в предыдущем случае, достаточно ограничиться определенными значениями параметров θ и q, а именно, $\theta = \infty$ и $q = \infty$.

Для оценки сверху величины $\tau_M(H^r_p)_\infty$, $1 \le p < 2$, $r > \dfrac{2d}{p}$, отправным является снова соотношение (11) со значениями m, M, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, установленными при рассмотрении предыдущих случаев.

Пусть $f \in H^r_p$ и $g_n(z) = g_n(x,y)$ — функции, определенные по формуле (13). Согласно лемме 1

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot))_\infty \ll M_n^{-1} 2^{nd} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right) \big\|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\big\|_2, \tag{22}$$

а в силу неравенства (14) с учетом (7)

$$\big\|A_n(f;\cdot)-g_n(\cdot)\big\|_2 \ll M_n^{-\gamma}\, 2^{2nd\gamma}\, \|A_n(f;\cdot)\|_p \ll M_n^{-\gamma} 2^{2nd\gamma-nr}, \tag{23}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}$.

Сопоставив (22) и (23), получим

$$\tau_{2M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll M_n^{-1-\gamma} 2^{-n(r-2d\gamma-d)} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right). \tag{24}$$

Такая же оценка, очевидно, сохраняется и для $\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty$. Приняв во внимание это обстоятельство и подставив в (11) вместо $\tau_M(A_n(f;\cdot))_\infty$ правую часть (24), а также воспользовавшись теоремой A, будем иметь

$$\tau_M(f)_\infty \ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{1-\gamma} 2^{-n(r-2d\gamma-d)} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{2nd\cdot\frac{1}{p}} 2^{-nr} \ll$$

$$\ll M_1^{-1/2-1/p} 2^{-\alpha m(1/2+1/p)} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{\alpha n(1/2+1/p)+nd+2nd(1/p-1/2)-nr} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right) + 2^{-n_0(r-2d/p)} \asymp$$

$$\asymp M^{-1/2-1/p} 2^{-\alpha m(1/2+1/p)} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{-n(r-2d/p-\alpha(1/2+1/p))} \log\left(1+\frac{2^{nd}}{M_n}\right) + 2^{-n_0(r-2d/p)}. \tag{25}$$

Выбирая $\alpha>0$ так, чтобы выполнялось неравенство $r-\dfrac{2d}{p}-\alpha\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{p}\right)>0$ $\Bigg($напомним, что по условию $r>\dfrac{2d}{p}\Bigg)$, из (25) находим

$$\tau_M(f)_\infty \ll M^{-1/2-1/p} 2^{-\alpha m(1/2+1/p)} 2^{-m(r-2d/p-\alpha(1/2+1/p))} + 2^{-mr} \asymp$$

$$\asymp M^{-1/2-1/p} 2^{-m(r-2d/p)} + M^{-r/d} \asymp M^{-r/d+1/p-1/2}. \tag{26}$$

Соотношение (26) влечет оценку

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \ll M^{-r/d+1/p-1/2}$$

при $1\le p<2<q\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$ и $r>\dfrac{2d}{p}$.

Оценки сверху в теореме 1 установлены.

Для доказательства соответствующих оценок снизу используем экстремальные функции, принадлежащие классам $B^r_{p,\theta}$, билинейные приближения которых совпадают по порядку с указанными в теореме 1 оценками.

Ограничимся поиском таких функций на множестве функций $2d$ переменных $\varphi(x,y)$ вида $\varphi(x,y)=f(x-y)$, где f, как функция d переменных, принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$ при $\theta=1$ (и такая, что $\varphi(x,y)$, как функция $2d$ переменных, принадлежит $B^r_{p,1}$).

Сформулируем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма Б [10]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $M = 2^{nd}$. Тогда для любой функции*

$$g(t) = \sum_{k \in C^d(2^{n+1})} \widehat{g}(k) e^{i(k,t)}, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

такой, что $|\widehat{g}(k)| \leq 1$ и $|\widehat{g}(k)| = 1$ при $k \in C^d(2^n)$, выполнено соотношение

$$\tau_M(g(x-y))_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q_1 \leq 2$. Установим сначала оценки снизу для величины $\tau_M(V_{2^n}(x-y))_{q_1}$ при $M = 2^{nd}$, где $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d)$, а $V_m(t)$, $m = 2, 3, \ldots$, $t = (t_1, \ldots, t_d)$, — кратное ядро Валле Пуссена. Пусть системы функций $\{u_j(x)\}_{j=1}^M$ и $\{v_j(y)\}_{j=1}^M$ таковы, что

$$\left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{j=1}^M u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,1} \leq 2\tau_M(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1}. \tag{27}$$

Поскольку для функции V_m

$$V_{2^{n+1}}(z) * V_{2^n}(z) = V_{2^n}(t) \tag{28}$$

и для $f \in L_{q_1}(\pi_d)$

$$\|\mathbf{V}_{2^{n+1}} f\|_{q_1} \leq 3^d \|f\|_{q_1}, \quad 1 \leq q_1 \leq \infty, \tag{29}$$

то, действуя на функцию под знаком нормы $\| \cdot \|_{q_1,1}$ в левой части (27) оператором свертки $\mathbf{V}_{2^{n+1}}$ (последовательно, как на функцию по каждой из переменных x и y), можно с учетом (28) и (29) считать выполненным следующее. Во-первых, функции $u_j(x)$ и $v_j(y)$ являются тригонометрическими полиномами с „номерами" гармоник из множества $C^d(2^{n+2})$ и, во-вторых, согласно (27) – (29) справедлива оценка

$$\left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{j=1}^M u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,1} \ll \tau_M(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1}. \tag{30}$$

Таким образом, воспользовавшись сначала теоремой А, а затем неравенством (30), можем записать

$$\left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{j=1}^M u_j(x) v_j(y) \right\|_{2,1} \ll 2^{nd(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{j=1}^M u_j(x) v_j(y) \right\|_{q_1,1} \ll$$

$$\ll 2^{nd(1/q_1-1/2)} \tau_M(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1}. \tag{31}$$

Далее, учитывая, что для функции V_{2^n} выполняются условия леммы Б, из (31), применяя лемму Б, находим

$$\tau_M(V_{2^n}(x-y))_{q_1} \geq \tau_M(V_{2^n}(x-y))_{q_1,1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(1/q_1-1/2)} \left\| V_{2^n}(x-y) - \sum_{j=1}^M u_j(x) v_j(y) \right\|_{2,1} \gg 2^{-nd(1/q_1-1/2)} M^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-nd(1/q_1-1)}. \tag{32}$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f_1(t) = C_1 2^{-nd(r/d+1-1/p)} V_{2^n}(t), \qquad t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d, \quad C_1 > 0.$$

При надлежащем выборе постоянной $C_1 > 0$ эта функция принадлежит классу $B^r_{p,1}$. В самом деле, поскольку

$$\|V_{2^n}\|_p \asymp 2^{nd(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

согласно (2) можем записать

$$\|V_{2^n}\|_{B^r_{p,1}} \asymp \sum_s 2^{sr}\|\sigma_s(V_{2^n},\cdot)\|_p =$$

$$= \sum_{s=0}^{n+1} 2^{sr}\|\sigma_s(V_{2^n},\cdot)\|_p \ll 2^{(n+1)r}2^{d(n+1)(1-1/p)} \asymp 2^{nd(r/d+1-1/p)},$$

а значит, существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $f_1 \in B^r_{p,1}$.

С учетом неравенства (32) окончательно имеем

$$\tau_M(B^r_{p,1})_{q_1} \geq \tau_M(f_1(x-y))_{q_1} \gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)}\tau_M(V_{2^n}(x-y))_{q_1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)}2^{-nd(1/q_1-1)} = 2^{-nd(r/d-1/p+1/q_1)} \asymp M^{-r/d+1/p-1/q_1} \tag{33}$$

при $1 \leq p \leq \infty$ и $1 \leq q_1 \leq 2$.

Из соотношения (33) следует оценка

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \gg M^{-r/d+1/p-1/q}$$

при $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p \leq q \leq 2$ и $r > 0$.

При $q_1 = 2$, $1 \leq p < 2$ из (33) получаем

$$\tau_M(B^r_{p,1})_2 \gg M^{-r/d+1/p-1/2}$$

и так как, очевидно, $\tau_M(B^r_{p,1})_q \geq \tau_M(B^r_{p,1})_2$, $2 < q < \infty$, при $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$ справедлива оценка

$$\tau_M(B^r_{p,1})_q \gg M^{-r/d+1/p-1/2}.$$

В оставшихся случаях $2 \leq p \leq q \leq \infty$, $r > \dfrac{d}{2}$ и $2 \leq q \leq p \leq \infty$, $r > 0$ достаточно установить искомые оценки снизу для $q = 2$.

Пусть $M \in \mathbb{N}$ задано ($M > 2^d$). Выберем число $n \in \mathbb{N}$ так, что $2^{nd} < M \leq 2^{(n+1)d}$, и рассмотрим функцию

$$f_2(t) = C_2 2^{-nd(r/d+1/2)}R_n(t), \qquad t = (t_1,\ldots,t_d), \quad C_2 > 0,$$

где

$$R_n(t) = \prod_{j=1}^{d}\sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1}\varepsilon_l e^{ilt_j}, \qquad \varepsilon_l \in \{-1,\,1\}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

— полином Рудина – Шапиро. Известно (см., например, [19, с. 155]), что $\|R_n\|_\infty \ll 2^{nd/2}$.

Поскольку

$$\|R_n\|_{B^r_{p,1}} = \sum_s 2^{sr}\|\sigma_s(R_n;\cdot)\|_p \asymp 2^{(n+1)r}\|R_n\|_p \ll 2^{(n+1)r}\|R_n\|_\infty \ll 2^{nr}2^{nd/2} = 2^{nd(r/d+1/2)},$$

при соответствующем выборе постоянной $C_2 > 0$ функция f_2 принадлежит $B^r_{p,1}$.

Далее, согласно лемме Б выполняется неравенство

$$\tau_M(R_n(x-y))_{2,1} \gg M^{1/2},$$

из которого следует

$$\tau_M(f_2)_2 \gg 2^{-nd(r/d+1/2)}\tau_M(R_n(x-y))_{2,1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(r/d+1/2)}M^{1/2} \asymp M^{-r/d-1/2}M^{1/2} = M^{-r/d}.$$

Таким образом, в силу сделанных выше замечаний последнее соотношение влечет неравенство

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_q \gg M^{-r/d}$$

при $r > 0$, $1 \le \theta \le \infty$ и $2 \le p \le q \le \infty$ или $2 \le q \le p \le \infty$.

Теорема 1 доказана.

1. *Бесов О. В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 61.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
3. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
4. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichlincaren Integralgleichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**. – S. 433 – 476.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, № 1. – С. 17 – 84.
6. *Мирошин Н. В., Хромов В. В.* Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных // Мат. заметки. – 1982. – **32**, № 5. – С. 721 – 727.
7. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
8. *Micchelli C. A., Pinkus A.* Some problems in the approximation of functions of two variables and n-widths of integral operators // J. Approxim. Theory. – 1978. – **24**. – P. 51 – 77.
9. *Cheney E. M.* The best approximation of multivariate functions by combinations of univariate ones // J. Approxim. Theory. Ser. IV. – 1983. – P. 1 – 26.
10. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 243 – 252.
11. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **181**. – С. 250 – 267.
12. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 191 – 215.
13. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1992. – **194**. – С. 229 – 248.
14. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
15. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
16. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.
17. *Бабаев М.-Б. А.* Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 6. – С. 10 – 21.
18. *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса W^r_q билинейными формами // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 1. – С. 122 – 129.
19. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.

Получено 27.10.11