УДК 517.9

Я. А. Прикарпатський (Ін-т прикл. пробл. механіки та математики НАН України, Львів; Ун-т гірництва та металургії, Краків, Польща),
А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. Г. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СТРУКТУРА БІНАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТИПУ ДАРБУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ

On the basis of generalized Lagrange identity for pairs of formally adjoint multidimensional differential operators and a special differential geometric structure associated with this identity, we propose a general scheme of the construction of corresponding transformation operators that are described by nontrivial topological characteristics. We construct in explicit form corresponding integro-differential symbols of transformation operators which are used in constructing Lax-integrable nonlinear two-dimensional evolution equations and their Darboux – Backlund-type transformations.

На основі узагальненої тотожності Лагранжа для пар формально спряжених багатовимірних диференціальних операторів та асоційованої з нею спеціальної диференціально-геометричної структури запропоновано загальну схему побудови відповідних операторів перетворення, що описуються нетривіальними топологічними характеристиками. Побудовано в явному вигляді відповідні інтегро-диференціальні символи операторів перетворень, які використано для конструювання інтегровних за Лаксом нелінійних двовимірних еволюційних рівнянь та їх перетворень типу Дарбу – Беклунда.

1. Спряжені диференціальні оператори та їх властивості. Розглянемо функціональний простір $\mathcal{H} \subset C^1\big(\mathbf{R}^2_{(t,y)}; H\big)$, де $H = L_2(\mathbf{R}_x; \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^k; \mathbf{C}^N))$, k, $N \in \mathbf{Z}_+$, в якому визначено диференціально-матричні вирази

$$\alpha\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=0}^{n(L)} a_i(x; y, t)\frac{\partial^i}{\partial x^i} := L,$$
$$\beta\frac{\partial}{\partial y} - \sum_{j=0}^{n(M)} b_j(x; y, t)\frac{\partial^j}{\partial x^j} := M, \tag{1}$$

та відповідний до нього спряжений простір $\mathcal{H}^* \subset C^1\big(\mathbf{R}^2_{(t,y)}; H\big)$. Тут $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, матриці $a_i, b_j \in C(\mathbf{R}^2; \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C}^N))$, $i = \overline{1, n(L)}$, $j = \overline{1, n(M)}$, $\mathcal{S}(\mathbf{R}; \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^N))$ — простір матричнозначних функцій Шварца, покомпонентно швидкоспадних при $|x| \to \infty$, $n(M)$ та $n(L) \in \mathbf{Z}_+$ фіксовані.

Задамо на добутку просторів $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ звичайну невироджену білінійну форму згідно з правилом: для будь-яких $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$

$$(\langle \varphi, \psi \rangle) := \int_{\mathbf{R}} dx \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}} dx \operatorname{Sp}\big(\varphi^T \psi\big), \tag{2}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — відповідна білінійна форма на $\operatorname{Hom}(\mathbf{C}^k; \mathbf{C}^N)$, символом T позначено операцію транспонування. По відношенню до білінійної форми (2) вивчимо питання про існування відповідних до (1) спряжених диференціально-матричних операторів у просторі $\mathcal{H}$.

Оператори $L, M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, очевидно, мають область визначення $\operatorname{Dom}(\mathcal{O}p) = C^1(\mathbf{R}^2; \mathcal{S}(\mathbf{R}; \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^N)))$, щільну в $\mathcal{H}$, оскільки замикання $\mathcal{S}(\mathbf{R}; \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^N)) = H$. Тоді, за визначенням, спряжені оператори L^* та M^*: $\mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ існують, якщо для всіх $\varphi, \psi \in \operatorname{Dom}(\mathcal{O}p)$ виконуються тотожності

$$(\langle L\varphi, \psi \rangle) = (\langle \varphi, L^*\psi \rangle), \quad (\langle M\varphi, \psi \rangle) = (\langle \varphi, M^*\psi \rangle). \tag{3}$$

Розглянемо згідно з (2) співвідношення, що є в певному сенсі аналогом тотожності Лагранжа:

$$\langle L\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, L^*\psi\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\,Z_{(L)}[\varphi, \psi] + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\langle \varphi, \psi\rangle =$$

$$= \langle \varphi, L^*\psi\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\,Z_{(L)}[\varphi, \psi] + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Sp}\left(\varphi^T\psi\right) =$$

$$= \langle \varphi, L^*\psi\rangle - \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Sp}\,Z_{(L)}[\varphi, \psi] + \alpha\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi^T\psi\right)\right), \tag{4}$$

де $Z_{(L)}[\varphi, \psi]$ — деяка матрична білінійна форма на $\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$, $\mathrm{Sp}: \mathrm{Hom}\,\mathbf{C}^k \to \mathbf{C}$, як і вище, є операцією сліду матриці.

Інтегруючи (4) за мірою dx на всій осі $\mathbf{R}$, знаходимо, що спряжений оператор $L^*: \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ завідомо існує, якщо для матриці $\Omega \in C^1(\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^2; \mathrm{End}\,\mathbf{C}^k)$ справджується рівність

$$\varphi^T\psi := \frac{\partial}{\partial x}\Omega, \qquad Z_{(L)}[\varphi, \psi] = \alpha\frac{\partial\Omega}{\partial t}, \tag{5}$$

де необхідно

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C}) \tag{6}$$

рівномірно для всіх $t \in \mathbf{R}$.

Інтегруючи рівняння (5), можна знайти, що матриця $\Omega \in C^1(\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^2; \mathrm{End}\,\mathbf{C}^k)$ має вигляд

$$\Omega = \Omega_0 + \int_{x_0}^{x}(\varphi^T\psi)\,dx, \tag{7}$$

де матриця $\Omega_0 \vec{\in} \mathrm{End}\,\mathbf{C}^k$ є сталою стосовно змінної $x \in \mathbf{R}$, а $x_0 \in \mathbf{R}$ — довільний параметр.

Очевидно, що умова (6) для матриці (7) є певним обмеженням щодо (t, y)-параметричної залежності функцій $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$, яка може бути реалізована за допомогою певних співвідношень. А саме, нехай має місце система узгоджених рівностей

$$L\varphi := \alpha\varphi_t - l\varphi = 0, \qquad M\varphi := \beta\varphi_y - m\varphi = 0, \tag{8}$$

де

$$\varphi\Big|_{\substack{t=0^+\\ y=0^+}} = \bar{\varphi} \in H.$$

Припустимо також, що існує спряжений оператор $M^*: \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$, тобто виконано умови (5) та

$$Z_{(L)}[\varphi, \psi] = \beta\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \qquad \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C}) \tag{9}$$

рівномірно стосовно $y \in \mathbf{R}^1$. Розглянемо умову (3) для всіх $\varphi \in \mathcal{H}$, що задовольняють рівність (8). Оскільки початкова умова $\bar{\varphi} \in H$, то з умови $0 = (\varphi, L^{*}\psi)$ для $\psi \in \mathcal{H}^{*}$ легко знаходимо $L^{*}\psi = 0$.

Аналогічно знаходимо $M^{*}\psi = 0$ для всіх $\psi \in \mathcal{H}^{*}$, якщо

$$\psi\Big|_{\substack{t=0^{+}\\ y=0^{+}}} = \bar{\psi} \in H.$$

Таким чином, одержуємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай функція $\varphi \in \mathcal{H}$ задовольняє еволюційні диференціальні рівняння* (8) *з початковою умовою*

$$\varphi\Big|_{\substack{t=0^{+}\\ y=0^{+}}} = \bar{\varphi} \in H.$$

Тоді оператори $L, M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ мають спряжені відносно білінійної форми (2) *оператори $L^{*}, M^{*} : \mathcal{H}^{*} \to \mathcal{H}^{*}$, якщо кожна функція $\psi \in \mathcal{H}^{*}$ задовольняє систему узгоджених спряжених рівнянь вигляду*

$$L^{*}\psi = 0, \quad M^{*}\psi = 0, \tag{10}$$

де

$$\psi\Big|_{\substack{t=0^{+}\\ y=0^{+}}} = \bar{\psi} \in H,$$

причому, за побудовою,

$$L^{*} := -\alpha\frac{\partial}{\partial t} - l^{*}, \quad M^{*} := -\beta\frac{\partial}{\partial y} - m^{*}.$$

І навпаки, якщо для всіх $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^{*}$ справджуються рівності (8) *та* (10), *то необхідні умови* (6) *та* (9) *виконуються для всіх $(t, y) \in \mathbf{R}^{2}$, коли*

$$\frac{d}{dt}(\langle\varphi, \psi\rangle) = 0 = \frac{d}{dy}(\langle\varphi, \psi\rangle), \tag{11}$$

тобто, коли величина $(\langle\varphi, \psi\rangle) \in \mathbf{C}$ є інваріантом стосовно (t, y)-параметризації просторів $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^{*}$.

Зауважимо, що умова (11) є простим наслідком вкладень (6) та (9).

2. Структура перетворень Дарбу. Розглянемо тепер іншу пару просторів $\tilde{\mathcal{H}} \subset C^{1}(\mathbf{R}^{2}; H)$ та $\tilde{\mathcal{H}}^{*} \subset C^{1}(\mathbf{R}^{2}; H)$ з білінійною формою (2) на $\tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^{*}$, а також пару операторів $\tilde{L}, \tilde{M} : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$, які допускають спряжені оператори $\tilde{L}^{*}$ та $\tilde{M}^{*} : \tilde{\mathcal{H}}^{*} \to \tilde{\mathcal{H}}^{*}$. Користуючись твердженням 1, легко знаходимо, що існує матриця $\tilde{\Omega} \in C^{1}(\mathbf{R}^{2} \times \mathbf{R}^{1}; \operatorname{End} \mathbf{C}^{k})$ така, що справджуються рівняння $\tilde{L}\tilde{\varphi} = 0$, $\tilde{M}\tilde{\varphi} = 0$, $\tilde{L}^{*}\tilde{\psi} = 0$, $\tilde{M}^{*}\tilde{\varphi} = 0$, де

$$Z_{(L)}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}] = \alpha\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial t}, \quad Z_{(M)}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}] = \beta\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial y}, \quad \tilde{\varphi}^{T}\tilde{\psi} := \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Omega}, \tag{12}$$

та рівномірно для всіх $(t, y) \in \mathbf{R}^2$ виконані вкладення

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial t}\right), \quad \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial y}\right) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C}). \tag{13}$$

Припустимо тепер, що функціональні простори $\mathcal{H}$ та $\tilde{\mathcal{H}}$ ізоморфні, причому дія ізоморфізму $\hat{\Omega} : \mathcal{H} \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ на елементі $\varphi \in \mathcal{H}$ визначається таким чином:

$$\hat{\Omega}(\varphi) := \tilde{\varphi} = \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T, \tag{14}$$

де $(\varphi, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{H} \times \tilde{\mathcal{H}}$ та припускається, що обернена матриця Ω^{-1} існує для всіх $(x; y, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$. Відповідна дія ізоморфізму для просторів $\mathcal{H}^*$ та $\tilde{\mathcal{H}}^*$, тобто $\hat{\Omega}^* : \mathcal{H}^* \leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}}^*$ на елементі $\psi \in \mathcal{H}^*$ визначається аналогічно:

$$\hat{\Omega}^*(\psi) := \tilde{\psi} = \psi\Omega^{-1}\Omega_0, \tag{15}$$

де пара $(\psi, \tilde{\psi}) \in \mathcal{H}^* \times \tilde{\mathcal{H}}^*$ є фіксованою.

Легко переконатись, що справджується наступне твердження.

Твердження 2. *Пара відображень* $(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^*)$ *є узгодженою, тобто існує така матриця* $\tilde{\Omega} \in C^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1; \mathrm{End}\,\mathbf{C}^k)$, *що виконуються умови* (12) *та* (13).

Доведення. Дійсно, використовуючи визначення (14) та (15), легко знаходимо

$$\tilde{\varphi}^T\tilde{\psi} = \Omega_0\Omega^{-1}\varphi^T\psi\Omega^{-1}\Omega_0 = -\frac{\partial}{\partial x}(\Omega_0\Omega^{-1}\Omega_0) := \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\Omega}, \tag{16}$$

тобто матриця $\tilde{\Omega} = -\Omega_0\Omega^{-1}\Omega_0$ задовольняє умову (12).

Оскільки функціональні простори $\mathcal{H}$ та $\tilde{\mathcal{H}}$ є узгодженими, тобто окрім співвідношення (16) виконується також умова (13), то знаходимо, що для всіх $(t, y) \in \mathbf{R}^2$ повинні справджуватись вкладення

$$\mathrm{Sp}\,(\Omega^{-2}\Omega_t), \quad \mathrm{Sp}\,(\Omega^{-2}\Omega_y) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$$

разом з вкладеннями (6) та (9). Останні є критерієм на еволюцію просторів $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$, яка забезпечує існування ізоморфізмів $\hat{\Omega}$ та $\hat{\Omega}^*$, що визначені вище.

Визначені вище відображення $\hat{\Omega}$ та $\hat{\Omega}^*$ надалі будемо називати перетвореннями типу Дарбу [1].

Оскільки згідно з визначенням

$$\Omega = \Omega_0 + \int_{x_0}^{x}(\varphi^T\psi)ds := \Omega_0 + \partial^{-1}(\varphi^T\psi),$$

де матриця $\Omega_0 \in \mathrm{End}\,\mathbf{C}^k$ є сталою, то виберемо її так, щоб $\det\Omega_0 \neq 0$. Далі, оскільки при $x \to x_0 \in \mathbf{R}$ матриця $\Omega \to \Omega_0$ рівномірно стосовно $(t, y) \in \mathbf{R}^2$, то обернена матриця Ω^{-1} при $x \to x_0$, очевидно, існує.

Щоб розглянути питання про невиродженість матриці Ω для довільних $x \in \mathbf{R}$, скористаємось умовою $\Omega_0\Omega^{-1}\Omega_0 = -\tilde{\Omega}$, або, враховуючи (16), співвідношенням

$$\tilde{\Omega} := \tilde{\Omega}_0 + \int_{x_0}^{x} (\tilde{\varphi}^T \tilde{\psi}) ds,$$

де $\tilde{\Omega}_0 \in \operatorname{End} \mathbf{C}^k$ є теж сталою невиродженою матрицею, тому що, очевидно, $\tilde{\Omega}_0 = -\Omega_0$.

Вважатимемо тепер, що відображення $\hat{\Omega}$ та $\hat{\Omega}^*$ — ізоморфізми, тобто пари функціональних просторів $(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ та $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$ є узгодженими. Це означає, що діаграма відображень

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\hat{\Omega}} & \tilde{\mathcal{H}} & \\ M, L & \downarrow & & \downarrow & \tilde{L}, \tilde{M} \\ & \mathcal{H} & \xrightarrow{\hat{\Omega}} & \tilde{\mathcal{H}} & \end{array}$$

є комутативною, а отже, мають місце співвідношення $\hat{\Omega} \cdot L = \tilde{L} \cdot \hat{\Omega}$, $\hat{\Omega} \cdot M = \tilde{M} \cdot \hat{\Omega}$, що пов'язують еволюційні оператори L і M у просторі $\mathcal{H}$ з відповідними еволюційними операторами у просторі $\tilde{\mathcal{H}}$.

Щоб визначити явно дію відображень $\hat{\Omega} : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ та $\hat{\Omega}^* : \mathcal{H}^* \to \tilde{\mathcal{H}}^*$, скористаємось дією (14), (15) на елементах $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$. А саме, з (14) маємо

$$\hat{\Omega}(\varphi) = \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T \equiv \varphi(\Omega^T)^{-1}(\Omega^T - \partial^{-1}\psi^T\varphi) =$$
$$= \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega^T - \varphi(\Omega^T)^{-1}\partial^{-1}\psi^T\varphi = \varphi - \varphi(\Omega^T)^{-1}\partial^{-1}(\psi^T\varphi) =$$
$$= (1 - \varphi(\Omega^T)^{-1}\partial^{-1}\psi^T)\varphi = \left(1 - \tilde{\varphi}\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\partial^{-1}\psi^T\right)(\varphi), \tag{17}$$

звідки можна визначити оператор $\hat{\Omega}$ як

$$\hat{\Omega} = 1 - \tilde{\varphi}\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\partial^{-1}\psi^T \tag{18}$$

та продовжити дію оператора (17) на весь простір $\mathcal{H}$.

Виконуючи перетворення, аналогічні (17), з (15) знаходимо оператор

$$\hat{\Omega}^* = 1 - \tilde{\psi}\Omega_0^{-1}\partial^{-1}\varphi^T, \tag{19}$$

який іншим шляхом отримано в [2].

Отже, оператори $\hat{\Omega}$ та $\hat{\Omega}^*$ є інтегральними операторами вольтеррівського типу. За допомогою прямих обчислень або на підставі властивостей симетрії легко встановити, що ці оператори є оборотними, причому справджуються рівності [2, 3]

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}^{-1} &= 1 + \varphi\left(\Omega_0^{-1}\right)^T\partial^{-1}\tilde{\psi}^T, \\ \hat{\Omega}^{*-1} &= 1 + \psi\Omega_0^{-1}\partial^{-1}\tilde{\varphi}^T, \end{aligned} \tag{20}$$

що легко випливає із співвідношень еквівалентності пар просторів $(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ та $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$.

Використовуючи тепер співвідношення (18) разом з виразами (19) та (20), легко знайти відповідні оператори $\tilde{L}$, $\tilde{M} : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$, коефіцієнтні матричні функції яких, як звичайно, називають Беклунд-перетвореннями стосовно коефіцієнтних матричних функцій вихідної пари узгоджених операторів L, $M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Зауважимо, що умовою узгодженості операторів L, M є певна система нелінійних еволюційно-диференціальних рівнянь. Сама ж ця пара узгоджених операторів має назву пари типу Лакса [4] або Захарова – Шабата.

Розглянемо ще питання про вигляд перетворюючої пари операторів

$$\tilde{L} = \hat{\Omega} \cdot L\hat{\Omega}^{-1}, \qquad \tilde{M} = \hat{\Omega} \cdot M\hat{\Omega}^{-1}. \tag{21}$$

Як видно з (21), ці оператори лежать відповідно на орбітах елементів $L, M \in \mathcal{G}_-^*$ відносно дії ко-приєднаної групи псевдодиференціальних операторів G_-, алгебра Лі $\mathcal{G}_-$ якої складається з вольтеррівських операторів типу

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \partial^{-1} b_i^T,$$

де n — деяке скінченне число, тобто

$$\mathcal{G}_- = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \partial^{-1} b_i^T : a_i, b_i \in \mathcal{S}\big(\mathbf{R}; \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^k; \mathbf{C}^N)\big),\ i = \overline{1, n},\ n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

Покажемо, що ця орбіта залишає простір $\mathcal{G}_-^*$ інваріантним, тобто оператори $\tilde{L}$ та $\tilde{M} : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$ при перетворенні (21) залишаються диференціальними зі збереженням порядку. Для цього розглянемо довільний псевдодиференціальний оператор $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ і зауважимо, що є справедливою тотожність

$$\mathrm{Tr}\,(P f \partial^{-1} h^T) := (P f, \partial^{-1} h^T)_{\mathcal{G}} = (\langle h, P_+ f \rangle), \tag{22}$$

де, за визначенням,

$$\mathrm{Tr}\,(\cdot) := \int_{\mathbf{R}} dx \,\mathrm{res}\,\mathrm{Sp}(\cdot)$$

і операція $(\cdot)_+$ означає виділення диференціальної частини відповідного псевдодиференціального виразу.

Використовуючи (22), легко встановити наступну лему.

Лема 1. *Псевдодиференціальний оператор $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ є чисто диференціальним тоді і тільки тоді, коли справджується рівність*

$$(\langle h, (P\partial^i)_+ f \rangle) = (\langle h, P_+ \partial^i f \rangle) \tag{23}$$

для всіх $i \in \mathbf{Z}_+$ та $(f, h) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$. Умова (23) еквівалентна рівності $P_+ = = P$.

Застосуємо тепер лему 1 до оператора $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, взявши до уваги співвідношення (18). Маємо

$$\left(\left\langle h, (\tilde{L}\partial^i)_+ f \right\rangle\right) = \left(\left\langle h, \left(\hat{\Omega}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial t} - l\right)\hat{\Omega}^{-1}\partial^i\right)_+ f \right\rangle\right) =$$

$$= \left(\left\langle h, \alpha\frac{\partial}{\partial t}\partial^i f \right\rangle\right) - \left(\left\langle h, \left[\left(\hat{\Omega}_t\hat{\Omega}^{-1} + \hat{\Omega} l \hat{\Omega}^{-1}\right)\partial^i\right]_+ f \right\rangle\right) =$$

$$= \left(\left\langle h, \alpha\frac{\partial}{\partial t}\partial^i f \right\rangle\right) - \mathrm{Tr}\left\{\left(\hat{\Omega}_t\hat{\Omega}^{-1}\partial^i + \hat{\Omega} l \hat{\Omega}^{-1}\partial^i\right) f \partial^{-1} h^T \right\} =$$

$$= \left(\left\langle h, \alpha\frac{\partial}{\partial t}\partial^i f\right\rangle\right) - \operatorname{Tr}\left\{\left(1-\bar{\varphi}\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\partial^{-1}\psi^T\right)_t\left(1+\varphi\left(\Omega_0^{-1}\right)^T\partial^{-1}\bar{\psi}^T\right)\partial^i + \right.$$

$$\left. + \left(1-\bar{\varphi}\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\partial^{-1}\psi^T\right)l\left(1+\varphi\left(\Omega_0^{-1}\right)^T\partial^{-1}\bar{\psi}^T\right)\partial^i f\partial^{-1}h^T\right\} \equiv$$

$$\equiv \operatorname{Tr}\left(\tilde{L}(\partial^i f)\partial^{-1}h^T\right) = \left(\left\langle h, \tilde{L}_+\partial^i f\right\rangle\right). \qquad (24)$$

При виведенні (24) ми скористались рівностями $L\varphi = 0$, $L^*\psi = 0$ та $L_+ = L$.

Тим самим, згідно з лемою 1, оператор $\tilde{L}: \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$ є також диференціальним, причому його порядок $\operatorname{ord}\tilde{L} = \operatorname{ord}L$, що випливає з визначень (21).

За аналогією, таке саме твердження справедливе також і для оператора $\tilde{M}: \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$, тобто $\tilde{M}_+ = \tilde{M}$ та $\operatorname{ord}\tilde{M} = \operatorname{ord}M$.

Як висновок з властивостей, встановлених вище, можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 3. *Пара операторів* $\tilde{L}, \tilde{M}: \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$ *вигляду* (21), *отримана внаслідок перетворення типу Дарбу з узгодженої (за Лаксом) пари диференціальних операторів* $L, M: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *у вигляді* (1) *залишається узгодженою парою диференціальних операторів на* $\tilde{\mathcal{H}}$ *із збереженням порядку диференціювання. Відповідні коефіцієнтні матричні функції перетворених операторів задають так зване перетворення Беклунда – Дарбу коефіцієнтних матричних функцій узгодженої вихідної пари операторів.*

З точки зору практичних застосувань твердження 3 очевидно, що перетворення Беклунда – Дарбу є винятково ефективним при побудові широкого класу так званих солітонних [4] розв'язків та вироджених алгебраїчних розв'язків відповідної системи нелінійних еволюційних диференціальних рівнянь, що еквівалентна умові узгодженості вихідної пари операторів (1). Цьому питанню присвячено низку праць (див. [1]), де побудовано часткові розв'язки солітонного типу для різних рівнянь математичної фізики, що мають важливе значення для застосувань.

Зауваження. При вивченні операторів ізоморфізму $\hat{\Omega}: \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ та $\hat{\Omega}^*: \mathcal{H}^* \to \tilde{\mathcal{H}}^*$ було зроблено припущення про те, що матриця $\Omega_0 \in \operatorname{End}\mathbf{C}^k$ є сталою стосовно еволюційних параметрів $(t, y) \in \mathbf{R}^2$, та застосовано дещо неоднозначну операцію функціонального продовження дії оператора $\hat{\Omega}: \varphi \to \bar{\varphi}$ та оператора $\hat{\Omega}^*: \psi \to \bar{\psi}$ з вектора $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ на відповідну пару просторів $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$. Можна сконструювати й інші продовження [2, 3] для операторів $\hat{\Omega}: \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ та $\hat{\Omega}^*: \mathcal{H}^* \to \tilde{\mathcal{H}}^*$, які можуть також привести до інших перетворень Беклунда – Дарбу.

3. Загальна структура перетворень Дарбу – Беклунда: диференціально-геометричний аспект. Розглянемо питання про існування спряжених операторів L^* та M^*. Використовуючи рівності (4), одержуємо, що для існування спряжених операторів L^* та M^* повинні виконуватись для всіх пар $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ рівності вигляду

$$\begin{aligned} \langle L\varphi, \psi\rangle - \langle\varphi, L^*\psi\rangle &= \operatorname{Sp}\left(-\frac{\partial}{\partial x}Z_{(L)}[\varphi, \psi] + \alpha\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^T\psi)\right) = 0, \\ \langle M\varphi, \psi\rangle - \langle\varphi, M^*\psi\rangle &= \operatorname{Sp}\left(-\frac{\partial}{\partial x}Z_{(M)}[\varphi, \psi] + \beta\frac{\partial}{\partial y}(\varphi^T\psi)\right) = 0, \end{aligned} \qquad (25)$$

які необхідно будуть справджуватись, якщо мають місце співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial x}Z_{(L)}[\varphi, \psi] = \alpha\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^T\psi), \quad \frac{\partial}{\partial x}Z_{(M)}[\varphi, \psi] = \beta\frac{\partial}{\partial y}(\varphi^T\psi), \tag{26}$$

що забезпечуються такими умовами сумісності:

$$Z_{(L)}[\varphi, \psi] = \alpha\frac{\partial}{\partial t}\Omega[\varphi, \psi], \quad Z_{(M)}[\varphi, \psi] = \beta\frac{\partial}{\partial y}\Omega[\varphi, \psi],$$
$$\varphi^T\psi = \frac{\partial}{\partial x}\Omega[\varphi, \psi], \tag{27}$$

де $\Omega[\varphi, \psi] \in \operatorname{End}\mathbf{C}^k$ — матриця, існування якої забезпечується наведеними нижче міркуваннями.

З умов (27) легко знаходимо, що матрична диференціальна форма

$$\omega^{(1)}[\varphi, \psi] = \varphi^T\psi\,dx + \alpha^{-1}Z_{(L)}[\varphi, \psi]\,dt + \beta^{-1}Z_{(M)}[\varphi, \psi]\,dy \tag{28}$$

є точною, тобто $d\omega^{(1)}[\varphi, \psi] = 0$ для всіх $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$.

Таким чином, завдяки (26) має місце співвідношення типу Стокса

$$\omega^{(1)}[\varphi, \psi] = d\Omega[\varphi, \psi]. \tag{29}$$

Як наслідок записаних вище співвідношень задамо, як і раніше, такі дії відображення Дарбу – Беклунда на фіксовану пару $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$:

$$\tilde\varphi = \hat\Omega(\varphi) = \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T, \quad \tilde\psi = \hat\Omega^*(\varphi) = \psi\Omega^{-1}\Omega_0. \tag{30}$$

Тут, за визначенням, матриці $\Omega[\varphi, \psi]$ та $\Omega_0[\varphi, \psi] \in \operatorname{End}\mathbf{C}^k$ задаються формулами

$$\Omega[\varphi, \psi] = \int\limits_{P_0(x_0, y_0, t_0)}^{P(x, y, t)} \omega^{(1)}[\varphi, \psi] + \Omega_0[\varphi, \psi] := \partial^{-1}\omega^{(1)}[\varphi, \psi] + \Omega_0[\varphi, \psi],$$

де точки $P_0(x_0, y_0, t_0), P(x, y, t) \in \mathbf{R}^3$ вибрано довільним чином, при цьому дані матриці вважаються невиродженими майже скрізь.

Продовжуючи вирази (30) звичайним чином на цілі простори $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^*$ відповідно, знаходимо

$$\tilde\varphi := \hat\Omega(\varphi) = \varphi(\Omega^T[\varphi, \psi])^{-1}(\Omega^T[\varphi, \psi] - \partial^{-1}\omega^T[\varphi, \psi]) =$$
$$= \varphi - \varphi(\Omega^T[\varphi, \psi])^{-1}\partial^{-1}\omega^T[\varphi, \psi] =$$
$$= \left(1 - \tilde\varphi\left(\Omega_0^T[\varphi, \psi]\right)^{-1}\partial^{-1}\omega^T[\cdot, \psi]\right)\varphi := \hat\Omega\cdot\varphi,$$

$$\tilde\psi := \hat\Omega^*(\psi) = \psi\Omega^{-1}[\varphi, \psi](\Omega[\varphi, \psi] - \partial^{-1}\omega[\varphi, \psi]) =$$
$$= \psi - \psi\Omega^{-1}[\varphi, \psi]\Omega_0[\varphi, \psi]\Omega_0^{-1}[\varphi, \psi]\partial^{-1}\omega[\varphi, \psi] =$$
$$= \left(1 - \tilde\psi(\Omega_0[\varphi, \psi])^{-1}\partial^{-1}\omega[\varphi, \cdot]\right)\psi := \hat\Omega^*\cdot\psi,$$

або

$$\hat\Omega = 1 - \tilde\varphi\left(\Omega_0^T[\varphi, \psi]\right)^{-1}\partial^{-1}\omega^T[\cdot, \psi],$$
$$\hat\Omega^* = 1 - \tilde\psi(\Omega_0[\varphi, \psi])^{-1}\partial^{-1}\omega^T[\varphi, \cdot]. \tag{31}$$

Таким чином, сконструйовано ізоморфізми $\hat{\Omega} : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ та $\hat{\Omega}^* : \mathcal{H}^* \to \tilde{\mathcal{H}}^*$, результатом яких будуть Дарбу-трансформовані оператори $\tilde{L} : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$ та $\tilde{M} : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$, де

$$\tilde{L} = \hat{\Omega} L \hat{\Omega}^{-1}, \qquad \tilde{M} = \hat{\Omega} M \hat{\Omega}^{-1}, \tag{32}$$

які зберігають умову сумісності $\left[\tilde{L}, \tilde{M}\right] = 0$ як наслідок вихідної умови типу Лакса $[L, M] = 0$, що еквівалентна певній системі еволюційних рівнянь з частинними похідними.

Дії операторів (31) на пару функцій $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ у вигляді (30) повинні, очевидно, узгоджуватись із відповідними Дарбу-перетвореними операторними виразами (32), тобто оператори $\tilde{L}^*$ та $\tilde{M}^*$ повинні теж існувати у відповідному просторі $\tilde{\mathcal{H}}^*$ стосовно білінійної форми на $\tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}^*$. Це означає, що матрична диференціальна форма

$$\omega^{(1)}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = \bar{\varphi}^T \bar{\psi}\, dx + \alpha^{-1} Z_L[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]\, dt + \beta^{-1} Z_M[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]\, dy \tag{33}$$

є теж точною, тобто існує така матрична функція $\tilde{\Omega}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] \in \operatorname{End} \mathbf{C}^k$, що $d\tilde{\Omega}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = \omega^{(1)}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]$ для всіх $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$.

Справедлива наступна лема.

Лема 2. *Матрична диференціальна форма* (33) *залишається точною при дії ізоморфізмів* (31), *тобто існує така матрична функція* $\Omega[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] \in \operatorname{End} \mathbf{C}^k$, *що* $d\tilde{\Omega}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = \omega^{(1)}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]$ *для всіх* $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$.

Доведення. Дійсно, ґрунтуючись на явних виразах білінійних матричних форм $\bar{\varphi}^T \bar{\psi}$, $Z_L[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]$ та $Z_M[\bar{\varphi}, \bar{\psi}]$, легко переконатись, що оскільки

$$\omega^{(1)}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = \Omega_0 \Omega^{-1} (\varphi^T \psi) \Omega^{-1} \Omega_0\, dx + \alpha^{-1} \Omega_0 \Omega^{-1} Z_L[\varphi, \psi] \Omega^{-1} \Omega_0\, dt +$$

$$+ \beta^{-1} \Omega_0 \Omega^{-1} Z_M[\varphi, \psi] \Omega^{-1} \Omega_0\, dy,$$

то

$$\Omega_0 \Omega^{-1} \omega^{(1)}[\varphi, \psi] \Omega^{-1} \Omega_0 =$$

$$= \Omega_0 \Omega^{-1} (d\Omega) \Omega^{-1} \Omega_0 = -\Omega_0 (d\Omega^{-1}) \Omega_0 = -d(\Omega_0 \Omega^{-1} \Omega_0),$$

тобто

$$\omega^{(1)}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = d(-\Omega_0 \Omega^{-1} \Omega_0) := d\tilde{\Omega}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}].$$

Як наслідок отримуємо

$$\omega^{(1)}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = d\tilde{\Omega}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}],$$

де, за визначенням, $\tilde{\Omega}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] = -\Omega_0 \Omega^{-1} [\varphi, \psi] \Omega_0 \in \operatorname{End} \mathbf{C}^k$.

З умови невиродженості матриці $\Omega[\varphi, \psi] \in \operatorname{End} \mathbf{C}^k$ випливає невиродженість матриці $\tilde{\Omega}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}] \in \operatorname{End} \mathbf{C}^k$.

Отже, для всіх $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$ матрична диференціальна форма (33) є точною.

Лему 2 доведено.

На основі леми 2 легко сконструювати прямим способом обернені відображення $\hat{\Omega}^{-1}: \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ та $\left(\hat{\Omega}^*\right)^{-1}: \tilde{\mathcal{H}}^* \to \mathcal{H}^*$. А саме, за визначенням, змінюючи тепер роль просторів $\mathcal{H}$ та $\tilde{\mathcal{H}}$, знаходимо

$$\hat{\Omega}^{-1}(\tilde{\varphi}) := \tilde{\varphi}\left(\tilde{\Omega}^T\right)^{-1}\tilde{\Omega}_0^T = \tilde{\varphi}\left(\Omega_0^T\right)^{-1}(\Omega^T)\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\Omega_0^T =$$

$$= \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega_0^T\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\Omega^T\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\cdot\Omega_0^T = \varphi(\Omega^T)^{-1}\Omega^T\left(\Omega_0^T\right)^{-1}\Omega_0 = \varphi,$$

$$\left(\hat{\Omega}^*\right)^{-1}(\tilde{\psi}) = \tilde{\psi}\tilde{\Omega}^{-1}\tilde{\Omega}_0 = \tilde{\psi}\tilde{\Omega}_0^{-1}\Omega\Omega_0^{-1}\Omega_0 = \psi\Omega^{-1}\Omega_0\Omega_0^{-1}\Omega\Omega_0^{-1}\Omega_0 = \psi,$$

тобто оператори (31) задають узгоджені ізоморфізми пар лінійних просторів $\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$ та $\tilde{\mathcal{H}}\times\tilde{\mathcal{H}}^*$.

Оскільки оператори (31) реалізують ізоморфізми пар просторів $(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ та $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}^*)$, то на підставі властивостей симетрії їх явної параметризації парами функцій $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$ та $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}}\times\tilde{\mathcal{H}}^*$ легко знаходимо вирази для обернених операторів: $\hat{\Omega}^{-1}: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ та $\left(\hat{\Omega}^*\right)^{-1}: \mathcal{H}^*\to\mathcal{H}$:

$$\begin{gathered}\hat{\Omega}^{-1} := \hat{\Omega}\Big|_{\substack{\varphi\to\tilde{\varphi}\\ \psi\to\tilde{\psi}}} = 1 - \varphi\left(\Omega_0^T[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]\right)^{-1}\partial^{-1}\omega^T[\cdot, \tilde{\psi}],\\ \left(\hat{\Omega}^*\right)^{-1} := \hat{\Omega}^*\Big|_{\substack{\varphi\to\tilde{\varphi}\\ \psi\to\tilde{\psi}}} = 1 - \psi\Omega_0^{-1}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]\partial^{-1}\omega[\tilde{\varphi}, \cdot].\end{gathered} \tag{34}$$

Застосовуючи (34) до очевидних операторних наслідків з (32) у вигляді

$$\tilde{L} = L + \left[\hat{\Omega}, L\right]\hat{\Omega}^{-1}, \qquad \tilde{M} = M + \left[\hat{\Omega}, L\right]\hat{\Omega}^{-1}, \tag{35}$$

отримуємо остаточно таке твердження.

Твердження 4. *Нехай задано пару (L, M) комутуючих диференціальних операторів в параметричному функціональному просторі $\mathcal{H}$ та пару їх спряжених виразів (L^*, M^*) у просторі $\mathcal{H}^*$, а також асоційовану з ними пару функцій $(\varphi, \psi)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$, для якої $L\varphi = 0$, $M\varphi = 0$ та $L^*\psi = 0$, $M^*\psi = 0$. Тоді формальні інтегро-диференціальні операторні вирази* (35) *та* (34) *задають відповідні перетворення типу Беклунда для коефіцієнтних матриц-функцій операторів L та M, а відображення* (31) — *відповідні перетворення Дарбу для розв'язків $(a, b)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*$ рівнянь $La = 0 = Ma$, $L^*b = 0 = M^*b$.*

Сформульоване твердження дає максимально можливе узагальнення для форми перетворень типу Дарбу – Беклунда, асоційованих з диференціальними операторними виразами в параметричних просторах. Деякі застосування до конкретних еволюційних нелінійних рівнянь ми наведемо нижче.

Попередній аналіз структури перетворень типу Дарбу – Беклунда було проведено для диференціальних операторів від однієї змінної $x\in\mathbf{R}$, що дещо обмежує клас можливих перетворень для операторів від двох та більше змінних [5], які, зокрема, допускають зображення типу Лакса [6 – 8]. У зв'язку з цим розглянемо узагальнення даної схеми конструювання перетворень типу Дарбу – Беклунда і на цей випадок, взявши простір $\mathcal{H}\subset C^1(\mathbf{R}; H)$, де $H = L_2(\mathbf{R}^2; \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^k; \mathbf{C}^N))$, в якому діють оператори $L: \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ вигляду

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{0 \le i+j \le n} u_{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}. \tag{36}$$

Умова існування спряженого оператора $L^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ відносно стандартної білінійної форми на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ має вигляд $(L\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi)$, або

$$\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L^*\psi \rangle + \mathrm{Sp}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^T \psi) +$$
$$+ \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial}{\partial x} Z^{(x)}[\varphi, \psi] + \frac{\partial}{\partial y} Z^{(y)}[\varphi, \psi]\right) \tag{37}$$

для всіх пар $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$, де $Z^{(x)}[\varphi, \psi]$ та $Z^{(y)}[\varphi, \psi]$ — деякі цілком визначені матричні білінійні форми.

Інтегруючи вираз (37) за мірою $dx \wedge dy$, знаходимо

$$\left[(L\varphi, \psi) - (\varphi, L^*\psi)\right] dt =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{Sp}\left(d(\varphi^T \psi) \wedge dx \wedge dy + dZ^{(x)}[\varphi, \psi] \wedge dy \wedge dt - dZ^{(y)}[\varphi, \psi] \wedge dx \wedge dt\right) :=$$
$$:= \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{Sp}\left(d\omega^{(2)}[\varphi, \psi]\right), \tag{38}$$

де, за визначенням,

$$\omega^{(2)}[\varphi, \psi] = \varphi^T \psi \, dx \wedge dy + Z^{(x)}[\varphi, \psi] \, dy \wedge dt + Z^{(y)}[\varphi, \psi] \, dt \wedge dx. \tag{39}$$

Отже, для всіх $t \in \mathbf{R}$ та $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ вираз у правій частині співвідношення (38) є тотожно нульовим, якщо матричнозначна диференціальна 2-форма (39) є замкненою, тобто $d\omega^{(2)}[\varphi, \psi] = 0$, або якщо для деякої матричнозначної 1-форми $\Omega^{(1)}[\varphi, \psi]$ на просторі $\mathbf{R}^3$ виконується рівність

$$\omega^{(2)}[\varphi, \psi] = d\Omega^{(1)}[\varphi, \psi]. \tag{40}$$

Справедливою є наступна лема.

Лема 3. *Матричнозначна 2-форма (39) є замкненою для всіх пар $(\varphi, \psi) \in \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$, а пара операторів (L, L^*) є спряженою.*

Доведення леми 3 проводиться прямою перевіркою умови $d\omega^{(2)}[\varphi, \psi] = 0$, яка забезпечує спряженість пари операторів (L, L^*) на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$.

Як наслідок леми Пуанкаре [9, 10] стосовно замкнених 2-форм на просторі $\mathbf{R}^3$, знаходимо, що має місце співвідношення (40).

Візьмемо тепер деяку кусково-гладку компактну поверхню $S(\sigma, \sigma_0) \subset \mathbf{R}^3$, межа якої $\partial S(\sigma, \sigma_0) = \sigma - \sigma_0$, де $\sigma, \sigma_0 \subset \mathbf{R}^3$ — замкнені неперетинні криві, що проходять відповідно через точки $P(x, y, t) \in \mathbf{R}^3$ та $P_0(x_0, y_0, t_0) \in \mathbf{R}^3$, і розглянемо матричнозначний поверхневий інтеграл

$$\int_{S(\sigma, \sigma_0)} \omega^{(2)}[\varphi, \psi] = \int_{S(\sigma, \sigma_0)} d\Omega^{(1)}[\varphi, \psi] = \int_{\partial S(\sigma, \sigma_0)} \Omega^{(1)}[\varphi, \psi] =$$
$$= \int_{\sigma} \Omega^{(1)}[\varphi, \psi] - \int_{\sigma_0} \Omega^{(1)}[\varphi, \psi] := \Omega_\sigma[\varphi, \psi] - \Omega_{\sigma_0}[\varphi, \psi].$$

Вважаючи надалі замкнену криву $\sigma_0 \subset \mathbf{R}^3$ фіксованою, можна визначити дію операторів Дарбу-перетворень на парі функцій $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \hat{\Omega}(\varphi) := \varphi\left(\Omega_\sigma^T[\varphi, \psi]\right)^{-1} \Omega_{\sigma_0}^T[\varphi, \psi], \\ \tilde{\psi} &= \hat{\Omega}^*(\psi) := \psi(\Omega_\sigma[\varphi, \psi])^{-1} \Omega_{\sigma_0}[\varphi, \psi], \end{aligned} \tag{41}$$

припустивши, що матриця $\Omega_\sigma[\varphi, \psi]$ є невиродженою.

Відображення (41), як легко можна переконатись прямими обчисленнями, є узгодженими з умовою про те, що пара операторів $(\tilde{L}, \tilde{L}^*)$ на $\tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$ буде теж спряженою, де, за визначенням, $\tilde{L} = \hat{\Omega} L \hat{\Omega}^{-1}$, тобто для всіх пар $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$ матричнозначна 2-форма $\omega^{(2)}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]$ при умові (41) буде теж замкненою.

Розглянемо тепер природне продовження дій пари відображень $(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}^*)$ на весь простір $\mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$:

$$\tilde{\varphi} = \varphi\left(\Omega_\sigma^T[\varphi, \psi]\right)^{-1}\left(\Omega_{\sigma_0}^T[\varphi, \psi] - \int\limits_{S(\sigma, \sigma_0)} \left(\omega^{(2)}[\varphi, \psi]\right)^T\right) =$$

$$= \varphi - \tilde{\varphi}\left(\Omega_{\sigma_0}^T[\varphi, \psi]\right)^{-1} \int\limits_{S(\sigma, \sigma_0)} \left(\omega^{(2)}[\varphi, \psi]\right)^T =$$

$$= \left(1 - \tilde{\varphi}\left(\Omega_{\sigma_0}^T[\varphi, \psi]\right)^{-1} \partial_{(\sigma, \sigma_0)}^{-1} \left(\omega^{(2)}[\cdot, \psi]\right)^T\right)\varphi := \hat{\Omega}\varphi,$$

$$\tilde{\psi} = \psi(\Omega_\sigma[\varphi, \psi])^{-1}\left(\Omega_\sigma[\varphi, \psi] - \int\limits_{S(\sigma, \sigma_0)} \omega^{(2)}[\varphi, \psi]\right) =$$

$$= \psi - \tilde{\psi}\left(\Omega_{\sigma_0}[\varphi, \psi]\right)^{-1} \int\limits_{S(\sigma, \sigma_0)} \omega^{(2)}[\varphi, \psi] =$$

$$= \left(1 - \tilde{\psi}\left(\Omega_{\sigma_0}[\varphi, \psi]\right)^{-1} \partial_{(\sigma, \sigma_0)}^{-1} \omega^{(2)}[\varphi, \cdot]\right)\psi := \hat{\Omega}^*\psi,$$

де, за визначенням, для всіх пар $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}^*$

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &:= 1 - \tilde{\varphi}\left(\Omega_{\sigma_0}^T[\varphi, \psi]\right)^{-1} \partial_{(\sigma, \sigma_0)}^{-1} \left(\omega^{(2)}[\cdot, \psi]\right)^T, \\ \hat{\Omega}^* &:= 1 - \tilde{\psi}\left(\Omega_{\sigma_0}[\varphi, \psi]\right)^{-1} \partial_{(\sigma, \sigma_0)}^{-1} \omega^{(2)}[\varphi, \cdot], \end{aligned} \tag{42}$$

і $\partial_{(\sigma, \sigma_0)}^{-1}(\cdot) := \int_{S(\sigma, \sigma_0)} (\cdot)$ для довільної кусково-гладкої поверхні $S(\sigma, \sigma_0)$, натягнутої на два замкнені цикли σ і $\sigma_0 \subset \mathbf{R}^3$, як її межі.

Використовуючи оператори перетворень (42), можна, як і раніше, сконструювати Беклунд-перетворений диференціальний оператор $\tilde{L}: \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$, де, за визначенням,

$$\tilde{L} = L + \left[\hat{\Omega}, L\right]\hat{\Omega}^{-1}. \tag{43}$$

Оскільки вираз (43) містить обернений оператор $\hat{\Omega}^{-1} : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$, то на підставі властивостей симетрії відображень (42) знаходимо

$$\hat{\Omega}^{-1} = 1 - \varphi\big(\Omega^T_{\sigma_0}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]\big)^{-1}\partial^{-1}_{(\sigma,\sigma_0)}\big(\omega^{(2)}[\cdot, \tilde{\psi}]\big)^T,$$
$$\big(\hat{\Omega}^*\big)^{-1} = 1 - \psi\big(\Omega_{\sigma_0}[\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}]\big)^{-1}\partial^{-1}_{(\sigma,\sigma_0)}\omega^{(2)}[\tilde{\varphi}, \cdot] \tag{44}$$

для $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^*$ при умові, що виконані співвідношення (41).

Як результат прямих обчислень перетворення (43) з використанням виразів (44) можна знайти коефіцієнтні функції перетвореного за Дарбу – Беклундом оператора (36), параметризовані кусково-гладкими замкненими кривими $\sigma, \sigma_0 \subset \subset \mathbf{R}^3$. Оскільки ці вирази є громіздкими, їх явний вигляд для загальної форми оператора (36) тут не наводимо.

З іншого боку, враховуючи те, що у працях [5, 6] за допомогою методу оберненої задачі розсіювання було отримано широкий набір точних розв'язків для так званого нелінійного двовимірного рівняння Шредінгера, значний інтерес становить знаходження цього класу розв'язків, ґрунтуючись на розвинутій вище схемі перетворень Дарбу – Беклунда для двовимірних диференціальних операторів вигляду (36), яким ми маємо намір приділити увагу в подальших дослідженнях.

4. Приклади. 1. *Рівняння Хіроти – Сацуми.* Це рівняння вигляду

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xxx} + 3uu_x - 6vv_x,$$
$$v_t = -v_{xxx} - 3uv_x$$

задається [11] стандартним зображенням Лакса з L-оператором вигляду

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\partial_x^2 - \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ -f_{21} & -f_{22} \end{pmatrix}\partial_x - \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

на який накладено додаткову редукцію $f_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$; $u_{11} = u_{22} = u$, $u_{12} = = u_{21} = v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2; \mathbf{C})$.

Оскільки оператор (45) є в канонічній формі (1), для якої можна застосувати загальне перетворення типу Дарбу – Беклунда (18), за допомогою виразу (21) знаходимо

$$\tilde{L} = \hat{\Omega}L\hat{\Omega}^{-1} = (\hat{\Omega}L - L\hat{\Omega} + L\hat{\Omega})\hat{\Omega}^{-1} = L + [\hat{\Omega}, L]\hat{\Omega}^{-1}, \tag{46}$$

де $\hat{\Omega} = 1 - \varphi\Omega^{-1}\partial^{-1}\psi^T$, $L\varphi = 0$, $L^*\psi = 0$.

Враховуючи структуру редукцій, накладених вище на оператор L, легко помітити, що вираз

$$\psi = J\varphi, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

є сумісним з перетворенням (46), причому для матриць $F = \{f_{ij} : i, j = 1, 2\}$ та $U = \{u_{ij} : i, j = 1, 2\}$ має місце перетворення Беклунда

$$\tilde{F} - F = \varphi\Omega^{-1}\psi^T - \sigma\varphi\Omega^{-1}\psi^T\sigma = 0,$$
$$\tilde{U} - U = (\varphi\Omega^{-1}\psi^T)_x + \sigma(\varphi\Omega^{-1}\psi^T)_x\sigma + (\varphi\Omega^{-1})_x\psi^T - \sigma(\varphi\Omega^{-1})_x\psi^T\sigma, \tag{47}$$

де, за визначенням,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dx}\Omega = \varphi^T \psi.$$

Вибираючи $F \equiv 0$, з (28) отримуємо $\bar{F} = 0$ теж, а вибираючи розв'язок рівняння $L\varphi = 0$ з умовою $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbf{C}$, у симетричному вигляді

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(\lambda) & \varphi_{12}(\lambda) \\ \varphi_{21}(\lambda) & \varphi_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

з (47) знаходимо, що редукції

$$\bar{u}_{11} = \bar{u}_{22} = \bar{u}, \quad \bar{u}_{12} = \bar{u}_{21} = \bar{v}$$

теж виконуються.

Тим самим отримуємо остаточно покомпонентні вирази перетворень Дарбу – Беклунда для рівняння типу Хіроти – Сацуми:

$$\bar{u} = u + 2(\ln\beta)_{xx}, \quad \bar{v} = v + 2\beta^{-1}(\varphi_{11}\varphi_{21,x} - \varphi_{11,x}\varphi_{21}), \tag{48}$$

$$\beta_x = \varphi_{11}^2 - \varphi_{21}^2, \quad \beta_t = 2\lambda\left(\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2\right) + \frac{u}{2}\left(\varphi_{11}^2 - \varphi_{21}^2\right) + \varphi_{11,x}^2 - \varphi_{21,x}^2,$$

де, за побудовою,

$$(\sigma\partial^2 + \sigma U)\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda) \tag{49}$$

при певних $\lambda \in \mathbf{C}$, що забезпечують належність матриці $\Omega \in \operatorname{End}\mathbf{C}^2$ класу Шварца.

Співвідношення (48), (49) при початковому виборі $u = 0$, $v = c = \text{const} \in \mathbf{R}$ приводять шляхом елементарних обчислень (при $\lambda \to i\lambda$, де α_1, α_2, θ — довільні сталі, $i^2 = -1$) до явних розв'язків рівняння Хіроти – Сацуми:

$$u = (\ln\beta)_{xx}, \quad v = c + 2\beta^{-1}(\varphi_{11}\varphi_{21,x} - \varphi_{11,x}\varphi_{21}),$$

$$\beta = -\frac{i\alpha_1^2}{2}\sqrt{\frac{c+k}{k(k-c)}}\,e^{-2\sqrt{k}(2kt+x)}\left(1 + \frac{2(1+i)c\alpha_2}{\alpha_1(c+k)}e^{\theta} + \frac{i\alpha_2(c-k)}{\alpha_1^2(c+k)}e^{2\theta}\right), \tag{50}$$

$$\varphi_{11}\varphi_{21,x} - \varphi_{11,x}\varphi_{21} = \frac{2(i-1)k^{3/2}\alpha_2\alpha_1}{\sqrt{k^2-c^2}}\exp\left[-2\sqrt{k}(2kt+x) + \theta\right],$$

де $k^2 = c^2 + \lambda^2$, $\theta = \sqrt{k}\,[\,2(1-i)kt + (1+i)x\,]$.

При $c = 0$ з (50) отримуємо відомий 1-солітонний розв'язок рівняння Хіроти – Сацуми [11].

2. *Модифіковане рівняння Нижника – Новікова – Весєлова* [5]. Це рівняння має вигляд

$$\begin{gathered} v_t = u_{zzz} + 3u_z v + \frac{3}{2}uv_z + u_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3u_{\bar{z}}v^* + \frac{3}{2}uv^*_{\bar{z}}, \\ v_{\bar{z}} = (u^2)_z, \end{gathered} \tag{51}$$

а відповідне зображення Лакса

$$L_t + [L, M] - BL = 0,$$

де

$$L = \begin{pmatrix} \partial & u \\ u & \overline{\partial} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\partial^3 + \overline{\partial}^3\right) + 3\begin{pmatrix} 0 & -u_z \\ 0 & v \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} v^*_{\overline{z}} & 0 \\ u_{\overline{z}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & u_{\overline{z}} \\ -u_{\overline{z}} & 0 \end{pmatrix}\partial + \tag{52}$$

$$+ 3\begin{pmatrix} 0 & u_{\overline{z}} \\ -u_{\overline{z}} & 0 \end{pmatrix}\overline{\partial} + 3\begin{pmatrix} 0 & u_{\overline{z}\overline{z}} + u(v^* - v) \\ -u_{\overline{z}\overline{z}} - uv + uv^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Розглядаючи операторні вирази (52) як такі, що задані у просторі $\mathcal{H} \subset C^1\left(\mathbf{R}^2_{(t,x)}; H\right)$, де $H = L_2(\mathbf{R}^1_{(y)}; \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^2; \mathbf{C}^N))$, $N \in \mathbf{Z}_+$, легко отримуємо, що операторна рівність (51) еквівалентна сумісності таких лінійних співвідношень в $\mathcal{H}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (J\partial_y + F)\varphi := L\varphi = 0, \tag{53}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \left(J\partial_y^3 - F\partial_y^2 + Q\partial_y + S\right)\varphi := M\varphi = 0,$$

де $\varphi \in \mathcal{H}$, а матриці

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2u \\ -2u & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -iu^2 + 3iv^* & iu_x - 2u_y \\ iu_x + 2u_y & iu^2 - 3iv \end{pmatrix},$$

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-5iu_y - 3u_x)u + 3v^*_{\overline{z}} & -4u^3 - 4u_{yy} + u_{xx} \\ 4u^3 + 4u_{yy} - u_{xx} & (5iu_y - 3u_x)u + 3v_z \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & iu_{xy} + 6u(v + v^*) \\ iu_{xy} - 6u(v + v^*) & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що коли $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \in \mathcal{H}$ є розв'язком співвідношення (53) (при $N = 1$), то $\overline{\varphi} = \left(-\varphi_2^*, \varphi_1^*\right)^T$ теж є розв'язком (53).

Отже, розв'язок рівняння (53)

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & -\varphi_2^* \\ \varphi_2 & \varphi_1^* \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

при $N = 2$ враховує a priori властивості симетрії операторних виразів L та M в (53).

Використовуючи знову отриманий вираз бінарного перетворення Дарбу – Беклунда (19), легко знаходимо за допомогою формул (21) і (46) явний вираз для Беклунд-перетворених функцій $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}; \mathbf{C})$:

$$\bar{u} = u + i\tau_{12}, \quad \bar{v} = v + 2iu\tau_{12} + \tau_{11}^* - 2\left(\sigma_{21}\tau_{21} + \sigma_{11}^*\tau_{11}^*\right). \tag{54}$$

Тут матриці $\tau, \sigma \in \operatorname{End} \mathbf{C}^2$ мають вигляд

$$\tau = \varphi\,\Omega^{-1}\psi^T, \quad \sigma = \varphi_y\varphi^{-1}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial x} = \varphi\psi^T, \tag{55}$$

де $\psi \in \mathcal{H}$ є при $N = 2$ відповідним розв'язком формально спряжених до (53) рівнянь $L^*\psi = 0$ та $M^*\psi = 0$.

Формули (54) та (55) дають можливість знайти за допомогою елементарних обчислень як багатосолітонні, так і алгебраїчні точні розв'язки модифікованого рівняння Нижника – Новікова – Веселова, які через їх громіздкість не наводимо в явному вигляді.

5. Висновки. У статті на основі узагальненої тотожності Лагранжа для пар формально спряжених багатовимірних диференціальних операторів та асоційованої з нею спеціальної диференціально-гометричної структури запропоновано загальну схему побудови відповідних операторів перетворення, що описуються нетривіальними топологічними характеристиками. Описано структуру перетворень Дарбу та дано загальну структуру перетворень Дарбу – Беклунда, зокрема їх диференціально-геометричний аспект. Розглянуто як випадок диференціальних операторів від однієї змінної, так і випадок, коли такі оператори залежать від двох змінних. Отримані результати проілюстровано на прикладі системи рівнянь Хіроти – Сацуми та модифікованого рівняння Нижника – Новікова – Веселова.

1. *Matveev V. B., Salle M. I.* Darboux transformations and solutions. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1991. – 120 p.
2. *Nimmo J. C. C.* Darboux transformations from reductions of the KP-hierarchy. –2002. – 11 p. – (Preprint / Univ. Glasgow. November, 8).
3. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень // Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – **41**. – 236 с.
4. *Теория* солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
5. *Фаддеев Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1974. – С. 93 – 180.
6. *Нижник Л. П.* Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 2. – С. 332 – 335.
7. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 332 с.
8. *Манаков С. В.* Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные задачи // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 5. – С. 245 – 246.
9. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. – М.: Мир, 1973. – 188 с.
10. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
11. *Hirota R., Satsuma J.* On a integrable equations related with matrix differential operators // Phys. Lett. A. – 1981. – **85**. – P. 407 – 412.

Одержано 30.07.2002