УДК 517.938

О. В. Капустян, П. О. Касьянов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР НЕАВТОНОМНОГО ВКЛЮЧЕННЯ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

We consider a nonautonomous inclusion with right-hand side whose upper and lower selectors are determined by functions with discontinuities of first order. We prove that this problem generates a family of multivalued semiprocesses for which there exists a global attractor compact in the phase space.

Розглянуто неавтономне включення з правою частиною, що має в якості нижнього і верхнього селекторів функції з розривами першого роду. Доведено, що така задача породжує сім'ю багатозначних напівпроцесів, для якої існує компактний у фазовому просторі глобальний атрактор.

Розглянемо задачу

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \Delta y(t,x) + g(t,x) + u(t,x), \ (t,x) \in R_+ \times \Omega, \\
y(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \\
y(0,x) = y_0(x), \\
0 \le u(t,x) \le \theta(t, y(t,x)).
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Тут $x \in \Omega \subset R^n$ — обмежена область з гладкою межею, $g: R_+ \times \Omega \mapsto R$, $\theta: R_+ \times R \mapsto R_+$ неперервна відносно першої змінної і може мати розриви 1-го роду (стрибки) відносно другої. Ставиться питання: як за умов глобальної розв'язності поводяться розв'язки задачі (1) $y(t,x)$ при $t \to +\infty$? Оскільки задача (1) є неавтономною і неоднозначно розв'язною, для дослідження якісної поведінки розв'язків (1) доцільно використати теорію м-напівпроцесів [1–4]. Пов'язавши з задачею (1) сім'ю м-напівпроцесів і довівши для неї існування компактної в фазовому просторі притягуючої множини (глобального атрактора), ми в деякому сенсі відповімо на поставлене питання.

Задача (1) є частковим випадком задачі

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \Delta y(t,x) + g(t,x) + f(t, y(t,x)), \\
y(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \\
y(0,x) = y_0(x),
\end{gathered}
\tag{2}
$$

де $f: R_+ \times R \mapsto 2^R$ — багатозначне відображення. Для задачі (2) з ліпшицевою функцією $f(t,\cdot)$ в роботі [3] на основі теорії м-напівпроцесів доведено існування в фазовому просторі $L_2(\Omega)$ компактного глобального атрактора. Основна мета даної роботи — узагальнити запропоновану в [3] схему для задачі (2) з неліпшицевою функцією $f(t,\cdot)$. При цьому будемо суттєво використовувати метрику Скорохода [5].

Крім стандартних позначень для функціональних просторів із [6] будемо використовувати такі: $H = L_2(\Omega)$ з нормою $\|\cdot\|$ і скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$; якщо (X,ρ) — метричний простір, то $C_v(X)$ — сукупність усіх непорожніх обмежених замкнених опуклих підмножин X; $\beta(X)$ — сукупність усіх непорожніх обмежених підмножин X; для $A, B \subset X$

$$
\operatorname{dist}(A,B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} \rho(x,y), \qquad B_r(A) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x,A) < r\};
$$

$\overline{A}$ або $\mathrm{cl}_X A$ — замикання множини A в X; $\|A\|_+ = \sup_{a\in A}\|a\|$.

Будемо вважати, що для задачі (2) виконуються такі умови:

1) $g \in L_\infty(R_+; H)$;

2) $\forall t \in R_+ \ f(t, \cdot): R \mapsto C_v(R)$ — напівнеперервне зверху (н. н. зв.) відображення [7], $\forall y \in R \ \inf f(t, y) = 0$, $\sup f(t, y) := \theta(t, y)$ — однозначна функція, яка неперервна відносно першої змінної, а відносно другої змінної не має розривів 2-го роду і неперервна справа;

3) $\exists D_1, D_2 \geq 0 \ \forall (t, y) \in R_+ \times R \ |\theta(t, y)| \leq D_1 + D_2|y|$;

4) існують монотонна послідовність чисел $\{R_i\}_{i=1}^\infty$, $R_i \to +\infty$, $i \to \infty$, і неперервна монотонна функція $w(\cdot)$, $\lim_{c \to 0+} w(c) = 0$, такі, що $\forall i \geq 1$, $t \in R_+$

$$\Delta_c^i(\theta(t, \cdot)) := \sup_{y - c \leq y_1 \leq y \leq y_2 \leq y + c} [\min\{|\theta(t, y_1) - \theta(t, y)|; |\theta(t, y_2) - \theta(t, y)|\}] +$$

$$+ \sup_{-R_i + c \leq y \leq -R_i} |\theta(t, y) - \theta(t, -R_i)| + \sup_{R_i - c \leq y \leq R_i} |\theta(t, y) - \theta(t, R_i)| \leq \omega(c);$$

5) $\exists C_1, C_2 \geq 0 \ \forall t, s \in R_+, \ y \in R \ |\theta(t, y) - \theta(s, y)| \leq (C_1 + C_2|y|)\alpha(|t - s|)$, де $\alpha(\cdot)$ — неперервна функція, $\alpha(t) \to 0$, $t \to 0+$;

6) $\exists M \geq 0, \ \varepsilon > 0 \ \forall t \in R_+, \ y \in R \ \theta(t, y)y \leq (\lambda_1 - \varepsilon)y^2 + M$, де λ_1 — перше власне значення $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$.

***Зауваження* 1.** З н. н. зв. відображення $f(t, \cdot)$ безпосередньо отримуємо н. н. зв. функції $\theta(t, \cdot)$ в класичному сенсі.

***Зауваження* 2.** Умову $\inf f(t, y) = 0$ введено для зручності. Можна розглядати функцію $\theta_1(t, y) = \inf f(t, y)$ — напівнеперервну знизу, накладаючи на θ_1 умови, аналогічні умовам 2–6. Також для зручності будемо розглядати симетричні інтервали $[-R_i, R_i]$, які можна замінити інтервалами вигляду $[-L_i, R_i]$, де $L_i, R_i \to +\infty$.

***Зауваження* 3.** Умова 4 не гарантує ліпшицевість функції $\theta(t, \cdot)$, проте кожна глобально ліпшицева функція задовольняє умову 4.

При виконанні умов 1–6 схема подальших міркувань така:

1) розглянувши всі можливі зсуви f по t, утворити компактну множину цих зсувів Σ і помістити задачу (2) в сім'ю задач з правими частинами f_σ, $\sigma \in \Sigma$;

2) на розв'язках цих задач утворити сім'ю м-напівпроцесів, для якої на основі [3, 4] довести існування компактного атрактора.

Розглянемо множину P всіх функцій $\psi: R \mapsto R_+$, що мають такі властивості: ψ не мають розривів 2-го роду, неперервні справа і н. н. зв.; $\forall y \in R$ $|\psi(y)| \leq D_1 + D_2|y|$; $\forall i \geq 1 \ \forall \psi \in P \ \Delta_c^i(\psi) \leq w(c)$.

Нехай $\Lambda^i = \{\lambda(\cdot): [-R_i, R_i] \mapsto [-R_i, R_i]$, неперервна монотонно зростаюча, $\lambda(\pm R_i) = \pm R_i\}$. Для кожних $i \geq 1$, $\psi_1, \psi_2 \in P$ розглянемо функції

$$\rho_i(\psi_1, \psi_2) := \inf_{\lambda \in \Lambda^i} \left[\sup_{|y| \leq R_i} |\psi_1(y) - \psi_2(\lambda(y))| + \sup_{|y| \leq R_i} |y - \lambda(y)| \right],$$

$$\rho(\psi_1, \psi_2) := \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} \frac{\rho_i(\psi_1, \psi_2)}{1 + \rho_i(\psi_1, \psi_2)}.$$

Лема 1. (P, ρ) — *компактний метричний простір.*

Доведення. З [5] маємо, що функція ρ задає метрику на P. Розглянемо послідовність $\{\psi_n\} \subset P$. Тоді для будь-яких $i \geq 1$ і $y \in [-R_i, R_i]$ маємо $|\psi_n(y)| \leq D_1 + D_2 R_i$, $\Delta_c^i(\psi_n) \leq w(c)$. Звідси з урахуванням результатів [5] випливає, що існує $\psi^i \colon [-R_i, R_i] \to R$ така, що за послідовністю $\rho_i(\psi_n, \psi^i) \to \to 0$, $n \to \infty$, $|\psi^i(y)| \le D_1 + D_2 R_i$, $\Delta_c^i(\psi^i) \le w(c)$. Позначимо $\alpha_n := := 2\rho_i(\psi_n, \psi^i)$. Тоді існує $\lambda_n(\cdot) \in \Lambda^i$ така, що

$$\sup_{|u| \le R_i} \left|\psi_n(\lambda_n(u)) - \psi^i(u)\right| + \sup_{|u| \le R_i} |u - \lambda_n(u)| \le \alpha_n.$$

Отже, для будь-якого $u \in [-R_i, R_i]$ $\psi(u) \ge \psi_n(\lambda_n(u)) - \alpha_n \ge -\alpha_n$, що гарантує невід'ємність функції ψ^i. Аналогічно $|\psi^i(u)| \le |\psi_n(\lambda_n(u))| + \alpha_n \le \le \alpha_n + D_1 + D_2(\alpha_n + |u|)$, що гарантує нерівність $|\psi^i(u)| \le D_1 + D_2|u|$. Доведемо н. н. зв. функції ψ^i. Позначимо $\varphi_n(u) = \psi_n(\lambda_n(u))$. Легко бачити, що $\varphi_n(\cdot)$ — н. н. зв. і $\sup_{|u| \le R_i}\left|\varphi_n(u) - \psi^i(u)\right| \to 0$, $n \to \infty$. Тоді для будь-яких u_0, $\varepsilon > 0$ існують $\delta > 0$, $N_0 \ge 1$ такі, що $\forall\, u \in B_\delta(u_0)$

$$\psi^i(u) - \psi^i(u_0) \le$$

$$\le \psi^i(u) - \varphi_{N_0}(u) + \varphi_{N_0}(u) - \varphi_{N_0}(u_0) + \psi_{N_0}(u_0) - \psi^i(u_0) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

що і доводить н. н. зв. функції ψ^i. Тепер доведемо, що із збіжностей $\rho_i(\psi_n, \varphi_i) \to 0$ і $\rho_{i+1}(\psi_n, \varphi_{i+1}) \to 0$, $n \to \infty$, випливає $\rho_i(\varphi_i, \varphi_{i+1}) \to 0$. Позначимо

$$\gamma_n := \inf_{\beta \in \Lambda^{i+1}} \left[\sup_{|u| \le R_i} \left|\psi_n(u) - \varphi^{i+1}(\beta(u))\right| + \sup_{|u| \le R_i} |u - \beta(u)|\right].$$

Тоді α_n, $\gamma_n \to 0$, $n \to \infty$, і існують $\lambda_n \in \Lambda^i$, $\beta_n \in \Lambda^{i+1}$ такі, що

$$\sup_{|u| \le R_i} \left|\psi_n(u) - \varphi^i(\lambda_n(u))\right| + \sup_{|u| \le R_i} |u - \lambda_n(u)| < \alpha_n + \frac{1}{n},$$

$$\sup_{|u| \le R_i} \left|\psi_n(u) - \varphi^{i+1}(\beta_n(u))\right| + \sup_{|u| \le R_i} |u - \beta_n(u)| < \gamma_n + \frac{1}{n}.$$

Нехай $u \in [-R_i, R_i]$ — точка неперервності функції φ^i, φ^{i+1}. Тоді $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N \ge 1$ $\forall\, n \ge N$ $\left|\varphi^i(u) - \varphi^i(\lambda_n(u))\right| < \varepsilon$, $\left|\varphi^{i+1}(u) - \varphi^{i+1}(\beta_n(u))\right| < \varepsilon$. Далі,

$$\left|\varphi^i(u) - \varphi^{i+1}(u)\right| \le$$

$$\le \left|\varphi^i(u) - \varphi^i(\lambda_n(u))\right| + \left|\varphi^i(\lambda_n(u)) - \varphi^{i+1}(u)\right| +$$

$$+ \left|\varphi^{i+1}(u) - \varphi^{i+1}(\beta_n(u))\right| + \left|\varphi^{i+1}(\beta_n(u)) - \varphi^{i+1}(u)\right| < 2\varepsilon + \alpha_n + \gamma_n + \frac{2}{n}.$$

Звідси $\varphi^i(u) = \varphi^{i+1}(u)$ і з [5] маємо шукане. Далі з $\{\psi_n\}$ стандартною діагональною процедурою можна виділити збіжну підпослідовність, причому граничний елемент буде належати P.

Лему доведено.

Отже, (P, ρ) — компакт і функція $\psi \in P$ — н. н. зв. Тепер розглянемо простір M усіх багатозначних відображень $f \colon R \ni y \mapsto [0, \psi(y)]$, $\psi \in P$, і функцію $P_M(f_1, f_2) := \rho(\psi_1, \psi_2)$. Тоді (M, ρ_M) — компактний метричний простір і будь-яке $f \in M$ є н. н. зв. відображенням.

Лема 2. *Якщо* $g(t, x)$ *задовольняє умову* 1, *а* $f(t, y)$ — *умови* 2–5, *то* $f \in \in C(R_+; M)$ *і множина*

$$\Sigma = H_+(g)\times H_+(f) = \operatorname{cl}_{L^{\rm loc}_{2,\omega}(R_+;H)}\{g(t+h,\cdot)\,|\,h\geq 0\}\times \operatorname{cl}_{C(R_+;H)}\{f(t+h,\cdot)\,|\,h\geq 0\}$$

є компактом в $L^{\rm loc}_{2,\omega}(R_+;H)\times C(R_+;M)$.

Доведення. Те, що $H_+(g)$ — компакт в $L^{\rm loc}_{2,\omega}(R_+;H)$, випливає з [1]. Оскільки $\forall\, t\in R_+$ $f(t,\cdot)=[0,\theta(t,\cdot)]\in M$ і

$$\rho_M(f(t),f(s)) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\frac{\sup_{|y|\leq R_i}|\theta(t,y)-\theta(s,y)|}{1+\sup_{|y|\leq R_i}|\theta(t,y)-\theta(s,y)|} < \varepsilon,$$

як тільки $|t-s|<\delta(\varepsilon)$, то функція $f(t)$ рівномірно неперервна і множина $\{f(t,\cdot)|t\geq 0\}$ — передкомпакт в M. Тоді з [2] маємо компактність $H_+(f)$ в $C(R_+;M)$.

Лему доведено.

Надалі $\sigma\in\Sigma\Leftrightarrow\sigma(t)=(f_\sigma(t,\cdot),g_\sigma(t,\cdot))$, $\sigma_0(t)=(f(t,\cdot),g(t,\cdot))$. Відомо [2], що $\forall\, g_\sigma\in H_+(g)$ $\|g_\sigma\|_{L_\infty(R_+;H)}\leq C_0=\|g\|_{L_\infty(R_+;H)}$. Для кожного $\sigma\in\Sigma$ розглянемо багатозначне відображення $F_\sigma\colon R_+\times H\mapsto 2^H$,

$$F_\sigma(t,u) = \{y\in H|y(x)\in f_\sigma(t,u(x))+g_\sigma(t,x) \text{ для м. в. } x\in\Omega\}. \qquad (3)$$

Лема 3. *Для відображення* (3) *для будь-яких* $\sigma\in\Sigma$, $(t,u)\in R_+\times H$ *виконуються такі умови:*

1) $F_\sigma(t,u)\in C_v(H)$;

2) $F_\sigma(\cdot,\cdot)$ — *н. н. зв. відносно кожної змінної;*

3) $\exists\, K_1,\ K_2\geq 0$ $\|F_\sigma(t,u)\|_+\leq K_1+K_2\|u\|$.

Доведення. $F_\sigma(t,u)\neq\varnothing$. Справді, $f_\sigma(t,\cdot)\in M$, тобто $f_\sigma(t,\cdot)=[0,\theta_\sigma(t,\cdot)]$, $\theta_\sigma(t,\cdot)\in P$. Звідси випливає, що відображення $f_\sigma(t,\cdot)$ є н. н. зв. і згідно з [7] є вимірним. Тоді існує вимірний селектор $\xi_\sigma(t,\cdot)\in f_\sigma(t,\cdot)$ і для будь-якого $u\in H$ $\xi_\sigma(t,u(\cdot))$ — вимірний селектор $f_\sigma(t,u(\cdot))$. Звідси $y(x)=\xi_\sigma(t,u(x))+g_\sigma(t,x)\in f_\sigma(t,u(x))+g_\sigma(t,x)$, і оскільки $|f_\sigma(t,v)|_+\leq D_1+D_2|v|$, $\|g_\sigma(t)\|\leq C_0$, то $y\in H$ і $y\in F_\sigma(t,u)$.

Опуклість і обмеженість $F_\sigma(t,u)$ є очевидними. Доведемо замкненість. Нехай $y_n\in F_\sigma(t,u)$, $y_n\to y$ в H. Тоді за послідовністю $y_n(x)\to y(x)$ майже скрізь на Ω і оскільки $y_n(x)\in[g_\sigma(t,x),\theta_\sigma(t,u(x))+g_\sigma(t,x)]$, то $y(x)\in f_\sigma(t,u(x))+g_\sigma(t,x)$. Отже, умову 1 доведено.

Умова 3 є очевидним наслідком нерівностей $|f_\sigma(t,v)|\leq D_1+D_2|v|$, $\|g_\sigma\|_{L_\infty(R_+;H)}\leq C_0$. Доведемо, що для будь-якого $t\geq 0$ відображення $F_\sigma(t,\cdot)\colon H\mapsto C_v(H)$ є н. н. зв. Спочатку покажемо, що це відображення буде хемінеперервним, тобто з того, що $u_n\to u_0$ і $\delta_n(p)=\sup_{v\in F_\sigma(t,u_n)}(p,v)\to\eta_0$ $\forall\, p\in H$, повинно випливати $\delta_0(p)=\sup_{v\in F_\sigma(t,u_0)}(p,v)\geq\eta_0$. Справді, для будь-яких $p\in H$ і $n\geq 1$ існує $v_n\in F_\sigma(t,u_n)$ таке, що $(p,v_n)>\delta_n(p)-\dfrac{1}{n}$. Оскільки $\|F_\sigma(t,u_n)\|_+\geq K_1+K_2\|u_n\|$, то $\{v_n\}$ — обмежена в H. Отже, за підпослідовністю $v_n\to v_0$ слабко в H і $(p,v_0)\geq\eta_0$. Залишилося показати, що $v_0\in F_\sigma(t,u_0)$. Для майже всіх $x\in\Omega$

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\, N\geq 1\quad\forall\, n\geq N$$

$$v_n(x)\in[g_\sigma(t,x),\theta_\sigma(t,u_n(x))+g_\sigma(t,x)]\subset[g_\sigma(t,x),\theta_\sigma(t,u_0(x))+g_\sigma(t,x)+\varepsilon],$$

тому що $u_n(x)\to u_0(x)$ і $\theta_\sigma(t,\cdot)$ є н. н. зв. За теоремою Мазура [6] існують опуклі комбінації

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n v_{n_i}, \quad n_i \geq N,$$

такі, що $S_n \to v_0$ в H. Звідси $S_n(x) \to v_0(x)$ майже скрізь, і оскільки $S_n(x) \in [g_\sigma(t,x), \theta_\sigma(t, u_0(x)) + g_\sigma(t,x)]$, то $v_0(x) \in [g_\sigma(t,x), \theta_\sigma(t, u_0(x)) + g_\sigma(t,x) + \varepsilon]$. Тоді $v_0 \in F_\sigma(t, u_0)$, отже, $F_\sigma(t,\cdot)$ є хемінеперервним. Враховуючи слабку компактність $F_\sigma(t, u_0)$ в H, із [7] безпосередньо отримуємо шукане н. н. зв. відображення.

Тепер доведемо, що $\forall\, u \in H$ $F_\sigma(\cdot, u): R_+ \mapsto C_v(H)$ є н. н. зв. Спочатку покажемо, що $\forall\, v \in R$ $\theta_\sigma(\cdot, v): R_+ \mapsto R_+$ — н. н. зв. Для $f_\sigma = [0, \theta_\sigma] \in H_+(f)$ існує послідовність $\{t_n\}$ така, що $\forall\, R \geq 0$ $\sup_{t\in[0,R]} \rho(\theta(t_n+t), \theta_\sigma(t)) \to 0$, $n \to \infty$, тобто $\forall\, i \geq 1$ $\sup_{t\in[0,R]} \rho_i(\theta(t_n+t), \theta_\sigma(t)) \to 0$, $n \to \infty$. За умовою 5

$$\forall\, v \in [-R_i, R_i] \quad \forall\, t, s \in R_+ \quad |\theta(t_n+t, v) - \theta(t_n+s, v)| \leq (K_1 + K_2 R_i)\alpha(|t-s|).$$

Оскільки

$$\rho_i(\theta(t_n+t), \theta(t_n+s)) \leq \sup_{v\in[-R_i, R_i]} |\theta(t_n+t, v) - \theta(t_n+s, v)|,$$

то $\forall\, i \geq 1$ $\rho_i(\theta_\sigma(t), \theta_\sigma(s)) \leq (K_1 + K_2 R_i)\alpha(|t-s|)$ $\forall\, \sigma \in \Sigma$. Нехай $v_0 \in [-R_i, R_i]$, $t_0 \in R_+$. Тоді $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta < \varepsilon$ $\forall\, v \in B_\delta(v_0)$ $\theta_\delta(t_0, v) < \theta_\delta(t_0, v_0) + \varepsilon$. Нехай $t_n \to t_0$. Тоді $\exists\, N \geq 1$ $\forall\, n \geq N$ $\rho_i(\theta_\sigma(t_n), \theta_\sigma(t_0)) < \dfrac{\delta}{2}$, отже,

$$\inf_{\lambda\in\Lambda^i}\left[\sup_{|v|\leq R_i} |\theta_\sigma(t_n, v) - \theta_\sigma(t_0, \lambda(v))| + \sup_{|v|\leq R_i} |v - \lambda(v)|\right] < \frac{\delta}{2}.$$

Звідси існує $\lambda_n \in \Lambda^i$ таке, що

$$\sup_{|v|\leq R_i} |\theta_\sigma(t_n, v) - \theta_\sigma(t_0, \lambda(v))| + \sup_{|v|\leq R_i} |v - \lambda_n(v)| < \delta,$$

звідки, в свою чергу,

$$\theta_\sigma(t_n, v_0) < \theta_\sigma(t_0, \lambda_n(v_0)) + \delta < \theta_\sigma(t_0, v_0) + \delta + \varepsilon < \theta_\sigma(t_0, v_0) + 2\varepsilon.$$

Отже, $\theta_\sigma(\cdot, v)$ — н. н. зв. Тоді аналогічно попередньому доводиться, що $\forall\, u \in H$ відображення $F_\sigma(\cdot, u): R_+ \mapsto C_v(H)$ — хемінеперервне, отже, н. н. зв. Лему доведено.

Тепер розглянемо сім'ю задач

$$\frac{dy(t)}{dt} \in Ay(t) + F_\sigma(t, y(t)), \; t \in [\tau, T],$$
$$y|_{t=\tau} = y_\tau, \tag{4}$$

де $\sigma \in \Sigma$,

$$A = -\partial\varphi, \qquad \varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega y_x^2\,dx, & y \in H_0^1(\Omega); \\ +\infty & \text{— у противному разі.} \end{cases}$$

При $\sigma = \sigma_0$ задача (4) — це операторна постановка задачі (2).

Згідно з лемою 3 і результатами [8–10] для довільних $\tau \geq 0$, $T > \tau$, $\sigma \in \Sigma$, $y_\tau \in H$ задача (4) має принаймні один сильний розв'язок, визначений на $[\tau, T]$, тобто існують $y(\cdot) \in C([\tau, T]; H)$ і $l_\sigma(\cdot) \in L_2(\tau, T; H)$, $l_\sigma(t) \in F_\sigma(t, y(t))$ такі, що

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + l_\sigma(t),\ t \in [\tau, T],$$
$$y|_{t=\tau} = y_\tau. \tag{5}$$

Надалі будемо розглядати лише сильні розв'язки (4) і позначати $y(\cdot) = I(y_\tau)l_\sigma(\cdot)$.

Тепер на розв'язках (4) утворимо сім'ю відображень $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$:

$$U_\sigma(t, \tau, y) := \{y(t) \mid y(\cdot) \text{ — розв'язок (4)},\ y(\tau) = y,\ \sigma \in \Sigma\}. \tag{6}$$

Згідно з [2] на Σ означено напівгрупу зсуву $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, $T(h)\sigma(t) = \sigma(t+h)$, причому $T(h)$ — неперервна на Σ і $T(h)\Sigma \subset \Sigma$.

Лема 4 [3]. *$\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ із (6) — сім'я м-напівпроцесів, тобто для довільних $\sigma \in \Sigma$, $t \geq \tau$, $y \in H$ виконуються такі рівності:*

$$U_\sigma(t, t, y) = y,$$
$$U_\sigma(t, \tau, y) = U_\sigma(t, s, U_\sigma(s, \tau, y)) \quad \forall\, s \in [\tau, t],$$
$$U_\sigma(t+h, \tau+h, y) = U_{T(h)\sigma}(t, \tau, y) \quad \forall\, h \geq 0.$$

Означення [3, 4]. *Множина $\Xi \subset H$ називається глобальним атрактором сім'ї $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, якщо*

Ξ — рівномірно притягуюча множина, тобто $\forall\, \tau \geq 0$ $\forall\, B \in \beta(H)$ $\operatorname{dist}\left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t, \tau, B), \Xi\right) \to 0,\ t \to +\infty;$

$\forall\, t \geq 0$ $\Xi \subset U_{\sigma\in\Sigma}(t, 0, \Xi)$;

для довільної рівномірно притягуючої множини Y маємо $\Xi \subset \overline{Y}$.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема. *Сім'я м-напівпроцесів (6) має компактний в H глобальний атрактор $\Xi \subset H$.*

***Зауваження* 4.** Звідси, зокрема, випливає, що в фазовому просторі H всі траєкторії задачі (2) при $t \to +\infty$ „намотуються" на компактну в H множину Ξ.

Доведення. Згідно з загальною теорією м-напівпроцесів [3, 4] для доведення теореми досить перевірити справедливість щодо $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ таких тверджень:

1) $\forall\, B \in \beta(H)$ $\exists\ T \geq 0$ $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{t\geq T} U_\sigma(t, 0, B) \in \beta(H)$;

2) $\exists\, B_0 \in \beta(H)$ $\forall\, B \in \beta(H)$ $\operatorname{dist}\left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t, 0, B), B_0\right) \to 0,\ t \to +\infty$;

3) для довільних $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$, $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$, $B \in \beta(H)$, $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, B)$ послідовність $\{\xi_n\}$ є передкомпактною в H;

4) відображення $\Sigma \times H \ni (\sigma, y) \mapsto U_\sigma(t, 0, y)$ — замкненозначне і н. н. зв.

Спочатку доведемо, що для довільних $\sigma \in \Sigma$, $\upsilon \in R$, $t \in R_+$ виконується $\theta_\sigma(t, \upsilon)\upsilon \leq (\lambda_1 - \varepsilon)\upsilon^2 + M$. Для $\sigma = \sigma_0$ відповідна нерівність гарантується умовою 5. Оскільки $\theta_\sigma(t, \upsilon) \in R_+$, то достатньо розглянути $\upsilon < 0$. Введемо функції $\psi_\sigma(\upsilon) = \theta_\sigma(t, \upsilon)$ і $\psi_n(\upsilon) = \theta(t + h_n, \upsilon)$, де h_n такі, що $\rho_l(\theta_\sigma(t), \theta(t + h_n)) \to 0$, $n \to \infty$. Тоді

$$\rho_l(\psi_\sigma, \psi_n) = \inf_{\lambda\in\Lambda^l}\left[\sup_{|\upsilon|\leq R_l}\left|\theta_\sigma(t,\upsilon)\upsilon - \theta(t+h_n, \lambda(\upsilon))\lambda(\upsilon)\right| + \sup_{|\upsilon|\leq R_l}\left|\upsilon - \lambda(\upsilon)\right|\right] \leq$$

$$\le \inf_{\lambda \in \Lambda^l} \Bigg[\sup_{|\upsilon| \le R_l} |\theta_\sigma(t,\upsilon)\upsilon - \theta(t+h_n, \lambda(\upsilon))\upsilon| +$$

$$+ \sup_{|\upsilon| \le R_l} |\theta(t+h_n, \lambda(\upsilon))\upsilon - \theta(t+h_n, \lambda(\upsilon))\lambda(\upsilon)| + \sup_{|\upsilon| \le R_l} |\upsilon - \lambda(\upsilon)| \Bigg] \le$$

$$\le \inf_{\lambda \in \Lambda^l} \Bigg[R_l \sup_{|\upsilon| \le R_l} |\theta_\sigma(t,\upsilon) - \theta(t+h_n, \lambda(\upsilon))| +$$

$$+ (D_1 + D_2 R_l) \sup_{|\upsilon| \le R_l} |\upsilon - \lambda(\upsilon)| + \sup_{|\upsilon| \le R_l} |\upsilon - \lambda(\upsilon)| \Bigg] \le$$

$$\le (D_1 + 1 + (D_2+1)R_l)\rho_l(\theta_\sigma(t), \theta(t+h_n)).$$

Отже, $\forall\, \delta > 0 \;\exists\; N \ge 1 \;\forall\, n \ge N \;\; \rho_l(\psi_\sigma, \psi_n) < \dfrac{\delta}{2}$. Тоді існує $\lambda_\delta \in \Lambda^l$ така, що

$$\sup_{|\upsilon| \le R_l} |\theta_\sigma(t,\upsilon)\upsilon - \theta(t+h_n, \lambda_\delta(\upsilon))\lambda_\delta(\upsilon)| + \sup_{|\upsilon| \le R_l} |\upsilon - \lambda_\delta(\upsilon)| < \delta.$$

Звідси для всіх $\upsilon \in [-R_l, R_l]$ маємо нерівність

$$\theta_\sigma(t,\upsilon)\upsilon \le \delta + \theta(t+h_n, \lambda_\delta(\upsilon))\lambda_\delta(\upsilon) \le \delta + (\lambda_1 - \varepsilon)(\lambda_\delta(\upsilon))^2 + M \le$$

$$\le \delta + (\lambda_1 - \varepsilon)(\upsilon + \delta)^2 + M$$

і при $\delta \to 0$ отримуємо шукане.

Тепер доведемо умови 1, 2. Нехай $y(\cdot) = I(y_\tau) l_\sigma(\cdot)$, $l_\sigma(t) \in F_\sigma(t, y(t))$. Тоді для м. в. $(t, x) \in [\tau, T] \times \Omega$

$$l_\sigma(t,x) = \xi_\sigma(t,x) + g_\sigma(t,x), \;\; \xi_\sigma(t,x) \in [0, \theta_\sigma(t, y(t,x))].$$

Звідси

$$l_\sigma(t,x) y(t,x) = \xi_\sigma(t,x) y(t,x) + g_\sigma(t,x) y(t,x) \le$$

$$\le (\lambda_1 - \varepsilon) y^2(t,x) + M + \frac{\varepsilon}{2} y^2(t,x) + 12\varepsilon g_\sigma^2(t,x) =$$

$$= \left(\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) y^2(t,x) + M + \frac{1}{2\varepsilon} g_\sigma^2(t,x).$$

Тоді

$$(l_\sigma(t), y(t)) \le \left(\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \| y(t) \|^2 + M_1.$$

Отже, домножаючи рівняння задачі (5) на $y(t)$, маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| y(t) \|^2 + \lambda_1 \| y(t) \|^2 \le \left(\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \| y(t) \|^2 + M_1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| y(t) \|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| y(t) \|^2 \le M_1.$$

Звідси

$$\| y(t) \|^2 \le \| y(\tau) \|^2 e^{-\varepsilon(t-T)} + \frac{2M_1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

З оцінки (7) одержуємо, що для

$$B_0 = \overline{B_{\sqrt{1+\frac{2M_1}{\varepsilon}}}(0)}$$

виконується умова $\forall B \in \beta(H)\ \exists T(B) \geq 0\ \forall \sigma \in \Sigma\ \forall t \geq T(B)\ \ U_\sigma(t, 0, B) \subset B_0$. Звідси одразу маємо умови 1, 2.

Для доведення умови 3 досить перевірити передкомпактність множини $K = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(t, 0, B_0)$ для довільного $T > 0$. Справді, для довільних $B \in \beta(H)$, $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$, $\{t_n, t_n \to +\infty\}$ починаючи з деякого N маємо

$$U_{\sigma_n}(t_n, 0, B) = U_{\sigma_n}\bigl(T + (t_n - T), t_n - T, U_{\sigma_n}(t_n - T, 0, B)\bigr) \subset$$
$$\subset U_{\sigma_n}(T + (t_n - T), t_n - T, B_0) = U_{T(t_n - T)\sigma_n}(T, 0, B_0) \subset \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(T, 0, B_0).$$

Нехай $\{\xi_n\} \subset K$. Тоді $\xi_n = y_n(T)$, $y_n(\cdot) = I(y_n^0) l_{\sigma_n}(\cdot)$, $l_{\sigma_n}(t) \in F_{\sigma_n}(t, y_n(t))$, де $y_n^0 \in B$. Аналогічно попереднім міркуванням отримуємо оцінку

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_n(t)\|^2 + \|y_n(t)\|^2_{H_0^1} \leq \left(\lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|y_n(t)\|^2 + M_1.$$

Звідси

$$\forall t \in [0, T] \quad \|y_n(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\int_0^t \|y_n(s)\|^2_{H_0^1} ds \leq \left\|y_n^0\right\|^2 + 2M_1 t. \tag{8}$$

З іншого боку, скориставшись [10], маємо

$$t\|y_n(t)\|^2_{H_0^1} \leq \int_0^t s\left\|l_{\sigma_n}(s)\right\|^2 ds + \int_0^t \|y_n(s)\|^2_{H_0^1} ds. \tag{9}$$

Враховуючи оцінку $\left\|l_{\sigma_n}(s)\right\| \leq D_1 + D_2\|y_n(s)\|$ і (8), (9), для $t = T$ отримуємо оцінку

$$\|y_n(T)\|^2_{H_0^1} \leq M_2\left(1 + \left\|y_n^0\right\|^2\right), \tag{10}$$

де константа M_2 не залежить від n. З компактності вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ одразу маємо передкомпактність $\{y_n(T)\}$ в H, що і доводить умову 2.

Доведемо умову 3. Спочатку доведемо, що відображення $\Sigma \times H \ni (\sigma, y) \mapsto U_\sigma(T, 0, y)$ має замкнений графік. Нехай $\sigma_n \to \sigma$ в Σ, $y_n^0 \to y^0$, $p_n \to p$ в H, $p_n \in U_{\sigma_n}\left(T, 0, y_n^0\right)$. Потрібно довести, що $p \in U_\sigma\left(T, 0, y^0\right)$. Маємо $y_n(\cdot) = I(y_n^0) l_{\sigma_n}(\cdot)$, $y_n(T) = p_n$, $l_{\sigma_n}(s) \in F_{\sigma_n}(s, y_n(s))$ для майже всіх $s \in [0, T]$. Тоді $\left\|l_{\sigma_n}(s)\right\| \leq D_1 + D_2\|y_n(s)\|$ і на підставі (8) $\left\{l_{\sigma_n}(\cdot)\right\}$ є обмеженою в $L_\infty(0, T; H)$. Згідно з [9] існують функції $l_\sigma(\cdot)$, $y(\cdot)$ такі, що за підпослідовністю $l_{\sigma_n} \to l_\sigma$ слабко в $L_1(0, T; H)$ $y_n \to y$ в $C([0, T; H))$. Звідси $y(T) = p$, $y(0) = y^0$, $y_n(t, x) \to y(t, x)$ для майже всіх $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$. Далі, $l_{\sigma_n}(t, x) \in \left[g_{\sigma_n}(t, x), \theta_{\sigma_n}(t, y_n(t, x)) + g_{\sigma_n}(t, x)\right]$, і оскільки $\sigma_n \to \sigma$ в H, то існує θ_σ така, що $\forall i \geq 1\ \forall R \geq 0\ \ \sup_{t \in [0, R]} \rho_i\left(\theta_{\sigma_n}(t), \theta_\sigma(t)\right) \to 0$. Виберемо $i \geq 1$ так, щоб $y(t, x) \in \left[-\frac{R_i}{2}, \frac{R_i}{2}\right]$ для деякої фіксованої пари $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$. Тоді для будь-яких $t \in [0, R]$ і $\delta > 0$ існує $N_0 \geq 1$ таке, що для будь-якого $n \geq N_0$ існує $\lambda_n \in \Lambda^i$ таке, що

$$\sup_{|v| \leq R_i}\left|\theta_{\sigma_n}(t, v) - \theta_\sigma(t, \lambda_n(v))\right| + \sup_{|v| \leq R_i}|v - \lambda_n(v)| < \delta.$$

Для $v_0 = y(t, x)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta < \varepsilon$ $\forall v \in B_\delta(v_0)$ $\theta_\sigma(t, v) < \theta_\sigma(t, v_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Далі, $\exists N_1 \geq 1$ $\forall n \geq N_1$ $|y_n(t, x) - y(t, x)| < \frac{\delta}{2}$. Тоді

$$\forall n \geq \max\{N_0, N_1\}$$

$$\left|\theta_{\sigma_n}(t, y_n(t, x)) - \theta_\sigma(t, \lambda_n(y_n(t, x)))\right| + |\lambda_n(y_n(t, x)) - y_n(t, x)| < \frac{\delta}{2},$$

$$\theta_{\sigma_n}(t, y_n(t, x)) \leq \theta_\sigma(t, \lambda_n(y_n(t, x))) + \frac{\delta}{2} \leq \theta_{\sigma_n}(t, y(t, x)) + \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} <$$
$$< \theta_\sigma(t, y(t, x)) + \varepsilon.$$

Отже, $\xi_{\sigma_n}(t, x) = l_{\sigma_n}(t, x) - g_{\sigma_n}(t, x) \in [0, \theta_\sigma(t, y(t, x)) + \varepsilon]$, де $\xi_{\sigma_n} \to \xi_\sigma = l_\sigma - g_\sigma$ слабко в $L_1(0, T; H)$. Згідно з [8]

$$\xi_\sigma(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k \geq n} \xi_{\sigma_k}(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(t)$$

для майже всіх $t \in (0, T)$.

Отже, існують $z_n(t) \in A_n(t)$ такі, що $z_n(t) \to \xi_\sigma(t)$ в H,

$$z_n(t) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^n \xi_{\sigma_{k_l}}(t).$$

Оскільки $z_n(t) \in [0, \theta_\sigma(t, y(t, x)) + \varepsilon]$, то $\xi_\sigma(t, x) \in [0, \theta_\sigma(t, y(t, x)) + \varepsilon]$, отже, $l_\sigma(t) \in F_\sigma(t, y(t))$, і замкненість графіка доведено. Звідси ж маємо замкненозначність. Доведемо н. н. зв. Припустимо, що це не так. Тоді існують окіл $O(U_\sigma(T, 0, y_0))$ і послідовність $p_n \in U_{\sigma_n}(T, 0, y_n^0)$ такі, що $\sigma_n \to \sigma$, $y_n^0 \to y_0$ і $p_n \notin O(U_\sigma(T, 0, y_0))$. Оскільки $y_n^0, y_0 \in B \in \beta(H)$, то $p_n \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(T, 0, B)$ — передкомпакт в H. Звідси $p_n \to p$ і з замкненості графіка відображення $(\sigma, y) \to U_\sigma(T, 0, y)$ маємо $p \in U_\sigma(T, 0, y^0)$, що призводить до суперечності. Теорему доведено.

1. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures and Appl. – 1994. – **73**, № 3. – P. 279–333.
2. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Trajectory attractors for nonautonomous evolution equations // Ibid. – 1997. – **76**, № 10. – P. 913–965.
3. *Melnik V. S., Valero J.* On global attractors of multivalued semiprocesses and nonautonomous evolution inclusions // Set-Valued Analysis. – 2000. – **8**. – P. 375–403.
4. *Капустян А. В.* Глобальные аттракторы неавтономного уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. – 2002. – **10**. – С. 1378–1382.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М: Наука, 1977. – 567 с.
6. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 623 с.
7. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. – Berlin: Birkhauser, 1990. – 460 p.
8. *Толстоногов А. А.* О решениях эволюционных включений. 1 // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 3. – С. 145–162.
9. *Толстоногов А. А., Уманский Я. И.* О решениях эволюционных включений. 2 // Там же. – № 4. – С. 163–174.
10. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. – Bucuresti: Editura Acad., 1976. – 346 p.

Одержано 22.03.2002