УДК 519.14

А. А. Махнев (Ин-т математики механики УрОРАН, Екатеринбург, Россия)

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С ПАРАМЕТРАМИ (486, 165, 36, 66) *

We prove that a strongly regular graph with the parameters (486, 165, 36, 66) does not exist. Since the indicated parameters are parameters of a pseudogeometrical graph for $pG_2(5, 32)$, we have that partial geometries $pG_2(5, 32)$ and $pG_2(32, 5)$ do not exist. Finally, a neighborhood of any vertex of the pseudogeometrical graph for $pG_3(6, 80)$ is a pseudogeometrical graph for $pG_2(5, 32)$, whence a pseudogeometrical graph for a partial geometry $pG_3(6, 80)$ (i.e., a strongly regular graph with the parameters (1127, 486, 165, 243)) does not exist.

Доведено, що регулярний граф із параметрами (486, 165, 36, 66) не існує. Оскільки вказані параметри є параметрами псевдогеометричного графа для $pG_2(5, 32)$, то не існують часткові геометрії $pG_2(5, 32)$ і $pG_2(32, 5)$. Нарешті, окіл будь-якої вершини псевдогеометричного графа для $pG_3(6, 80)$ є псевдогеометричним графом для $pG_2(5, 32)$, тому псевдогеометричний граф для часткової геометрії $pG_3(6, 80)$ (тобто сильно регулярний граф із параметрами (1127, 486, 165, 243)) не існує.

1. Введение. Будем рассматривать неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть X — некоторое множество вершин графа Γ. В данной работе *подграф* X будет обозначать подграф, индуцированный Γ на X. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначим расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф на множестве всех вершин графа Γ, которые находятся на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ будем называть *окрестностью* вершины a и обозначать через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначим подграф $\{a\}\bigcup[a]$, а через $[a]'$ — подграф $\Gamma - a^\perp$.

Валентностью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным валентности* k, если валентность любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен валентности k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a]\bigcap[b]$ содержит μ вершин для любых двух несмежных вершин a, b из Γ.

Пусть $\mathcal{F}$ — класс графов. Граф Γ называется *локально $\mathcal{F}$-графом*, если окрестность любой его вершины принадлежит $\mathcal{F}$. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных с i вершинами из Δ, $x_i(\Delta)=|X_i(\Delta)|$. Полный многодольный граф $\{M_1;\ldots;M_n\}$ с долями M_i порядка m_i назовем $K_{m_1,\ldots,m_n}$*-графом*. Подграф $[a]\bigcap[b]$ назовем (λ-) μ-*подграфом*, если вершины a, b (смежны) находятся на расстоянии 2.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α-*частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется в точности α прямых, проходящих через a и пересекающих L (через $pG_\alpha(s,t)$ будем обозначать некоторую геометрию из класса всех α-частичных геометрий порядка (s,t)). Если $\alpha=1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. *Точечным графом частичной геометрии*

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00772).

называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф α-частичной геометрии порядка (s,t) сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Для графов с этими параметрами $s+1$ достигает границы Хоффмана для клик (см. [1]), и каждая вершина вне $(s+1)$-клики L смежна с α вершинами из L. Сильно регулярный граф, имеющий указанные выше параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$. Заметим, что псевдогеометрический граф для $pG_2(5,32)$ имеет параметры (486, 165, 36, 66).

В данной статье развивается метод изучения строения сильно регулярного графа с помощью его сильно регулярных подграфов, предложенный в [2].

Теорема. *Сильно регулярный граф с параметрами* (486, 165, 36, 66) *не существует.*

Эта теорема имеет несколько важных следствий. Во-первых, в теореме 4.3 [3] получено описание цепочек $pG_\alpha(s_2,t)\subset pG_\alpha(s_1,t)\subset pG_\alpha(s,t)$. При этом в качестве одного из исключений выступает цепочка $pG_2(1,5)\subset pG_2(6,5)\subset$ $\subset pG_2(32,5)$. Но из этой теоремы следует несуществование геометрии $pG_2(32,5)$, поэтому справедливо такое следствие.

***Следствие* 1.** *Предположим, что имеется цепочка геометрий* $pG_\alpha(s_2,t)\subset$ $\subset pG_\alpha(s_1,t)\subset pG_\alpha(s,t)$. *Если* $t\geq 2\alpha$, *то* $\alpha=1$, $s=t^2$, $s_1=t$ *и* $s_2=1$.

Во-вторых, в доказательстве основной теоремы из [4] используется несуществование геометрии $pG_2(32,5)$. Однако доказательство леммы 1.6 из [4] о несуществовании геометрий $pG_2(32,5)$ и $pG_2(27,4)$ проведено некорректно. Таким образом, теорема настоящей работы обеспечивает справедливость основной теоремы из [4].

В-третьих, если Γ является псевдогеометрическим графом для геометрии $pG_\alpha(s,t)$ и для графов Γ и $\Lambda=\Gamma(a)$ достигается равенство в условии Крейна, то $s=2\alpha$ (см. теорему 3 [5]). Если $\alpha=2$, то такой граф существует и является графом Маклафлина [6]. Первый неизвестный случай возникает при $\alpha=3$. В этом случае окрестность любой вершины псевдогеометрического графа для $pG_3(6,80)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(5,32)$.

***Следствие* 2.** *Псевдогеометрический граф для геометрии* $pG_3(6,80)$ *не существует.*

В-четвертых, в работе [7] доказано, что сильно регулярный локально $GQ(4,8)$-граф имеет параметры (870, 165, 36, 30) или (486, 165, 36, 66). Последний из этих графов является псевдогеометрическим для $pG_2(5,32)$. В [2] установлено, что псевдогеометрический граф для $pG_2(5,32)$ является локально $GQ(4,8)$-графом. Таким образом, теорема настоящей работы редуцирует изучение сильно регулярных локально $GQ(4,8)$-графов к графам с параметрами (870, 165, 36, 30).

2. Предварительные результаты. Приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), Δ — *индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и валентностями вершин* $d_1,\ldots,d_N$. *Тогда*

$$(v-N)-(kN-2M)+\left(\lambda M+\mu\left(\binom{N}{2}-M\right)-\sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right)=x_0+\sum_{i=3}^{N}\binom{i-1}{2}x_i,$$

где $x_i=x_i(\Delta)$.

Доказательство. См. доказательство леммы 1 из [8].

Лемма 2. *Если* Γ — *псевдогеометрический граф для частичной геометрии* $pG_2(s,t)$, *для которого достигается равенство в условии Крейна, то* $s=4$, 5 *или* 7 *и для любой вершины* $a \in \Gamma$ *подграф* $[a]$ *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(s-1, x)$, *где* $x = 9,\ 8$ *или* 9 *соответственно.*

Доказательство. Условие Крейна для псевдогеометрических графов имеет вид $(s+1-2\alpha)t \le (s-1)(s+1-\alpha)^2$. В данном случае $t = (s-1)^3/(s-3)$, поэтому $s-3 = 1, 2, 4$ или 8. При этом $t = 27, 32, 54$ или 125, следовательно, $x = 9, 8, 9$ или $125/10$ соответственно.

В связи с теоремой настоящей работы и леммой 2 представляют интерес два предположения.

Гипотеза А. *Не существует псевдогеометрический граф для частичной геометрии* $pG_2(7, 54)$.

Гипотеза Б. *Не существует частичная геометрия* $pG_2(7, 54)$.

Лемма 3. *Пусть* x_j, $j = 1, \ldots, k$, *— неотрицательные вещественные числа и для некоторого индекса* i *выполняются равенства* $\Sigma x_j = \gamma$, $\Sigma j x_j = i\gamma$, $\Sigma \binom{j}{2} x_j = \binom{i}{2}\gamma$. *Тогда* $x_j = 0$ *для* $j \ne i$, $x_i = \gamma$.

Доказательство. По условию $\Sigma j(j-1)x_j = i(i-1)\gamma$, поэтому $\Sigma j^2 x_j = i^2\gamma$. Теперь $0 \le \Sigma (j-i)^2 x_j = \Sigma j^2 x_j - 2i\Sigma j x_j + i^2 \Sigma x_j = 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

3. Вложение октаэдров в Γ. Пусть в дальнейшем Γ — псевдогеометрический граф для геометрии $pG_2(5, 32)$. Тогда Γ сильно регулярен с параметрами $(486, 165, 36, 66)$. Далее, для Γ достигается равенство в условии Крейна и для любой вершины a графа Γ подграф $[a]'$ сильно регулярен с параметрами $(320, 99, 18, 36)$. В [2] доказано, что Γ является локально $GQ(4,8)$-графом, поэтому любой λ-подграф из Γ состоит из девяти изолированных 4-клик.

Лемма 4. *Граф* Γ *содержит октаэдр.*

Доказательство. Пусть a, b — несмежные вершины графа Γ, $\Delta = [a] \cap [b]$, $c \in \Delta$. Тогда между $\Delta(c)$ и $\Delta - c^\perp$ 72 ребра, причем $\left|\Delta - c^\perp\right| = 56$. Поэтому некоторая вершина $d \in \Delta - c^\perp$ смежна с двумя вершинами e, f из $\Delta(c)$ и $\Sigma = \{a, b; c, d; e, f\}$ — октаэдр. Лемма доказана.

Зафиксируем октаэдр $\Sigma = \{a, b; c, d; e, f\}$ и положим $X_i = X_i(\Sigma)$, $x_i = |X_i|$. Если вершина из X_3 смежна с тремя вершинами некоторой грани октаэдра, то будем говорить, что она лежит напротив этой грани.

Лемма 5. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *окрестность вершины, лежащей напротив грани* ace, *содержит две вершины, лежащие напротив грани* bdf, *и по одной вершине, лежащей напротив граней* adf, bcf, bde;

2) *пусть напротив граней* ace *и* bdf *лежат вершины* p, q, r *и* p^*, q^*, r^*, *причем через* z^* *обозначена единственная вершина, не смежная с вершиной* z *из* $\{p, q, r\}$. *Тогда* $\Sigma' = \{p, p^*; q, q^*; r, r^*\}$ *является октаэдром, причем* $X_4 = X_0(\Sigma)$, $X_3(\Sigma) = X_1 \cup \Sigma$, $X_2 = X_2(\Sigma')$.

Доказательство. Тройка вершин a, c, e лежит в некоторой 6-клике, причем любая вершина вне этой клики смежна точно с двумя ее вершинами. Это влечет утверждение 1 леммы.

Напротив граней pqr и $p^*q^*r^*$ октаэдра Σ' лежат вершины a, c, e и b, d, f, причем вершина u из X_4 смежна с двумя вершинами в каждой из этих троек. Поэтому $u \in X_0(\Sigma')$. Аналогично рассматриваются $X_i(\Sigma')$ для $i = 2, 3$. Лемма доказана.

Будем говорить, что октаэдр Σ' построен по паре противоположных граней ace и bdf октаэдра Σ, и обозначать $\Sigma' = \Sigma(ace, bdf)$.

Лемма 6. *Справедливы следующие утверждения*:

1) $x_0 = x_4$, $x_1 = 102 - 4x_4$, $x_2 = 270 + 6x_4$, $x_3 = 108 - 4x_4$ *и* $x_i = 0$ *для* $i \geq 5$;

2) *если* $w \in X_0$, $Y_i = X_i \cap [w]'$ *и* $y_i = |Y_i|$, *то* $y_3 = 32 - y_0 - 3y_4$, $y_1 = 90 - 3y_0 - y_4$, $y_2 = 192 + 3y_0 + 3y_4$, *в частности*, $x_1 - y_1 = 12 - 3(x_0 - y_0) - (x_4 - y_4)$;

3) *если* X_0 *содержит ребро* uw, *то вершины* u, w *содержатся в* 6-*клике* M, *совпадающей с* $X_4 \cup X_0$.

Доказательство. По лемме 1 $x_0 + x_3 + 3x_4 = 108$. Заметим, что вершина из X_i для $i \geq 4$ может быть смежной только с четырехугольником из Σ. Пусть четырехугольники $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, e, f\}$ и $\{c, d, e, f\}$ смежны соответственно с α, β и γ вершинами из X_4. Положим $\Lambda = [a]' \cap [b]'$ и напомним, что $|\Lambda| = 220$, каждая вершина из $[a] \cap [b]$ смежна со 100 вершинами из Λ, любое ребро из $[a] \cap [b]$ попадает в окрестности в точности 28 вершин из Λ и подграф $[c] \cap [d]$ (подграф $[e] \cap [f]$) содержит $48 + \alpha$ вершин ($48 + \beta$ вершин) из Λ. Значит, Λ содержит γ вершин из X_4; $4(7 - \gamma)$ вершин из X_3; $34 + \alpha + \gamma$ вершин из X_2, смежных с c, d, и $34 + \beta + \gamma$ вершин, смежных с e, f; $56 + 4\gamma$ вершин из X_2, смежных с ребрами из Σ, и $68 - 4\gamma - 2\alpha - 2\beta$ вершин из X_1. Таким образом, Λ содержит $220 - \alpha - \beta - \gamma$ вершин, смежных с вершинами из Σ, в частности, $x_0 = \alpha + \beta + \gamma = x_4$. По симметричности Σ имеем $x_1 = 102 - 4(\alpha + \beta + \gamma) = 102 - 4x_4$, следовательно, $x_2 = 270 + 6x_4$, $x_3 = 108 - 4x_4$. Утверждение 1 леммы доказано.

Пусть $w \in X_0$. Напомним, что $[w]'$ является сильно регулярным графом с параметрами $(320, 99, 18, 36)$. По лемме 1 $y_0 + y_3 + 3y_4 = 32$, поэтому $y_1 = 90 - 3y_0 - 3y_4$, $y_2 = 192 + 3y_0 + 3y_4$, в частности, $x_1 - y_1 = 12 - 3(x_0 - y_0) - (x_4 - y_4)$. Утверждение 2 леммы доказано.

Пусть X_0 содержит ребро uw, $\delta = |[u] \cap [w] \cap X_3|$ и $y_i^* = |X_i \cap [u]'|$.

Любая 4-клика из $[u] \cap [w]$ может содержать следующие вершины:

а) 4 вершины из X_3;

б) 2 вершины из X_3 и по одной из X_2, X_4;

в) 2 вершины из X_4 и по одной из X_1, X_3;

г) по 2 вершины из X_2, X_4;

д) вершину из X_0 и три из X_4.

Подграф $[w] - [u]$ содержит $(108 - 4x_4) - (32 - y_0 - 3y_4) - \delta$ вершин из X_3. Значит, $[u] \cup [w]$ содержит $152 - 8x_4 + y_0 + y_0^* + 3y_4 + 3y_4^* - \delta$ вершин из X_3. Но это число не больше x_3, поэтому $\delta \geq 44 - 4x_4 + y_0 + y_0^* + 3y_4 + 3y_4^*$. Если $x_4 = 2$, то $\delta = 36$ и $y_4 = y_4^* = 0$. Противоречие с тем, что в этом случае X_4 не пересекает $[u] \cap [w]$. Итак, $x_4 \geq 3$.

Если $[u] \cap [w]$ содержит вершину из X_0, то u, w содержатся в 6-клике M, содержащей по три вершины из X_0, X_4. В этом случае $y_0 \leq x_0 - 3$, $y_4 \leq x_4 - 3$ и если $x_4 > 3$, то $\delta \geq 32 + 2y_4 + 2y_4^*$, противоречие. Значит, $x_4 = 3$ и утверждение 3 леммы справедливо.

Если $x_4 = 3$ и X_4 содержится в $[u] \cap [w]$, то из описания 4-клик в $[u] \cap [w]$ следует, что восемь из них имеют тип а), а девятая — тип д). В этом случае утверждение 3 леммы справедливо. Если же X_4 не содержится в $[u] \cap [w]$, то y_4 или y_4^* не равно 0. Поэтому $\delta \geq 35$, противоречие.

Итак, можно считать, что $x_4 \geq 4$ и $[u] \cap [w]$ не содержит вершин из X_0. Допустим, что $[u] \cap [w]$ содержит не более двух вершин из X_4. Тогда

$x_4 \le y_4 + y_4^*$, $x_0 - 2 \le y_0 + y_0^*$ и $\delta \ge 42$, противоречие. Таким образом, $[u] \cap [w]$ содержит не менее трех вершин из X_4.

Допустим, что $[w] - u^{\perp}$ содержит вершину из X_0. Тогда $y_0 \le x_0 - 3$ и согласно утверждению 2 леммы $x_4 - y_4 \le 3$. Значит, эти нестрогие неравенства превращаются в равенства. Если $[u] - w^{\perp}$ также содержит вершину из X_0, то $y_0 = y_0^* = x_0 - 3$ и $x_4 - y_4 = x_4 - y_4^* = 3$. В этом случае $\delta \ge 32$, противоречие. Если же $[u] - w^{\perp}$ не содержит вершин из X_0, то $y_0 + y_0^* \ge 2x_0 - 5$, $x_4 - y_4 = 3$, $x_4 - y_4^* \le 6$ и $\delta \ge 30 + 2y_4 + 2y_4^*$, снова противоречие.

Таким образом, $[u] \cup [w]$ содержит точно две вершины из X_0, а каждое из чисел $x_4 - y_4$ и $x_4 - y_4^*$ не больше 6. Поэтому $\delta \ge 40 - 2x_4 + 3y_4 + 3y_4^* \ge$ $\ge 28 + 2y_4 + 2y_4^*$.

Допустим, что $y_4 \ne 0$. Тогда $\delta \ge 30 + 2y_4^*$, $x_4 = 4$, $y_4^* = 0$ и $[u] \cup [w]$ содержит 6 клик типа а) и 3 клики типа б). Противоречие с тем, что в этом случае $\delta \ge 35$.

Предположим теперь, что $y_4 = y_4^* = 0$. Пусть $[u] \cap [w]$ содержит i клик типа б) и j клик типа в). Тогда $\delta \le 4(9 - i - j) + 2i + j$. Если $x_4 = 4$, то $\delta \ge 32$, противоречие. Значит, $x_4 \ge 5$. Если $[u] \cap [w]$ содержит вершину из X_1, то $x_4 - y_4$ не больше 5, поэтому $x_4 = 5$ и $\delta \ge 30$. В этом случае $i + 2j = 5$, поэтому $\delta \le 28$, противоречие. Значит, $j = 0$. Если $x_4 = 6$, то $\delta \le 24$, если же $x - 4 = 5$, то $\delta \le 26$. В этом случае получим противоречие с тем, что $\delta \ge 40 - 2x_4$.

Лемма 7. *Пусть $w \in X_4$. Тогда $X_0 \subset [w]$, $[w]$ содержит $9 - x_4$ вершин из X_3, если $X_4 \cup X_0$ не является 6-кликой, и не пересекает X_3 — в противном случае.*

Доказательство. Положим $\Delta = \{w\} \cup \Sigma$, $Y_i = X_i(\Delta)$, $y_i = |Y_i|$. Сосчитав число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$, получим равенства $\Sigma y_i = 479$, $\Sigma i y_i = 1123$ и $\Sigma \binom{i}{2} y_i = 848$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, получаем $y_0 + y_3 +$ $+ 3y_4 + 6y_5 = 204$. Отсюда следуют равенства $y_1 = 39 - 3y_0 - y_4 - 3y_5$, $y_2 = 236 +$ $+ 3y_0 + 3y_4 + 8y_5$, $y_3 = 204 - y_0 - 3y_4 - 6y_5$.

Пусть $u \in X_0$, $X_i' = X_i \cap [u]'$, $x_i' = |X_i'|$. По лемме 6 $x_3 - x_3' = 76 - (x_0 - x_0') -$ $- 3(x_4 - x_4')$.

Предположим, что $[w]$ не содержит вершину u из X_0. Пусть $Y_i' = Y_i \cap [u]'$, $y_i' = |Y_i'|$. По лемме 6 подграфы X_0 и X_4 являются кокликами, поэтому $y_0' = y_0 - 1$, $y_5 = 0$.

Сосчитав число ребер между Δ и $[u]' - \Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $[u]' - \Delta$, получим равенства $\Sigma y_i' = 313$, $\Sigma i y_i' = 661$ и $\Sigma \binom{i}{2} y_i' = 410$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, получаем $y_0' + y_3' + 3y_4' = 62$. Отсюда $y_1' = 27 - 3y_0' - y_4'$, $y_2' = 224 + 3y_0' + 3y_4'$, $y_3' = 62 - y_0' -$ $- 3y_4'$.

Мы получили равенства $y_1 - y_1' = 9 - (y_4 - y_4')$, $y_2 - y_2' = 15 + 3(y_4 - y_4')$, $y_3 - y_3' = 141 - 3(y_4 - y_4')$. Заметим, что $Y_1 = (X_1 - [w]) \cup (X_0 \cap [w])$, поэтому $Y_1 - Y_1'$ совпадает с $(X_1 - [w]) \cap [u]$. Пусть $[w]$ содержит β вершин из $X_1 \cap [u]$. Тогда $y_1 - y_1' = x_1 - x_1' - \beta = 9 - (x_4 - x_4') - \beta$, поэтому $y_4 - y_4' =$

$=(x_4-x_4')+\beta$, $[w]$ содержит β вершин из $X_3\cap[u]$ и $66-2\beta$ вершин из $X_2\cap[u]$ (причем $66-2\beta\geq 48$). С другой стороны, $y_1-y_1'\leq 9$ и $y_2-y_2'\leq 42$, противоречие. Первое заключение леммы доказано.

Пусть $[w]$ содержит γ_i вершин из X_i. Рассмотрим подграф $\Sigma'=\Sigma(ace, bdf)$ и положим $Z_i=X_i(\Sigma')$. Тогда $w\in Z_0$, $X_3=Z_1\cup\Sigma'$, $x_4(\Sigma')=x_4$. Если $X_4\cup X_0$ не является 6-кликой, то $y_5=y_0=0$. Тогда $y_4=x_4-1+\gamma_3$, $\gamma_0=x_4$, и из леммы 6 и первого заключения леммы следует, что $[w]$ содержит $9-x_4$ вершин из Z_1, поэтому $\gamma_3=9-x_4$.

Если же $X_4\cup X_0$ является 6-кликой, то Z_1 пусто, поэтому $\gamma_3=0$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть вершина p лежит напротив грани ace октаэдра Σ, $\Omega=\{p\}\cup\Sigma$, $Z_i=X_i(\Omega)$, $z_i=|Z_i|$. Для вершины $u\in Z_0$ положим $z_i'=|Z_i\cap[u]'|$. Тогда*:

1) $z_1=72-3z_0-z_4$, $z_2=168+3z_0+3z_4$, $z_3=239-z_0-3z_4$, $z_1'=48-3z_0'-z_4'$, $z_2'=180+3z_0'+3z_4'$, $z_3'=85-z_0'-3z_4'$;

2) $[p]\cap[u]$ *содержит* β *вершин из* X_1, $12+\beta$ *из* X_3 *и* $54-2\beta$ *вершин из* X_2.

Доказательство. Сосчитав число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$ и число 2-путей с концами в Ω и средней вершиной в $\Gamma-\Omega$, получим равенства $\Sigma z_i=479$, $\Sigma i z_i=1125$ и $\Sigma\binom{i}{2}z_i=885$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, получаем $z_0+z_3+3z_4=239$. Отсюда следуют равенства для z_i.

По лемме 6 подграф Z_0 является кокликой, поэтому $z_0'=z_0-1$. Далее, $x_0'=x_0-1$, $x_4'=x_4-1$. Сосчитав число ребер между Ω и $[u]'-\Omega$ и число 2-путей с концами в Ω и средней вершиной в $[u]'-\Omega$, получим равенства $\Sigma z_i'=313$, $\Sigma i z_i'=663$ и $\Sigma\binom{i}{2}z_i'=435$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, получаем $z_0'+z_3'+3z_4'=85$. Отсюда следуют равенства для z_i' в утверждении 1 леммы.

Пусть $\delta_i=|[p]\cap X_i|$, $\delta_i'=|[p]\cap X_i\cap[u]'|$. Заметим, что $\delta_4=0$, $\delta_0=x_0-z_0$, $\delta_3'=z_4'$. Если X_0 — коклика, то $z_0'=x_0-\delta_0-1$. Но и в случае, когда $X_0\cup X_6$ является 6-кокликой, последнее равенство верно, так как в этом случае $x_0=3$, $\delta_0=2$ и $z_0=1$.

Далее, $z_1=\delta_0+|X_1-[p]|=102-4x_4+\delta_0-\delta_1$, $z_2=|X_2-[p]|+|X_1\cap[p]|=270+6x_4-\delta_2+\delta_1$, $z_3=\left|X_3-p^{\perp}\right|+|X_2\cap[p]|=107-4x_4-\delta_3+\delta_2$, $z_4=x_4+\delta_3$. Сравнивая выражения для z_i, получаем равенства $\delta_1=30-2\delta_0+\delta_3$, $\delta_2=132+\delta_0-2\delta_3$. Аналогично $\delta_1'=42-2\delta_0+\delta_3'$, $\delta_2'=54+\delta_0-2\delta_3'$.

Пусть $[p]$ содержит β вершин из $X_1\cap[u]$. Тогда $\beta=\delta_1-\delta_1'=\delta_3-\delta_3'-12$ и $\delta_2-\delta_2'=78-2(\delta_3-\delta_3')=54-2\beta$. Таким образом, $[p]$ содержит $12+\beta$ вершин из $X_3\cap[u]$ и $54-2\beta$ вершин из $X_2\cap[u]$.

Лемма 9. *Если $x_4\neq 0$, то $X_0\cup X_4$ является 6-кликой.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\Sigma_1=\Sigma(ace, bdf)$, $u\in X_0$. Тогда $[u]$ не содержит некоторую пару противоположных вершин p, p^* октаэдра Σ_1. Пусть $\beta=|[p]\cap[u]\cap X_1|$, $\beta^*=\left|[p^*]\cap[u]\cap X_1\right|$, $[p]\cap[p^*]$ содержит γ_i вершин из $X_i\cap[u]$. Без ограничения общности полагаем $\beta^*\geq\beta$.

Положим $\Delta=\Sigma\cup\{p,p^*\}$, $Y_i=X_i(\Delta)$, $y_i=|Y_i|$, $Y_i'=Y_i\cap[u]'$, $y_i'=|Y_i'|$. Сосчитав число ребер между Δ и $\Gamma-\Delta$ и число 2-путей с концами в

Δ и средней вершиной в $\Gamma-\Delta$, получим равенства $\Sigma y_i = 478$, $\Sigma i y_i = 1284$ и $\Sigma\binom{i}{2}y_i = 1242$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, получаем $y_0+y_3+3y_4+6y_5 = 436$. Отсюда $y_1 = 150-3y_0-3y_4-3y_5$, $y_2 = 3y_0+3y_4+8y_5-108$, $y_3 = 436-y_0-3y_4-6y_5$.

По лемме 6 подграф Y_0 является кокликой, поэтому $y_0' = y_0-1$. Сосчитав число ребер между Δ и $[u]'-\Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $[u]'-\Delta$, получим равенства $\Sigma y_i' = 312$, $\Sigma i y_i' = 756$ и $\Sigma\binom{i}{2}y_i' = 618$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, получаем $y_0'+y_3'+3y_4'+6y_5' = 174$. Таким образом, $y_1-y_1' = 105-(y_4-y_4')-3(y_5-y_5')$, $y_2-y_2' = 3(y_4-y_4')+8(y_5-y_5')-201$, $y_3-y_3' = 261-3(y_4-y_4')-6(y_5-y_5')$.

С другой стороны, $[p]\cap X_0 \subset [p^*]$, следовательно, $y_1-y_1' = 9-x_4-\beta-\beta^*+\gamma_1$, и $y_4-y_4' = 96+x_4+\beta+\beta^*-\gamma_1-3(y_5-y_5')$, $y_3-y_3' = 3(y_5-y_5')-17-3x_4-3\beta-3\beta^*+3\gamma_1$. Согласно лемме 8 $[u]\cap Y_3$ содержит γ_1 вершин из X_1 и $108-2\beta-2\beta^*-2\gamma_2$ вершин из X_3, причем $[u]\cap[p]\cap[p^*]$ содержит точно 30 вершин из Γ, четыре из которых лежат в Σ_1. Поэтому $\gamma_2 \le 26-\gamma_1$ и $y_3-y_3' \ge 108-2\beta-2\beta^*-2\gamma_2+\gamma_1 \ge 56-2\beta-2\beta^*+3\gamma_1$. Таким образом, $3(y_5-y_5') \ge 73+3x_4+\beta+\beta^*$. С другой стороны, по лемме 8 $y_5-y_5' \le 12+\beta$, поэтому $36+3x_4+\beta^* \le 2\beta$. Противоречие с тем, что согласно лемме 8 $\beta \le 27$. Лемма доказана.

4. Удаление $K_{3,3,3}$-подграфов. В этом пункте предполагаем, что граф Γ содержит $K_{3,3,3}$-подграф $\Omega = \{a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3\}$. Пусть $\Delta = \{a_1,b_1,c_1\}$, L — единственная 6-клика, содержащая Δ, $\Delta' = L-\Delta$, $\Sigma = \Omega-\Delta$, $\mathcal{S}(\Sigma)$ — множество из четырех октаэдров, построенных по граням октаэдра Σ. Положим $X_i = X_i(\Omega)$, $x_i = |X_i|$. Если $w \in X_0$, то $w \in X_0(\Sigma)$ и по лемме 9 $[w]$ содержит $X_4(\Sigma) = \Delta$, противоречие. Значит, $x_0 = 0$.

Применив лемму 1 к подграфу Ω, получим равенство $\sum_{j\ge 3}\binom{j-1}{2}x_j = 477$. Подсчитав число ребер между $\Gamma-\Omega$ и Ω, будем иметь $\Sigma x_j = 477$, $\Sigma j x_j = 9\cdot 159 = 1431$. Поэтому и $\Sigma\binom{j}{2}x_j = 1431$. Теперь по лемме 3 с $i=3$ получим $x_3 = 477$, $x_j = 0$ для $j \ne 3$.

Лемма 10. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $Y_i = X_i(\Delta)$, *то* $Y_3 = \Delta'$, $Y_2 = X_0(\Delta')$ *содержит* 96 *вершин и* $Y_1 = X_1(\Delta')$ *содержит* 288 *вершин*;

2) *для вершины* $d \in Y_2$, *смежной с* a_1, b_1, *подграф* $Y_2(d)$ *содержит треугольник из* $[a_1]\cap[b_1]$ *и* 8*-коклику в каждом из подграфов* $[a_1]\cap[c_1]$, $[b_1]\cap[c_1]$;

3) *подграф* $Y_2(c_2)\cap Y_2(c_3)$ *содержится в* Σ, *в частности, любая* 2*-коклика, смежная с ребром из* Δ, *лежит не более чем в одном октаэдре из* Y_2.

Доказательство. Заметим, что Y_3 содержится в L. Далее, окрестность любого ребра из Δ содержит 4 вершины из L и восемь 4-клик из Y_2, поэтому $|Y_2| = 96$. Поскольку каждая вершина из $\Gamma-L$ смежна с двумя вершинами из L, то $Y_2 = X_0(\Delta')$, $Y_1 = X_1(\Delta')$. Наконец, окрестность каждой вершины из Δ содержит пять вершин из Δ, 64 — из Y_2 и 96 вершин из Y_1, поэтому $|Y_1| = 288$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 легко следует из утверждения 1.

Так как c_2, c_3 — несмежные вершины из $[a_1]\cap[b_1]$, то $Y_2(c_2)\cap Y_2(c_3)$ не пересекает $[a_1]\cap[b_1]$. Далее, $Y_2(c_2)\cap Y_2(c_3)$ содержится в $X_4(\Omega)$, поэтому Σ — единственный октаэдр из Y_2, содержащий c_2, c_3.

Лемма 11. *Пусть pq — ребро из Y_2, $p\in[a_1]\cap[b_1]$, $q\in[a_1]\cap[c_1]$. Тогда pq содержится не более чем в одном октаэдре из Y_2.*

Доказательство. Ввиду леммы 9 $[p]\cap[q]$ содержит не более двух вершин из $[b_1]\cap[c_1]$. Если $[p]\cap[q]$ содержит две вершины u, w из $[b_1]\cap[c_1]$, то по лемме 10 коклика $\{u, w\}$ лежит не более чем в одном октаэдре из Y_2.

Лемма 12. *Пусть $\mathcal{S}_0=\{\Sigma\}$, $\mathcal{S}_{i+1}=\bigcup_{\Sigma'\in\mathcal{S}_i}\mathcal{S}(\Sigma')$. Тогда $\mathcal{S}_4$ содержит 121 октаэдр с вершинами в Y_2.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{S}_1$ состоит из четырех октаэдров. Согласно лемме 5 эти октаэдры содержатся в $X_2(\Delta')$. Далее, по противоположным граням каждого октаэдра из $\mathcal{S}_1$ можно построить Σ и три новых октаэдра, поэтому $|\mathcal{S}_2|=1+12$, причем вершины октаэдров из $\mathcal{S}_2$ лежат в Y_2.

Теперь $|\mathcal{S}_3|=4+36$ и $|\mathcal{S}_4|=1+12+108$, причем вершины октаэдров из $\mathcal{S}_4$ лежат в Y_2.

Лемма 13. *Граф Γ не содержит $K_{3,3,3}$-октаэдров.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда выполняются леммы 10 – 12. В октаэдрах из $\mathcal{S}_4$ содержатся $121\cdot 6$ вершин, поэтому некоторая вершина из Y_2 содержится по крайней мере в 8 октаэдрах из $\mathcal{S}_4$.

С другой стороны, если $p\in[a_1]\cap[b_1]$ и p принадлежит октаэдрам $\Sigma_1,\ldots$ $\ldots,\Sigma_l$ из Y_2, то 2-коклики $\Sigma_i\cap[a_1]\cap[c_1]$ попарно не пересекаются и $l\le 4$, противоречие.

5. Доказательство теоремы. В этом пункте $\Sigma=\{a,b;c,d;e,f\}$ — октаэдр из Γ. Сохраним обозначения из п. 4 для $\mathcal{S}(\Sigma)$. Положим $X_i=X_i(\Sigma)$, $x_i=|X_i|$. Из лемм 9, 13 следует, что $x_i=0$ для $i\ge 4$. Согласно лемме 6 $x_1=$ $=102$, $x_2=270$, $x_3=108$. Пусть $\Delta=\Sigma-\{b\}$ (такой подграф будем называть пирамидой), $Y_i=X_i(\Delta)$, $y_i=|Y_i|$.

Лемма 14. *Справедливы следующие утверждения*:

1) $y_0=17$, $y_1=175$, $y_2=234$, $y_3=54$;

2) *если* $u\in X_1\cap[b]$, $Y_i'=Y_i\cap[u]'$ *и* $y_i'=|Y_i'|$, *то* $y_1'=185-3y_0'$, $y_2'=96+3y_0'$, $y_3'=34-3y_0'$;

3) *если M — 4-клика из $[u]\cap[b]$, то M содержит либо по две вершины из X_2, X_3, либо вершину из X_1 и три из X_3.*

Доказательство. По лемме 1 $y_0+y_3+3y_4=74$. Далее, $Y_4=\{b\}$ и Y_3 содержит 12 вершин, лежащих напротив граней пирамиды, и 42 вершины, смежные с некликовыми 2-путями из Δ. Поэтому $y_3=54$, $y_0=17$. Это влечет утверждение 1.

Согласно лемме 1, примененной к подграфу Δ графа $[u]'$, получим равенство $y_0'+y_3'=34$. Далее, $\Sigma y_i'=315$, $\Sigma iy_i'=479$. Отсюда следует утверждение 2.

Заметим, что a смежна с 2 вершинами из M, а каждая из вершин c, d, e, f смежна с единственной вершиной из M. Поскольку $M\subset[b]$, то имеем утверждение 3. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\Sigma'=\Sigma(ace, bdf)$. Тогда любой отличный от Σ октаэдр из $\mathcal{S}(\Sigma')$ содержится в X_1. Пусть $u=u_1$, u_2, u_3 —

смежные с b вершины в отличных от Σ октаэдрах Σ_1, Σ_2, Σ_3 из $\mathcal{S}(\Sigma')$. Предположим, что α 4-клик из $[u]\bigcap[b]$ пересекают X_2. Тогда $[u]$ содержит точно $9-\alpha$ вершин из Y_0, $y_0'=7+\alpha$ и $y_1-y_1'=4+2\alpha$. Далее, $[u]\bigcap Y_1$ содержит 2α вершин из $[b]$ и точно 4 вершины из $[b]'$. Но указанные 4 вершины принадлежат октаэдру Σ_1, поэтому смежные с u вершины в октаэдрах Σ_2, Σ_3 принадлежат $[b]$. Таким образом, $\{u_1, u_2, u_3\}$ — треугольник из $X_1\bigcap[b]$. Противоречие с леммой 14. Теорема доказана.

1. *Брауэер А. Е., Линт Й. Х. ван* Сильно регулярные графы и частичные геометрии // Кибернет. сб. – 1987. – **24**. – С. 186 – 229.
2. *Makhnev A. A.* Locally $GQ(4,8)$ graphs and partial geometries // Int. Alg. Conf. Memory A. G. Kurosh (24 – 31 May 1998): Abstrs. – Moscow, 1998. – P. 80.
3. *Hobart S. A., Hughes D. R.* EpGs with minimal μ. II // Geom. dedic. – 1992. – **42**. – P. 129 – 138.
4. *Махнев А. А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 1996. – **3**, № 3. – С. 71 – 83.
5. *Махнев А. А.* О псевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий // Проблемы в алгебре (Гомель). – 1997. – **11**. – С. 60 – 67.
6. *Goethals J.-M., Seidel J. J.* The regular two graph on 276 points // Discrete Math. – 1975. – **12**, № 1. – P. 143 – 158.
7. *Махнев А. А.* О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 12. – С. 123 – 132.
8. *Wilbrink H. A., Brouwer A. E.* (57, 14, 1) strongly regular graph does not exist // Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A. – 1983. – **45**, № 1. – P. 117 – 121.

Получено 31.01.2002