УДК 512.544

Л. А. Курдаченко (Днепропетр. нац. ун-т)

МОДУЛИ НАД ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ С НЕКОТОРЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

We study modules over group ring DG all proper submodules of which are finitely generated as D-modules.

Вивчаються модулі над груповим кільцем DG, всі власні підмодулі яких є скінченнопородженими як D-модулі.

Пусть G — группа, A — ее нормальная абелева подгруппа, $Q = G/A$. Естественным образом A можно сделать модулем над групповым кольцом $\mathbb{Z}Q$. Этот подход, с одной стороны, дает возможность привлекать к рассмотрению теоретико-групповых задач результаты теории групповых колец и модулей над ними, а с другой — стимулирует развитие теории групповых колец и модулей над ними. Например, изучая метабелевы группы с условием максимальности для нормальных подгрупп, Ф. Холл в своих классических работах [1, 2] заложил основы теории групповых колец полициклических групп и модулей над ними. После работ Ф. Холла эта теория начала интенсивно развиваться и обогатилась многими интересными результатами (см., например, книгу Д. Пассмана [3] и обзоры Д. Фаркаша [4], К. Грюнберга [5], Д. Пассмана [6], Дж. Роузблейда [7]). Естественно, другие теоретико-групповые задачи приводят к необходимости изучения соответствующих типов модулей. Изучая вопросы дополняемости нормальных подгрупп в группах, Д. И. Зайцев [8] пришел к модулям, все собственные подмодули которых конечны. Модули такого типа возникали и в других задачах, например, при изучении групп с условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп [9 – 11]. В работе [12] Д. И. Зайцев начал изучение модулей над целочисленными групповыми кольцами, все подмодули которых конечны. Между тем в теоретико-групповых задачах появляются не только модули над целочисленными групповыми кольцами. Распространенные случаи — это модули над кольцом RG, где либо R — поле, либо $R = F\langle t\rangle$ — групповое кольцо бесконечной циклической группы $\langle t\rangle$ над полем F. Среди других встречающихся случаев можно отметить следующие: $R = \mathbb{Z}(p^{\infty})$ — кольцо целых p-адических чисел и $R = \mathbb{F}_p[[X]]$ — кольцо формальных степенных рядов над простым полем $\mathbb{F}_p$. Все указанные кольца являются дедекиндовыми областями. Поэтому естественно перейти от рассмотрения модулей над кольцом $\mathbb{Z}G$ к модулям над кольцом DG, где D — дедекиндова область. При этом переходе, однако, для некоторых колец D конечные модули могут быть только тривиальными, поэтому условие конечности подмодулей целесообразно заменить условием их конечной порожденности. Цель данной работы — изучение модулей A над групповым кольцом DG со следующим свойством:

каждый собственный DG-подмодуль A конечнопорожден как D-подмодуль.

Здесь естественно возникают два случая:

1) A включает в себя такой собственный DG-подмодуль B, что A/B — простой DG-модуль;

2) A является объединением своих собственных DG-подмодулей.

Первый случай сводится к изучению простых DG-модулей и конечнопорожденных над D модулей. Поэтому второй случай представляется здесь основным. Таким образом, приходим к следующему определению.

Пусть K — кольцо, G — группа, A — KG-модуль. Будем говорить, что A — квази(конечнопорожденный) модуль, если A удовлетворяет следующим условиям:

QFG_1) *A не имеет конечной системы порождающих над K;*

QFG_2) *если B — собственный KG-подмодуль A, то B конечнопорожден как K-модуль;*

QFG_3) *A совпадает с объединением своих собственных KG-подмодулей.*

Лемма 1. *Пусть K — кольцо, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) KG-модуль. Тогда A не может разлагаться в прямую сумму двух собственных KG-подмодулей.*

Утверждение леммы очевидно.

Обозначим через $\mathrm{Soc}_{KG}(A)$ цоколь KG-модуля A, т. е. подмодуль, порожденный всеми минимальными KG-подмодулями A, если A включает в себя такие подмодули. Если же A не включает в себя ненулевых минимальных KG-подмодулей, то полагаем $\mathrm{Soc}_{KG}(A) = \langle 0 \rangle$. Отметим, что если $\mathrm{Soc}_{KG}(A) \neq \langle 0 \rangle$, то он является прямой суммой некоторых простых KG-подмодулей.

Следствие. *Пусть K — кольцо, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) KG-модуль. Тогда $\mathrm{Soc}_{KG}(A)$ — собственный KG-подмодуль A.*

Пусть K — область целостности, A — K-модуль. Элемент $a \in A$ называется *K-периодическим*, если $\mathrm{Ann}_K(a) = \{x \in K \mid ax = 0\} \neq \langle 0 \rangle$. Совокупность $t_K(A)$ всех K-периодических элементов называется *K-периодической частью* A. Очевидно, $t_K(A)$ — K-подмодуль A. Будем говорить, что A — *K-периодический модуль*, если $A = t_K(A)$; будем говорить, что A *не имеет K-кручения*, если $t_K(A) = \langle 0 \rangle$.

Пусть $0 \neq x \in K$. Будем говорить, что K-модуль A *x-делим*, если $Ax = \{ax \mid a \in A\} = A$. Если A — x-делим для любого ненулевого элемента x, то A называется *делимым* модулем (точнее, *K-делимым*).

Лемма 2. *Пусть K — область целостности, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) KG-модуль. Тогда либо $Ax = \langle 0 \rangle$ для некоторого ненулевого элемента $x \in K$, либо A — K-делимый модуль.*

Доказательство. Если $Ax = A$ для любого элемента $0 \neq x \in K$, то A — K-делим. Поэтому допустим, что найдется элемент $0 \neq x \in K$, для которого $Ax \neq A$. Отображение $\varphi: a \to ax$, $a \in A$, является KG-эндоморфизмом A, причем $\mathrm{Im}\,\varphi = Ax$, $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ann}_A(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$. Имеем $A/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi$. Если допустить, что $\mathrm{Ker}\varphi \neq A$, то $\mathrm{Ker}\,\varphi$ конечнопорожден как K-подмодуль. Поскольку и $\mathrm{Im}\,\varphi = Ax \neq A$, то $\mathrm{Im}\,\varphi$ конечнопорожден. Это означает, что A конечнопорожден. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{Ker}\varphi = A$, т. е. $Ax = \langle 0 \rangle$.

Пусть D — дедекиндова область. Положим $\mathrm{Spec}(D) = \{P \mid P$ — *максимальный идеал* $D\}$. Если $n \in \mathbb{N}$, то $D/P^n \cong P/P^{n+1}$ (как D-модули) (см., например, [13], следствие 2.19). Отсюда вытекает, что D/P^n изоморфен подмодулю D/P^{n+1}, т. е. семейство $\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ инъективно. Положим $\mathbb{C}_{P^\infty} = \lim\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. D-модуль $\mathbb{C}_{P^\infty}$ называется *прюферовым P-модулем* (по аналогии с прюферовой p-группой).

Пусть D — дедекиндова область, A — D-модуль. Если I — идеал D, то положим $A_I = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}\}$. Легко видеть, что A_I — D-подмодуль A. A_I называют *I-компонентой* A.

Положим $\Pi_D(A) = \{P \in \mathrm{Spec}(D) \mid A_P \neq \langle 0 \rangle\}$. Тогда $t_D(A) = \bigoplus_{P \in \Pi_D(A)} A_P$ (см., например, [13], следствие 3.6).

Предположим, что A не имеет D-кручения. Пусть B — максимальное D-свободное подмножество A. Положим $r_0(A) = |B|$. Отметим, что $r_0(A)$ не зависит от выбора B (см., например, [13], следствие 4.7).

Пусть теперь A — D-периодический модуль, $P \in \mathrm{Spec}(D)$. Положим

$$\Omega_{I,n}(A) = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0 \rangle\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\Omega_{I,n}(A)$ — D-подмодуль и $\Omega_{I,n}(A) \leq \Omega_{I,n+1}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, так что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{I,n}(A) = A_I$.

Лемма 3. *Пусть D — дедекиндова область, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль. Тогда A — D-периодический модуль.*

Доказательство. Пусть $T = t_D(A)$. Допустим, что $T \neq \langle 0 \rangle$. Ввиду леммы 2 либо $Ax = \langle 0 \rangle$ для некоторого $0 \neq x \in D$, либо A — D-делим. В первом случае $A = T$. Поэтому предположим, что A — D-делим. Тогда и подмодуль T — D-делим, в частности, T не может быть конечнопорожденным (см., например, [13], теорема 5.26). Отсюда получаем $T = A$. Пусть теперь $T = \langle 0 \rangle$. Ввиду условия QFG_3) A включает в себя собственный DG-подмодуль B, так что B конечнопорожден как D-подмодуль. Пусть C — D-сервантная оболочка B, тогда C — D-делимый DG-подмодуль A. Поскольку C/B — D-периодический делимый модуль, то C/B — прямая сумма прюферовых подмодулей. В частности, C не может быть конечнопорожденным, т. е. $C = A$. Так как и A/B — квази(конечнопорожденный), то $A/B = (A/B)_P$ для некоторого $P \in \mathrm{Spec}(D)$. Отсюда следует, что $A/B = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, где $L_i \cong \mathbb{C}_{P^\infty}$, $1 \leq i \leq n$, $n \leq r_0(B)$ (см., например, [13], теорема 5.26). Поскольку B конечнопорожден, то $B \cong$ $\cong \underbrace{D \oplus \ldots \oplus D}_{\longleftarrow k-1 \longrightarrow} \oplus I$, где $k = r_0(B)$, I — идеал D. Отсюда вытекает, что $BQ \neq B$ для любого $Q \in \mathrm{Spec}(D)$. Пусть $Q \neq P$. Тогда $A/BQ = B/BQ \oplus E/BQ$, где $A/B \cong_D E/BQ$ — P-компонента A/BQ. Получили противоречие с леммой 1. Полученное противоречие показывает, что A — D-периодический.

Следствие. *Пусть D — дедекиндова область, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль. Тогда либо $\mathrm{Ann}_D(A) = P \in \mathrm{Spec}(D)$, либо $A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, C_i, $1 \leq i \leq n$, — прюферов P-подмодуль.*

Доказательство. Поскольку A — D-периодический, то $A = \bigoplus_{P \in \Pi_D(A)} A_P$ (см., например, [13], следствие 3.6). Так как A_P — DG-подмодуль, то вследствие леммы 1 $A = A_P$, т. е. A — P-модуль. Пусть $A_1 = \Omega_{P,1}(A)$; ясно, что A_1 — DG-подмодуль. Если $A = A_1$, то $P = \mathrm{Ann}_D(A)$. Предположим, что A_1 — собственный DG-подмодуль, тогда A_1 — конечнопорожден. Из леммы 2 получаем, что A — D-делим, поэтому $A = \oplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, где C_λ, $\lambda \in \Lambda$, — прюферов P-подмодуль (см., например, [13], теорема 5.26). Так как $A_1 = \oplus_{\lambda \in \Lambda} \Omega_{P,1}(C_\lambda)$, то множество Λ конечно.

Следствие доказано.

Пусть D — дедекиндова область, $P \in \mathrm{Spec}(D)$, $\varphi_n : D/P^n \to D/P^{n+1}$ — естественный гомоморфизм. Положим

$$D(P^\infty) = \varinjlim \{D/P^n, \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Как и для кольца целых p-адических чисел, нетрудно убедиться в том, что $D(P^{\infty})$ — область главных идеалов, локальное кольцо и $\mathrm{Spec}(D(P^{\infty})) = \{\overline{P}\}$, где $\overline{P} = \varprojlim \{P/P^n, \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, причем множество всех ненулевых идеалов кольца $D(P^{\infty})$ совпадает с $\{\overline{P}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $D(P^{\infty})/\overline{P}^n \cong D/P^n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, если $\mathrm{char}\, D = 0$, то и $\mathrm{char}\, D(P^{\infty}) = 0$, если же $\mathrm{char}\, D = p > 0$, то и $\mathrm{char}\, D(P^{\infty}) = p$. Как и для прюферовых p-групп, доказывается следующее предложение.

Предложение 1. *Кольцо эндоморфизмов прюферова P-модуля изоморфно $D(P^{\infty})$.*

Следствие. *Пусть D — дедекиндова область, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль. Если A — D-делим, то $G/C_G(A)$ изоморфна подгруппе $GL_n(D(P^{\infty}))$, где $n = \dim_{D/P} \Omega_{P,1}(A)$ и $\{P\} = \Pi_D(A)$.*

Предложение 2. *Пусть D — дедекиндова область, G — группа, H — нормальная подгруппа, имеющая в G конечный индекс, $\{g_1, \ldots, g_t\}$ — полное множество представителей группы G по H. Если A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$, то A включает в себя DH-подмодуль B со следующими свойствами:*

1) Bg_i, $1 \le i \le t$, — *квази(конечнопорожденный) DH-подмодуль;*

2) $A = Bg_1 + \ldots + Bg_t$;

3) $H \le H/(g_1^{-1}C(B)g_1) \times \ldots \times H/(g_t^{-1}C(B)g_t)$.

Доказательство. Положим $\wp = \{E \mid E$ — DH-подмодуль, не имеющий конечной системы порождающих как D-подмодуль$\}$. Ввиду леммы 3 A — D-периодический. Если U — собственный DG-подмодуль A, то он конечнопорожден как D-подмодуль по условию $QFG_2)$. Будучи D-периодическим, он имеет конечный D-композиционный ряд (см., например, [13], теорема 6.14), а значит, и конечный DG-композиционный ряд. Отсюда вытекает, что A — артинов DG-модуль. Поскольку G/H конечна, то A — артинов DH-модуль [14] (теорема A). Следовательно, множество $\wp$ имеет минимальный элемент B. Из выбора B вытекает, что любой собственный DH-подмодуль B конечнопорожден над D. Допустим, что B не является квази(конечнопорожденным) DH-модулем. В этом случае B включает в себя такой собственный DH-подмодуль C, что B/C — простой DH-модуль. Положим $C_1 = CDG = Cg_1 + \ldots + Cg_t$, тогда C_1 конечнопорожден над D. Из условия $QFG_3)$ вытекает существование такого возрастающего ряда собственных DG-подмодулей $C_1 \le C_2 \le \ldots \le C_n \le \ldots$, что $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Отсюда вытекает равенство $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap C_n)$. Поскольку B/C — простой DH-модуль, то либо $(B/C) \cap (C_n/C) = B/C$, либо это пересечение нулевое. Поскольку B не имеет конечной системы порождающих над D, то же справедливо и для B/C. В то же время каждый из C_n конечнопорожден. Это означает, что $(B/C) \cap (C_n/C) = \langle 0 \rangle$, т. е. $B \cap C_n = C$, что противоречит равенству $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap C_n)$. Полученное противоречие показывает, что B — квази(конечнопорожденный) DH-модуль. Отображение $a \to ag_i$, $a \in A$, является D-изоморфизмом, сохраняющим DH-подмодули, поэтому Bg_i — квази(конечнопорожденный)

DH-подмодуль для любого i, $1 \le i \le t$. Далее, $Bg_1 + \ldots + Bg_t$ — DG-подмодуль, не имеющий конечной системы порождающих над D, поэтому $A = Bg_1 + \ldots + Bg_t$. Легко видеть, что $C_H(Bg_i) = g_i^{-1}C_H(B)g_i$, поэтому $\bigcap_{1\le i\le t} g_i^{-1}C_H(B)g_i = C_H(A) = \langle 1 \rangle$, так что из теоремы Рэмака получаем вложение $H \le H/(g_1^{-1}C(B)g_1) \times \ldots \times H/(g_t^{-1}C(B)g_t)$.

Лемма 4. *Пусть D — дедекиндова область, G — локально разрешимая группа, A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Если A — D-делим, то G — почти абелева группа.*

Доказательство. По следствию леммы 3 $\Pi_D(A) = \{P\}$, $P \in \mathrm{Spec}(D)$ и $A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, где C_i — прюферов P-модуль, $1 \le i \le n$. Пусть A — двойственный к A модуль, т. е. $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, R_0)$, где $R = D(P^\infty)$, R_0 — это R-модуль K/R, где K — поле частных R. Отметим, что A^* — свободный R-модуль и $r_0(A^*) = n$ [15] (лемма 1.2). По лемме 2.1 работы [15] RG-модуль A^* рационально неприводим, т. е. $B = (A^*) \otimes_R K$ — простой KG-модуль. Другими словами, G — неприводимая подгруппа $GL_n(K)$. По теореме Цассенхауза (см., например, [16], теорема 3.7) группа G разрешима, и по теореме Мальцева (см., например, [16], лемма 3.5) G почти абелева.

Лемма 5. *Пусть F — поле, G — группа, A — простой FG-модуль, $I = \mathrm{Ann}_{FG}(A)$. Если C/I — центр FG/I, то C/I — область целостности. В частности, $\zeta(G/C_G(A))$ вкладывается в мультипликативную группу некоторого поля, и, следовательно, ее периодическая часть является локально циклической p'-группой, где $p = \mathrm{char}\, F$.*

(Как обычно, $0'$ обозначает множество всех простых чисел.)

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 4.3 работы [17].

Лемма 6. *Пусть D — дедекиндова область, G — группа, U — ее нормальная абелева подгруппа конечного индекса, A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Если A — D-делим, то периодическая часть T подгруппы U имеет конечный специальный ранг.*

Доказательство. Снова $\Pi_D(A) = \{P\}$, $P \in \mathrm{Spec}(D)$ и $A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, где C_i — прюферов P-модуль, $1 \le i \le n$. Используя предложение 2, выделим в A квази(конечнопорожденный) DU-подмодуль B, удовлетворяющий условиям 1 – 3 предложения 2. Снова рассмотрим R-модуль B^*, двойственный к B, где $R = D(P^\infty)$. Ввиду леммы 2.1 работы [15] $C = B^* \otimes_R K$ — простой KU-модуль, где K — поле частных R, $\dim_K C = r_0(B) = n$. Из леммы 5 получаем, что периодическая часть $U/C_U(B)$ — локально циклическая. Поскольку $U \le U/(g_1^{-1}C_U(B)g_1) \times \ldots \times U/(g_t^{-1}C_U(B)g_t)$, где $\{g_1, \ldots, g_t\}$ — полное семейство представителей группы G по подгруппе U, то T — подгруппа конечного специального ранга.

Лемма 7. *Пусть K — кольцо, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) KG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Если $1 \ne x \in \zeta(G)$, то $A = A(x-1)$.*

Доказательство. Отображение $\varphi : a \to a(x-1)$, $a \in A$, является KG-эндоморфизмом A. В частности, $\mathrm{Im}\,\varphi = A(x-1)$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi = C_A(x)$ — KG-подмодули. Поскольку $x \notin C_G(A)$, то $C_A(x) \ne A$. Поэтому $C_A(x)$ конечнопорожден над K. Из изоморфизма $A(x-1) \cong A/C_A(x)$ получаем, ввиду условия QFG_1), что $A(x-1)$ не имеет конечной системы порождающих над K, так что $A(x-1) = A$.

Следствие. *Пусть D — дедекиндова область,* $\operatorname{char} D = p > 0, G$ — *группа, A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Тогда G не включает в себя неединичных нормальных конечных p-подгрупп.*

Доказательство. Предположим противное, пусть G включает в себя конечную неединичную нормальную p-подгруппу P. Пусть S — минимальная G-инвариантная подгруппа P, тогда S — абелева. Положим $H = C_G(S)$, тогда H имеет конечный индекс в G и $S \leq \zeta(H)$. Используя предложение 2, выделим в A квази(конечнопорожденный) DH-подмодуль B, удовлетворяющий условиям 1–3 предложения 2. Если допустить, что $S \leq C_H(B)$, то для любого $g \in G$ имеем $S = g^{-1}Sg \leq g^{-1}C_H(B)g = C_H(Bg)$, и из условия 2 получаем $S \leq C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Полученное противоречие показывает, что $C_H(B)$ не включает в себя S. Пусть x — элемент простого порядка подгруппы S, не содержащийся в $C_H(B)$. Так как $\operatorname{char} D = p$, то аддитивная группа B является элементарной абелевой p-подгруппой. Это означает, что естественное полупрямое произведение групп B и $\langle x \rangle$ будет нильпотентной p-группой. В частности, $[B, x] = B(x-1) \neq B$. В то же время из леммы 7 получаем равенство $B(x-1) = B$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть D — дедекиндова область, G — локально разрешимая группа, A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Предположим, что A — D-делим. Имеют место следующие утверждения*:

1) $\Pi_D(A) = \{P\}$, $P \in \operatorname{Spec}(D)$;
2) $A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, *где C_i, $1 \leq i \leq n$, — прюферов P-подмодуль;*
3) *G включает в себя абелеву нормальную подгруппу U конечного индекса;*
4) *периодическая часть подгруппы U имеет конечный специальный ранг;*
5) *если* $\operatorname{char} D = p > 0$, *то* $O_p(G) = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 вытекают из следствия леммы 2, утверждение 3 следует из леммы 4, утверждение 4 — из леммы 6. Допустим, что $O_p(G) \neq \langle 1 \rangle$. Из утверждений 3, 4 получаем, что $O_p(G)$ имеет конечный специальный ранг, поэтому $O_p(G)$ включает в себя конечную неединичную G-инвариантную подгруппу. Однако это противоречит следствию леммы 7.

Пусть A — квази(конечнопорожденный) DG-модуль. Как уже отмечалось выше, либо A — D-делим, либо $\operatorname{Ann}_D(A) = P \in \operatorname{Spec}(D)$. Первый случай рассмотрен в теореме 1, поэтому перейдем к рассмотрению случая, когда $\operatorname{Ann}_D(A) = P$ — максимальный идеал. Другими словами, приходим к случаю FG-модуля, где $F = D/P$ — поле.

Лемма 8. *Пусть F — поле, G — группа, A — квази(конечнопорожденный) FG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Если H — неединичная конечная нормальная подгруппа G, то* $\operatorname{Soc}_{FH}(A) = A$.

Доказательство. Допустим, что $B = \operatorname{Soc}_{FH}(A) \neq A$. Поскольку H нормальна в G, то $\operatorname{Soc}_{FH}(A)$ — FG-подмодуль A. Отсюда вытекает, что B конечнопорожден над F, т. е. $\dim_F B$ конечна, Тогда $B \oplus C$ для некоторого F-подпространства C. Положим $C_0 = \bigcap_{h \in H} Ch$. Так как $A/Ch = Ah/Ch \cong A/C$, то $\dim_F(A/Ch)$ конечна. Отсюда получаем, что $\dim_F(A/C_0)$ конечна, в частности, $C_0 \neq \langle 0 \rangle$. Пусть $0 \neq e \in C_0$, $E = eFH$. Поскольку H конечна, то $\dim_F E$

конечна. Поэтому E включает в себя ненулевой минимальный FH-подмодуль E_1. Тогда $E_1 \le \mathrm{Soc}_{FH}(A) = B$, в то время как $C_0 \cap B = \langle 0 \rangle$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathrm{Soc}_{FH}(A) = A$.

***Следствие* 1.** *Если H — неединичная конечная нормальная подгруппа G, то $C_A(H) = \langle 0 \rangle$, $A(\omega FH) = A$.*

(Здесь ωFH — фундаментальный идеал группового кольца FH.)

***Доказательство*.** Из леммы 8 получаем $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, где C_n — простой FH-подмодуль A. Так как $C_n(\omega FH)$ — FH-подмодуль C_n, то либо $C_n(\omega FH) = \langle 0 \rangle$, либо $C_n(\omega FH) = C_n$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает равенство $A = C_A(H) \oplus \oplus A(\omega FH)$, причем оба прямых слагаемых — FG-подмодули. Теперь из леммы 1 вытекает $A(\omega FH) = A$.

***Следствие* 2.** *Если H — неединичная конечная нормальная подгруппа G, B — ненулевой собственный FG-подмодуль A, то $C_H(B) = \langle 1 \rangle$.*

***Следствие* 3.** *Пусть H — нормальная подгруппа, имеющая возрастающий ряд G-инвариантных подгрупп*

$$\langle 1 \rangle = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_\alpha \le H_{\alpha+1} \le \ldots \le H_\gamma = H$$

с конечными факторами. Если B — ненулевой собственный FG-подмодуль A, то $C_H(B) = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по α. Если $\alpha = 1$, то утверждение вытекает из следствия 2. Пусть $\alpha > 1$ и предположим, что $C_{H_\beta}(B) = \langle 1 \rangle$ для всех $\beta < \alpha$. Пусть $C_\alpha = C_{H_\alpha}(B)$. Если α — предельное порядковое число, то $H_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$, так что $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}(C_\alpha \cap H_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta = \langle 1 \rangle$.

Пусть теперь α не предельное. Положим $L = H_{\alpha-1}$. Допустим, что $C_\alpha \ne \ne \langle 1 \rangle$. Тогда $L \cap C_\alpha = \langle 1 \rangle$, т. е. $C_\alpha \cong C_\alpha/(L \cap C_\alpha) \cong (L + C_\alpha)/L \le H_\alpha/L$. Отсюда вытекает, что C_α конечна, и теперь получаем противоречие со следствием 1, поскольку $B \le C_A(C_\alpha)$. Итак, $C_\alpha = \langle 1 \rangle$. Для $\alpha = \gamma$ имеем $C_H(B) = = \langle 1 \rangle$.

Пусть G — группа. *Нормальная подгруппа H называется гиперконечным радикалом G, если она удовлетворяет следующим условиям*:

HF_1) H имеет возрастающий ряд G-инвариантных подгрупп $\langle 1 \rangle = H_0 \le \le H_1 \le \ldots \le H_\alpha \le H_{\alpha+1} \le \ldots \le H_\gamma = H$, каждый фактор которого конечен;

HF_2) G/H не включает в себя неединичных конечных нормальных подгрупп. Гиперконечный радикал будем обозначать через $HF(G)$.

***Следствие* 4.** *Подгруппа $HF(G)$ почти абелева и имеет конечный специальный ранг. Кроме того, если* $\mathrm{char}\, F = p \ge 0$, *то* $O_p(HF(G)) = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Положим $H = HF(G)$ и пусть B — собственный FG-подмодуль A. По следствию 3 $C_H(B) = \langle 1 \rangle$, так что можно рассматривать H как подгруппу $GL_n(F)$, где $n = \dim_F B$. По теореме Каргаполова (см., например, [16], следствие 9.31) H — почти разрешима. По теореме Мальцева (см., например, [16], теорема 3.6) H включает в себя нормальную подгруппу S конечного индекса со свойством $g^{-1}Sg \le T_n(F_1)$, где F_1 — некоторое конечное расширение поля F. Положим $U = (g^{-1}Sg) \cap UT_n(F_1)$, $V = gUg^{-1}$, тогда V нормальна в S. Если $\mathrm{char}\, F = p > 0$, то $UT_n(F_1)$ — нильпотентная ограниченная p-подгруппа. Если допустить, что $U \ne \langle 1 \rangle$, то $O_p(H) \ne \langle 1 \rangle$. Ввиду определения H это означает, что H включает в себя конечную неединичную G-инвариантную p-подгруппу, что противоречит лемме 7. Если $\operatorname{char} F = 0$, то $UT_n(F_1)$ — нильпотентная подгруппа без кручения. Так что и в этом случае $U = \langle 1 \rangle$. Далее, $T_n(F_1)/UT_n(F_1) \cong \underbrace{U(F_1)\times\ldots\times U(F_1)}_{n}$. Поскольку периодические подгруппы $U(F_1)$ локально циклические (см., например, [18], предложение 4.4.1), то S — абелева подгруппа конечного специального ранга.

Следствие 5. *Пусть G — гиперцентральная группа, T — ее периодическая часть. Тогда T — почти абелева p'-подгруппа конечного специального ранга,* $p = \operatorname{char} F$.

Пусть $S = \operatorname{Soc}_{FG}(A)$. Из следствия леммы 1 получаем, что S — собственный FG-подмодуль A, так что $\dim_F S = s$ конечна. Если $C_G(S) = \langle 1 \rangle$, то можно рассматривать G как подгруппу $GL_s(F)$, более того, как ее вполне приводимую подгруппу.

Лемма 9. *Пусть F — поле, G — локально разрешимая группа, A — квази(конечнопорожденный) FG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Если $C_G(\operatorname{Soc}_{FG}(A)) = \langle 1 \rangle$, то G — почти абелева группа.*

Доказательство. В самом деле, G — вполне приводимая подгруппа $GL_s(F)$, где $s = \dim_F \operatorname{Soc}_{FG}(A)$. По теореме Цассенхауза (см., например, [16], теорема 3.7) G — разрешима, а по теореме Мальцева (см., например, [16], лемма 3.5) G — почти абелева.

Лемма 10. *Пусть F — поле, G — абелева группа, A — квази(конечнопорожденный) FG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Для любого $1 \neq x \in G$ сделаем A $D(x)$-модулем, где $D(x) = F\langle t_x \rangle$ — групповая алгебра бесконечной циклической группы $\langle t_x \rangle$ над полем F, и $a t_x = ax$ для любого $a \in A$. Найдется элемент $x \in G$, для которого $\operatorname{Ann}_{D(x)}(A) = \langle 0 \rangle$.*

Доказательство. Можно рассматривать A как $D(x)G$-модуль. При этом $D(x)$ — область главных идеалов. Из следствия леммы 2 получаем, что A — $D(x)$-периодический и либо $\operatorname{Ann}_{D(x)}(A) \neq \langle 0 \rangle$, либо A — $D(x)$-делим. Предположим, что $\operatorname{Ann}_{D(x)}(A) \neq \langle 0 \rangle$ для любого $x \in G$. Пусть $S_1 = \operatorname{Soc}_{FG}(A)$, $S_2/S_1 = \operatorname{Soc}_{FG}(A/S_1)$. Если $0 \neq a \in S_2$, то $aFG \cap S_1 \neq \langle 0 \rangle$. Следовательно, найдется такой элемент $u \in FG$, что $0 \neq au \in S_1$. Пусть $u = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$, $x_1, \ldots, x_m \in G$. Из нашего допущения вытекает, что $\operatorname{Ann}_{D(x_1)}(A) = P_1 \in \operatorname{Spec}(D(x_1))$. Положим $F_1 = D(x_1))/P_1$, тогда можно рассматривать A как F_1G-модуль. Так как $\operatorname{Ann}_{D(x_2)}(A) \neq \langle 0 \rangle$, то и $\operatorname{Ann}_{F_1\langle t_2 \rangle}(A) = P_2 \neq \langle 0 \rangle$, где $t_2 = t_{x_2}$. Теперь из следствия леммы 2 получаем $P_2 \in \operatorname{Spec}(F_1\langle t_2 \rangle)$. Другими словами, $F\langle x_1, x_2 \rangle$ — модуль S_2-полупростой и однородный. Используя те же рассуждения, через конечное число шагов получим, что и $F\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ — модуль S_2-полупростой и однородный. Но в этом случае $aF\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ — простой подмодуль, а потому $aF\langle x_1, \ldots, x_m \rangle \cap S_1 = \langle 0 \rangle$. Получаем противоречие с выбором a, которое и доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть F — поле, G — локально разрешимая группа, A — квази(конечнопорожденный) FG-модуль, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$, $S = \operatorname{Soc}_{FG}(A)$. Если $C_G(S) = \langle 1 \rangle$, то имеют место следующие утверждения:*

1) *G включает в себя абелеву нормальную подгруппу U конечного индекса;*
2) *периодическая часть подгруппы U имеет конечный специальный ранг;*
3) *если $\operatorname{char} F = p > 0$, то $O_p(G) = \langle 1 \rangle$;*

4) *U содержит такой элемент x бесконечного порядка, а A включает в себя такой квази(конечнопорожденный) FU-подмодуль B, что $\Pi_{F\langle x\rangle}(B) = \{P\}$ для некоторого $P \in \operatorname{Spec}(F\langle x\rangle)$ и $B = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, где C_i, $1 \le i \le n$, — прюферов P-подмодуль;*

5) *$A = B \oplus Bg_1 \oplus \ldots \oplus Bg_t$, где $\{1, g_1, \ldots, g_t\}$ — полное множество представителей смежных классов G по U.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из леммы 9, утверждение 2 — из следствия 4 леммы 8, утверждение 3 — из следствия леммы 7. Пусть B — квази(конечнопорожденный) FU-подмодуль, удовлетворяющий условиям 1 – 3 предложения 2. Из леммы 9 получаем, что $U \setminus C_U(B)$ содержит элемент x со свойством $\operatorname{Ann}_{F\langle x\rangle}(B) \ne \langle 0\rangle$. Ясно, что $|x|$ бесконечен. Из следствия леммы 2 получаем $\Pi_{F\langle x\rangle}(B) = \{P\}$ для некоторого $P \in \operatorname{Spec}(F\langle x\rangle)$ и $B = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n$, где C_i, $1 \le i \le n$, — прюферов P-подмодуль. Теперь утверждение 5 следует из предложения 2.

Лемма 11. *Пусть F — поле, G — гиперцентральная группа, A — квази(конечнопорожденный) FG-модуль $C_G(A) = \langle 1\rangle$. Допустим, что $C_G(\operatorname{Soc}_{FG}(A)) \ne \langle 1\rangle$. Тогда $C_G(\operatorname{Soc}_{FG}(A)) \cap \zeta(G)$ содержит такой элемент x бесконечного порядка, что A — $F\langle x\rangle$-периодический и $\Pi_{F\langle x\rangle}(B) = \{(x-1)F\langle x\rangle\}$.*

Доказательство. Пусть $S_1 = \operatorname{Soc}_{FG}(A)$, $Z = C_G(S_1) \cap \zeta(G)$. Из условий леммы следует, что $Z \ne \langle 1\rangle$. Подгруппа Z не имеет кручения ввиду следствия 2 леммы 8. Пусть $1 \ne x \in Z$, отображение $\varphi: a \to a(x-1)$, $a \in A$, будет FG-эндоморфизмом A, так что $\operatorname{Ker}\varphi = C_A(x)$ и $\operatorname{Im}\varphi = A(x-1)$ — FG-подмодули A. Положим $S_2/S_1 = \operatorname{Soc}_{FG}(A/S_1)$, тогда S_2/S_1 — собственный FG-подмодуль ввиду следствия леммы 1, так что $S_2/S_1 = E_1/S_1 \oplus \ldots \oplus E_k/S_1$, где E_i/S_1, $1 \le i \le k$, — простой FG-подмодуль. Допустим, что S_1 не включает в себя $E_i\varphi$ для некоторого i. Имеем тогда $E_i\varphi \cong E_i/\operatorname{Ker}\varphi = E_i/S_1$, т. е. $E_i\varphi$ — простой FG-подмодуль. Но в этом случае $E_i\varphi \le \operatorname{Soc}_{FG}(A) = S_1$. Полученное противоречие показывает, что $S_2(x-1) \le S_1$. Положим $S_3/S_2 = \operatorname{Soc}_{FG}(A/S_2), \ldots$ $\ldots, S_{n+1}/S_n = \operatorname{Soc}_{FG}(A/S_n), \ldots$. С помощью аналогичных рассуждений можно получить включения $S_{n+1}(x-1) \le S_n$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $\dim_F(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n)$ бесконечна, то $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = A$. Отсюда и вытекает, что A — $F\langle x\rangle$-периодический модуль, более того, $\Pi_{F\langle x\rangle}(B) = \{(x-1)F\langle x\rangle\}$.

Теорема 3. *Пусть F — поле, G — гиперцентральная группа, A — квази(конечнопорожденный) FG-модуль, $C_G(A) = \langle 1\rangle$, $S = \operatorname{Soc}_{FG}(A)$. Если $C_G(S) \ne \langle 1\rangle$, то имеют место следующие утверждения:*

1) *G — почти абелева группа;*

2) *периодическая часть T группы G является p'-подгруппой конечного специального ранга, где $p = \operatorname{char} F$;*

3) *$T \cap \zeta(G)$ – локально циклическая подгруппа;*

4) *$C_G(S) \cap \zeta(G)$ содержит такой элемент x бесконечного порядка, что A — $F\langle x\rangle$-периодический и $\Pi_{F\langle x\rangle}(B) = \{P\}$, где $P = (x-1)F\langle x\rangle$, $A = C_1 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus C_n$ (C_i, $1 \le i \le n$, — прюферов P-подмодуль).*

Доказательство. Из леммы 11 получаем существование в подгруппе $C_G(S) \cap \zeta(G)$ такого элемента x бесконечного порядка, что A — $F\langle x\rangle$-периодический и $\Pi_{F\langle x\rangle}(B) = \{P\}$, где $P = (x-1)F\langle x\rangle$. Положим $D = F\langle x\rangle$, D — область главных идеалов, в частности, D — дедекиндова область. Теперь можно применить теорему 1.

1. *Hall P.* Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1954. – **4**. – P. 419–436.
2. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Ibid. – 1959. – **9**. – P. 595–632.
3. *Passman D. S.* The algebraic structure of group rings. – New York: John Wiley, 1977. – 720 p.
4. *Farkas D. R.* Noetherian group rings; an exercise in creating folklore and induction // Noetherian Rings and their Applications (Amer. Math. Soc. Math. Surveys and Monographs). – 1987. – **24**. – P. 89–118.
5. *Gruenberg K.* Ring theoretic methods and finiteness conditions in infinite soluble groups // Lect. Notes Math. – 1974. – **319**. – P. 75–84.
6. *Passman D. S.* Group rings of polycyclic groups // Group Theory: Essays for Philip Hall. – London: Acad. Press, 1984. – P. 207–256.
7. *Roseblade J. E.* Five lectures on group rings // London Math. Soc. Lect. Note Ser. – 1985. – **121**. – P. 93–109.
8. *Зайцев Д. И.* Группы с дополняемыми нормальными подгруппами // Некоторые вопросы теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 30–74.
9. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы со слабыми условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп // Докл. АН УССР. Сер. А – 1985. – № 8. – С. 9–12.
10. *Курдаченко Л. А.* О некоторых классах групп со слабыми условиями минимальности и максимальности для нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1050–1056.
11. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А., Тушев А. В.* Модули над нильпотентными группами конечного ранга // Алгебра и логика. – 1985. – **24**, № 6. – С. 631–666.
12. *Зайцев Д. И.* Бесконечно неприводимые нормальные подгруппы // Строение групп и свойства их подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 17–38.
13. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Modules over Dedekind domain. – Los Angeles: Nat. Univ. Los Angeles, 1996. – 76 p.
14. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. – 1970. – **114**. – P. 19–21.
15. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – **82**, № 2. – P. 215–239.
16. *Wehrfritz B. A F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1973. – 229 p.
17. *Robinson D. J. S., Zhang Z.* Groups whose proper quotients have finite derived subgroups // J. Algebra. – 1988. – **118**. – P. 346–368.
18. *Karpilovsky G.* Field theory. – New York: Marcel Dekker, 1988. – 551 p.

Получено 28.09.2000