УДК 512.54

Т. Ю. Войтенко, В. М. Левчук (Краснояр. ун-т, Россия)

ГИПОТЕЗА В. И. ЗЕНКОВА О ПАРНЫХ p-СИЛОВСКИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ p*

We present all Chavalley groups over a finite field of arbitrary characteristic p in which an index of normalizer of any pair of Sylow p-subgroups is relatively prime with p.

Наведено всі групи Шевалле над скінченним полем довільної характеристики p, у яких індекс нормалізатора будь-якої пари силовських p-підгруп взаємно простий із p.

Введение. Пересечение пары силовских p-подгрупп в группе называют парным p-силовским пересечением. Вопрос об описании конечных групп, в которых нормализаторы всех парных 2-силовских пересечений имеют нечетные индексы, поставлен В. В. Кабановым, А. А. Махневым, А. И. Старостиным в Коуровской тетради [1] (вопрос 5.14, в)). В. И. Зенков высказал гипотезу о том, что в классе групп лиева типа характеристики 2 все такие группы имеют лиев ранг ≤ 2; он изучал силовские пересечения конечных групп в ряде работ (см., например, [2]).

Цель данной работы — исследовать гипотезу В. И. Зенкова и вместе с тем аналог вопроса 5.14, в) для парных p-силовских пересечений групп Шевалле над конечным полем K произвольной характеристики p. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $G(K)$ — группа Шевалле над конечным полем K произвольной характеристики p. Индекс нормализатора любого парного p-силовского пересечения группы $G(K)$ взаимно прост с p тогда и только тогда, когда либо $G(K)$ — лиева ранга* 1, *либо $G = A_2$, либо $p = 2$ и $G = B_2$, либо $p = 3$ и $G = G_2$.*

Из теоремы 1 следует, что в группе Шевалле лиева ранга > 2 над конечным полем характеристики $p > 0$ всегда найдется парное p-силовское пересечение с p-кратным индексом нормализатора. Тем самым подтверждается гипотеза В. И. Зенкова. Теорема 1 анонсирована в [3, 4]. Ее частные случаи доказаны для групп Шевалле нормальных типов лиева ранга ≤ 3 [5, 6] и типов E_l, $l = 6, 7, 8$, в [7] (см. также п. 1).

1. Вспомогательные и известные результаты. Через $G(K)$ будем обозначать группу Шевалле над полем K, ассоциированную с системой корней $G = \Phi$, или скрученную группу типа $G = {}^m\Phi$, $m = 2$ или 3. Как и в [8] (теорема 7.2.2), для группы Шевалле $\Phi(K)$ будем использовать естественный гомоморфизм ее мономиальной подгруппы N на группу Вейля W системы корней Φ. Корневые подгруппы $X_s = \{x_s(t) \mid t \in K\}$ для всех возможных корней $s \in \Phi^+$ порождают максимальную унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$. Со скрученной группой $G(K)$ также ассоциируются „корневые" подгруппы X_s, $s \in G^+$, унипотентная подгруппа $UG(K)$ и группа Вейля $W(K)$ [8].

В случае, когда K — конечное поле характеристики $p > 0$, подгруппа $U = UG(K)$ является силовской p-подгруппой группы $G(K)$. Условие взаимной простоты с p индекса нормализатора в $G(K)$ парного пересечения $U \cap U^g$, $g \in G(K)$, очевидно, равносильно тому, что нормализатор содержит хотя бы одну силовскую p-подгруппу группы $G(K)$. Равносильным является также требование сопряженности в $G(K)$ пересечения $U \cap U^g$ с нормальной под-

* Поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-01-01256).

группой группы U. Поэтому теорему 1 можно сформулировать в следующем эквивалентном виде.

Теорема 2. *Любое парное p-силовское пересечение группы Шевалле $G(K)$ над конечным полем K характеристики p сопряжено в ней с нормальной подгруппой группы $UG(K)$ тогда и только тогда, когда либо группа $G(K)$ — лиева ранга 1, либо $G = A_2$, либо $p = 2$ и $G = B_2$, либо $p = 3$ и $G = G_2$.*

Пусть Ψ_ω^+ (аналогично Ψ_ω^-) — совокупность всех корней $r \in \Phi^+$ с условием $\omega(r) \in \Phi^+$ (соответственно $\omega(r) \in \Phi^-$). Как и в [8] (теорема 8.4), выделяем подгруппы

$$U_\omega^+ = \text{гр}(X_r \mid r \in \Psi_\omega^+), \qquad U_\omega^- = \text{гр}(X_r \mid r \in \Psi_\omega^-).$$

Соответствующие подгруппы выделяют и в скрученных группах [8] (теорема 13.6). Далее полагаем $U = UG(K)$, $W = W(G)$ и обозначаем через B подгруппу Бореля группы Шевалле $G(K)$, содержащую U, а через N — мономиальную подгруппу. Через n_ω обозначаем фиксированный (произвольно) прообраз в N элемента $\omega \in W$ при естественном гомоморфизме $N \mapsto W$. Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $G(K)$ — группа Шевалле нормального или скрученного типа G над полем K и $g \in G(K)$. Тогда существует и единствен элемент $\omega \in W(G)$ такой, что $g \in Bn_\omega U_\omega^-$.*

Доказательство. Группа Шевалле $G(K)$ допускает разложение Брюа $G(K) = BNB$ и поэтому $G(K) = BNU$. В частности, $g \in Bn_\omega U$ для подходящего элемента $\omega \in W$. В случае $G = \Phi$ по лемме 8.4.1 [8] имеем $U = U_\omega^+ U_\omega^-$ и $U_\omega^+ \cap U_\omega^- = 1$. Отсюда $Bn_\omega U = Bn_\omega U_\omega^-$, а единственность ω вытекает из теоремы 8.4.3 [8] о канонической форме элементов группы Шевалле $\Phi(K)$. Доказательство для скрученных типов аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\omega \in W$ и $g \in Bn_\omega U_\omega^-$. Тогда пересечение $U \cap U^g$ сопряжено в $\Phi(K)$ с подгруппой U_ω^+. Если подгруппа U_ω^+ сопряжена в $\Phi(K)$ с нормальной подгруппой группы U, то она сопряжена с ней посредством элемента $n_{\omega'} v$ такого, что $\omega' \in W$, $\Psi_{\omega'}^- \subseteq \Psi_\omega^-$ и $v \in (U_{\omega'}^-)^{n_{\omega'}}$.*

Доказательство. Поскольку $U \lhd B$, для пересечения можем считать, что $g = n_\omega u_1 \in n_\omega U_\omega^-$ и, следовательно, $(U_\omega^+)^g \subset U \cap U^g$. Пусть $\lambda \in U \cap U^g$. Тогда $\lambda = \mu^g \eta^g$ для некоторых элементов $\mu \in U_\omega^+$ и $\eta \in U_\omega^-$. Полагая $V = \langle X_r \mid r \in \Phi^- \rangle$, получаем

$$\eta^{n_\omega} = u_1[(\mu^{n_\omega u_1})^{-1}\lambda]u_1^{-1} \in U \cap V = 1, \qquad \eta = 1.$$

Отсюда $U \cap U^g = (U_\omega^+)^g$ и первое утверждение доказано (см. также [9, с. 120]).

Докажем второе утверждение. Допустим, что $f \in \Phi(K)$ и $H = (U_\omega^+)^f \lhd U$. В силу леммы 1 $f = bn_{\omega'} u_1$, где $b \in B$, $\omega' \in W$, $u_1 \in U_{\omega'}^-$. Положим $v = n_{\omega'} u_1 n_{\omega'}^{-1}$. Тогда

$$H = b^{-1} H b = (U_\omega^+)^{n_{\omega'} u_1} = (U_\omega^+)^{n_{\omega'} v} \lhd U.$$

Заметим, что подгруппа $(U_\omega^+)^{n_{\omega'}}$ порождается корневыми подгруппами $X_{\omega'(a)}$ такими, что $a, \omega(a) \in \Phi^+$. Если при этом $\omega'(a) \in \Phi^-$, то $X_{\omega'(a)}^v \subseteq U \cap V = 1$. Пришли к противоречию. Следовательно, при $a, \omega(a) \in \Phi^+$ всегда имеем $\omega'(a) \in \Phi^+$. Отсюда $\Psi^+_\omega \subseteq \Psi^+_{\omega'}$ и поэтому $\Psi^-_{\omega'} \subseteq \Psi^-_\omega = \Phi^+ \setminus \Psi^+_\omega$. Лемма доказана.

Можно показать, что каждая корневая подгруппа группы $\Phi(K)$ мономиально сопряжена с U^+_ω для подходящего элемента $\omega \in W$; аналогичное утверждение имеет место и для скрученных групп. С применением данного утверждения и леммы 2 устанавливается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $G(K)$ — группа Шевалле лиева ранга > 1 над конечным полем K, $p(\Phi) = \max\{(r,r)/(s,s) \mid r, s \in \Phi\}$, причем либо $G = \Phi$ и число $p(\Phi)$ отлично от чисел $\operatorname{char} K$ и 1, либо $G(K)$ — скрученная группа. Тогда существует мономиальный элемент $n \in G(K)$ такой, что нормализатор пересечения $U \cap U^n$ в группе $G(K)$ имеет p-кратный индекс.*

Теорему 3 анонсировал В. М. Левчук в 2000 г. на „Мальцевских чтениях" (Новосибирск); ее полное доказательство содержится в [10]. Отметим, что подход доказательства теоремы 3 не применим к группам Шевалле нормальных типов, ассоциированных с системами корней одинаковой длины.

Схема доказательства теоремы 2 для нормальных типов $G = \Phi$ усматривается в лемме 2. В случае, когда группа Φ — лиева ранга ≤ 2, теорема 2 доказана в [5], и поэтому можно предполагать, что ранг > 2. Теорема 2 будет доказана в силу леммы 2, если указать элемент $\omega \in W$ такой, что подгруппа U^+_ω не сопряжена в $\Phi(K)$ с нормальной подгруппой группы $U\Phi(K)$. Т. Ю. Войтенко указала такой элемент ω для типов E_l, $l = 6, 7, 8$, в [7], и когда ранг Φ равен 3 в [6]. Таким образом, теорему 2 достаточно установить для групп Шевалле $\Phi(K)$ типов F_4, B_n и C_n при $p = 2$, а также для типов A_n и D_n, $n > 3$.

В работах [6, 7] в качестве требуемого элемента ω в группе Вейля выбран элемент Кокстера. Этот же подход используется нами далее. В п. 2 исследуется множество Ψ^-_ω для фиксированного элемента Кокстера ω. В пп. 3 и 4 доказательство основной теоремы завершено.

2. Множество Ψ^-_ω для элемента Кокстера ω. Известно, что элемент ω группы Вейля произвольной системы корней Φ однозначно определяется, если задать образ фундаментальной системы корней [8] (теорема 2.2.4). Оказывается, множество Ψ^-_ω также полностью характеризует элемент.

Лемма 3. *Если $\omega_1, \omega_2 \in W$ и $\Psi^-_{\omega_1} = \Psi^-_{\omega_2}$, то $\omega_1 = \omega_2$.*

Доказательство. Положим $\Psi^- = \Psi^-_{\omega_1}$ $(= \Psi^-_{\omega_2})$. Доказательство проведем индукцией по $|\Psi^-|$. Если $|\Psi^-| = 0$, то $\omega_1 = \omega_2 = 1$ в силу [8] (теоремы 2.2.3 и 2.1.3). Пусть $|\Psi^-| > 0$. Тогда существует простой корень r такой, что $\omega(r) \in \Phi^-$, иначе получаем $\Psi^- = \varnothing$. Фундаментальное отражение ω_r переводит r в $-r$ и индуцирует перестановку на множестве $\Phi^+ \setminus \{r\}$ согласно [8] (теорема 2.1.5). Поэтому

$$\omega_i \omega_r(\Phi^+) = \{\omega_i(-r)\} \cup \omega_i(\Phi^+ \setminus \{r\}), \qquad \Psi^-_{\omega_i \omega_r} = \Psi^- \setminus \{r\}, \qquad i = 1, 2.$$

По индукции $\omega_1 \omega_r = \omega_2 \omega_r$, откуда $\omega_1 = \omega_2$. Лемма доказана.

Всюду далее в этом и последующих пунктах через ω обозначается элемент Кокстера $\omega = \omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \ldots \omega_{\alpha_n}$ группы Вейля W системы корней Φ, где α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — простые корни, выбранные согласно [13] (табл. I – IX). Цель п. 2 — записать в явном виде множество Ψ^-_ω для систем корней типов A_n, B_n, C_n, D_n и F_4. В связи с леммой 2 перечисляются также элементы $\omega' \in W$ с условием $\Psi^-_{\omega'} \subseteq \Psi^-_\omega$, . Схему описания иллюстрирует тип F_4.

Лемма 4. *Пусть* Φ *типа* F_4. *Тогда*

$$\Psi_\omega^- = \{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4\}. \tag{1}$$

Если $\omega' \in W$, $\omega' \neq 1$, *и* $\Psi_{\omega'}^- \subseteq \Psi_\omega^-$, *то выполняется одно из следующих утверждений*:

a) $\Psi_{\omega'}^- = \Psi_\omega^-$, $\omega' = \omega$;

b) $\Psi_{\omega'}^- = \{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4\}$, $\omega' = \omega_{\alpha_2}\omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}$;

c) $\Psi_{\omega'}^- = \{\alpha_3+\alpha_4, \alpha_4\}$, $\omega' = \omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}$;

d) $\Psi_{\omega'}^- = \{\alpha_4\}$, $\omega' = \omega_{\alpha_4}$.

Доказательство. Согласно [8] (теорема 2.2.2), для функции длины l на группе Вейля W (относительно множества фундаментальных отражений) выполняется равенство $l(\omega) = |\Psi_\omega^-|$. В частности, для Φ типа F_4 имеем $l(\omega) = 4$. Используя стандартное соотношение $\omega_r(s) = s - 2(r,s)/(r,r)r$, получаем

$$\omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}(\alpha_4) = -\omega_{\alpha_3}(\alpha_4) = -(\alpha_3+\alpha_4), \quad \omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}(\alpha_3+\alpha_4) = -\alpha_3, \tag{2}$$

$$\omega_{\alpha_2}\omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}(\alpha_4) = -\omega_{\alpha_2}(\alpha_3+\alpha_4) = -(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),$$
$$\omega_{\alpha_2}\omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}(\alpha_3+\alpha_4) = -(\alpha_2+\alpha_3), \quad \omega_{\alpha_2}\omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}(\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4) = -\alpha_2. \tag{3}$$

С их помощью получаем

$$\omega(\alpha_4) = -\omega_{\alpha_1}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4), \tag{4}$$

$$\omega(\alpha_3+\alpha_4) = -\omega_{\alpha_1}(\alpha_2+\alpha_3) = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \tag{5}$$

$$\omega(\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4) = -\omega_{\alpha_1}(\alpha_2) = -(\alpha_1+\alpha_2), \tag{6}$$

$$\omega(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4) = \omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}(\alpha_1) + \omega(\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4) = -\alpha_1. \tag{7}$$

Отсюда вытекает формула (1) для Ψ_ω^-.

Пусть $\Psi_{\omega'}^- \subseteq \Psi_\omega^-$, как указано в лемме. Тогда $l(\omega') = |\Psi_{\omega'}^-| \leq 4$. При $l(\omega') = 4$ очевидно $\Psi_{\omega'}^- = \Psi_\omega^-$ и по лемме 3 $\omega' = \omega$. Рассмотрим случай, когда $l(\omega') < 4$. Тогда $\omega'(\alpha_4) \in \Phi^-$, так как в противном случае $\omega'(\alpha_j) \in \Phi^+$ для всех j, откуда получаем $\Psi_{\omega'}^- = \varnothing$ и $\omega' = 1$, вопреки выбору ω' в лемме. Легко видеть, что если $\omega'(\alpha_3+\alpha_4) \in \Phi^+$, то $l(\omega') = 1$, $\Psi_{\omega'}^- = \{\alpha_4\}$ и в силу [8] (предложение 2.1.5) выполняется утверждение d) леммы. Допустим, что оба корня $\omega'(\alpha_4)$ и $\omega'(\alpha_3+\alpha_4)$ отрицательные. Тогда $\Psi_{\omega'}^-$ совпадает со множеством $\{\alpha_3+\alpha_4, \alpha_4\}$ или $\{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4\}$ соответственно тому, положительный или отрицательный корень $\omega'(\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4)$. В силу леммы 3 и формул (2), (3) приходим соответственно к равенству $\omega' = \omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}$ или $\omega' = \omega_{\alpha_2}\omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}$. Лемма доказана.

Для типа F_4 и классических типов Φ в описании множества $\Psi_\omega^- = \Psi_\omega^-(\Phi)$ будет использовано представление систем корней из [12, 13]. Напомним, что в [11] (табл. I – IV) все корни выражаются через ортонормированный базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ основного евклидова пространства. Систему положительных корней типа A_{n-1}, B_n, C_n и D_n, как и в [13], можно составить из корней вида $\varepsilon_i - m\,\varepsilon_j = p_{i,mj}$, $1 \leq j \leq i \leq n$, $m \in \{-1, 0, 1\}$. Положим $\omega_{ij} = \omega_{p_{ij}}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* Φ *типа* A_{n-1}. *Тогда* $\Psi_{\omega}^{-} = \{p_{nj} \mid 1 \le j < n\}$. *Если* $\omega' \in W$, $\omega' \ne 1$, *и* $\Psi_{\omega'}^{-} \subseteq \Psi_{\omega}^{-}$, *то существует такое* k, $0 < k < n$, *что*

$$\Psi_{\omega'}^{-} = \{p_{nj} \mid k \le j < n\}, \qquad \omega' = \omega_{k+1k}\omega_{k+2k+1}\ldots\omega_{nn-1}. \tag{8}$$

Доказательство. Элемент Кокстера ω записывается в виде $\omega = \omega_{21}\omega_{32}\ldots$ $\ldots\omega_{nn-1}$. Легко проверяются соотношения

$$\omega_{km}(p_{mj}) = p_{kj}, \quad \omega_{mj}(p_{km}) = p_{kj}, \quad 0 < j < m < k. \tag{9}$$

В частности, $\omega_{ll-1}(p_{lj}) = p_{l-1j}$, $l = n, n-1, \ldots, j+2$. Учитывая также соотношение $\omega_{km}(p_{ij}) = p_{ij}$ при $\{k, m\} \cap \{i, j\} = \varnothing$, находим

$$\omega(p_{nj}) = \omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}(p_{nj}) = \omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{jj-1}\omega_{j+1j}(p_{j+1j}) =$$

$$= \omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{jj-1}(-p_{j+1j}) = \omega_{21}(-p_{j+12}) = -p_{j+11} \in \Phi^{-}, \quad 0 < j < n. \tag{10}$$

Таким образом, элемент ω переводит $n-1$ указанных положительных корней в отрицательные корни. Поскольку $|\Psi_{\omega}^{-}| = l(\omega) \le n-1$, получаем формулу $\Psi_{\omega}^{-} = \{p_{nj} \mid 1 \le j < n\}$.

Пусть $\Psi_{\omega'}^{-} \subseteq \Psi_{\omega}^{-}$, как и в лемме. Тогда включение $\omega'(p_{jj-1}) \in \Phi^{-}$ возможно лишь при единственном значении $j = n$. Следовательно, если $\omega'(p_{nj}) \in \Phi^{+}$, то $\omega'(p_{nj-1}) = \omega'(p_{jj-1}) + \omega'(p_{nj}) \in \Phi^{+}$, $2 \le j < n$. Поэтому существует номер k, $0 < k < n$, такой, что $\Psi_{\omega'}^{-} = \{p_{nj} \mid k \le j < n\}$. С помощью соотношений (9), как и выше, показывается, что совокупность всех положительных корней, которые элемент $\omega_{k+1k}\omega_{k+2k+1}\ldots\omega_{nn-1}$ переводит в отрицательные, совпадает с $\Psi_{\omega'}^{-}$. В силу леммы 3 это завершает доказательство. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* Φ *типа* B_n, C_n *или* D_n, *а* s — *корень, равный* p_{n0}, $p_{n,-n}$ *или* $p_{n,-1}$ *соответственно. Тогда* $\Psi_{\omega}^{-} = \Psi_{\omega}^{-}(A_{n-1}) \cup \{s\}$. *Если* $\omega' \in W$, $\omega' \ne 1$, *и* $\Psi_{\omega'}^{-} \subseteq \Psi_{\omega}^{-}$, *то либо* $\omega' = \omega$, *либо существует такое* k, $0 < k < n$, *что выполняются равенства* (8), *либо*

$$\Phi = D_n, \quad \Psi_{\omega'}^{-} = \{p_{nj} \mid 2 \le j < n\} \cup \{p_{n,-1}\}, \quad \omega' = \omega_{2,-1}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}. \tag{11}$$

Доказательство. В системе корней Φ типа B_n, C_n или D_n выберем простой корень q, равный p_{10}, $p_{1,-1}$ или $p_{2,-1}$ соответственно. Корни $\alpha_1 =$ $= q$, $\alpha_{i+1} = p_{i+1i}$, $0 < i < n$, образуют базис системы корней Φ, а элемент Кокстера ω записывается в виде $\omega = \omega_q\omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}$. Как и при доказательстве леммы 5,

$$\omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}(p_{nj}) = -p_{j+11}, \quad 0 < j < n.$$

Отсюда для каждого из типов B_n и C_n находим $n-1$ положительных корней, которые ω переводит в отрицательные:

$$\omega(p_{nj}) = \omega_q(-p_{j+11}) = -p_{j+1,-1} \in \Phi^{-}, \quad 0 < j < n. \tag{12}$$

Для типа B_n с помощью соотношений $\omega_{km}(p_{k0}) = p_{m0}$, $k > m > 0$, получаем также

$$\omega(p_{n0}) = \omega_{10}\omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}(p_{n0}) = \omega_{10}(p_{10}) = -p_{10} \in \Phi^{-}, \tag{13}$$

а для типа C_n, применяя соотношения $\omega_{km}(p_{k,-k}) = p_{m,-m}$, $k > m > 0$, находим

$$\omega(p_{n,-n}) = \omega_{1,-1}\omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}(p_{n,-n}) = \omega_{1,-1}(p_{1,-1}) = -p_{1,-1}\in\Phi^-. \quad (14)$$

Поскольку $|\Psi_\omega^-| = l(\omega)\le n$, равенство $\Psi_\omega^- = \Psi_\omega^-(A_{n-1})\cup\{s\}$ (корень s определен в лемме) для типов B_n и C_n доказано. К этому же равенству для Φ типа D_n аналогично приводят следующие соотношения:

$$\omega_{km}(p_{k,-1}) = p_{m,-1}, \quad k > m > 1,$$

$$\omega(p_{nj}) = \omega_{2,-1}(-p_{j+1 1}) = \begin{cases} -p_{21}, & j = 1; \\ -p_{j+1,-2}, & 1 < j < n, \end{cases} \quad (15)$$

$$\omega(p_{n,-1}) = \omega_{2,-1}\omega_{21}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}(p_{n,-1}) =$$

$$= \omega_{2,-1}\omega_{21}(p_{2,-1}) = \omega_{2,-1}(p_{2,-1}) = -p_{2,-1}\in\Phi^-.$$

Тем самым доказательство формулы для Ψ_ω^- завершено.

Пусть $\Psi_{\omega'}^-\subseteq\Psi_\omega^-$, как и в лемме. В частности, $\omega'(p_{jj-1})\in\Phi^+$ при всех j, $2\le j<n$, кроме того, $\omega'(q)\in\Phi^+$, где q — простой корень, равный p_{10}, $p_{1,-1}$ или $p_{2,-1}$ для Φ типа B_n, C_n или D_n соответственно. Отсюда, как и при доказательстве леммы 5, вытекает, что при $\omega'(p_{nj})\in\Phi^+$ выполняются соотношения $\omega'(p_{nj-1}) = \omega'(p_{jj-1}) + \omega'(p_{nj})\in\Phi^+$, $2\le j<n$. Поэтому если $\omega'(s)\in\Phi^+$, то существует номер k такой, что $0<k<n$ и выполняются соотношения (8).

Остается рассмотреть случай, когда $\omega'(s)\in\Phi^-$. Для Φ типа B_n и C_n имеем $s = p_{n0}$, $\omega'(s) = \omega'(p_{n1}) + \omega'(q)$ и $s = p_{n,-n}$, $\omega'(s) = 2\omega'(p_{n1}) + \omega'(q)$ соответственно. Отсюда вытекают включение $\omega'(p_{n1})\in\Phi^-$ и равенство $\Psi_{\omega'}^- = \Psi_\omega^-$, откуда по лемме 3 $\omega' = \omega$. Пусть Φ типа D_n и, следовательно, $s = p_{n,-1}$. Учитывая равенство $\omega'(p_{n,-1}) = \omega'(p_{n2}) + \omega'(p_{2,-1})$, получаем включение $\omega'(p_{n2})\in\Phi^-$. Следовательно, $\{p_{nj}\,|\,2\le j<n\}\cup\{p_{n,-1}\}\subseteq\Psi_{\omega'}^-$; равенство здесь достигается при $\omega' = \omega_{2,-1}\omega_{32}\omega_{43}\ldots\omega_{nn-1}$, причем по лемме 3 этот случай единственный.

3. Подгруппы, мономиально сопряженные с подгруппой U_ω^+. Как и в п. 2, полагаем $\omega = \omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\ldots\omega_{\alpha_n}$. В этом пункте доказывается следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $\Phi(K)$ — группа Шевалле над произвольным полем K типа F_4 или классического типа ранга ≥ 3. Тогда в группе $U\Phi(K)$ не существует нормальная подгруппа, которая мономиально сопряжена в $\Phi(K)$ с U_ω^+.*

Доказательство. Подгруппа U_ω^+ инвариантна относительно диагональных автоморфизмов. Поэтому произвольная мономиально сопряженная с нею в $\Phi(K)$ подгруппа сопряжена и с элементом вида $n_{\omega'}$, $\omega'\in W$. Она является произведением корневых подгрупп X_r для всех возможных корней r из множества $\omega'(\Psi_\omega^+)$.

Будем говорить, что r, s — корни типа A_2 (или B_2) в системе корней Φ, если $r+s\in\Phi$ и все целочисленные линейные комбинации корней r, s, лежащие в Φ, образуют подсистему корней типа A_2 (соответственно B_2). Подмножество $\Psi\subset\Phi^+$ называем *слабо нормальным* в Φ^+, если для корней r, s типа

A_2 в Φ^+ при $r \in \Psi$ всегда выполняется включение $r + s \in \Psi$. Назовем Ψ *нормальным* в Φ^+, если из включений $r \in \Psi$, $s, r + s \in \Phi^+$ всегда следует включение $r + s \in \Psi$. Ясно, что для типов B_n, C_n и F_4 требование нормальности подмножества в Φ^+ сильнее требования слабой нормальности, а для систем корней одной длины эти понятия совпадают.

Предполагая, что лемма не верна, имеем $(U_\omega^+)^{n_{\omega'}} \lhd U$ для подходящего элемента $\omega' \in W$. В частности, множество $\omega'(\Psi_\omega^+)$ должно быть слабо нормальным, а при $\operatorname{char} K \neq 2$ даже нормальным. Далее показывается, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Исследуем множество $\omega'(\Psi_\omega^+)$. По лемме 2 $\Psi_{\omega'}^- \subseteq \Psi_\omega^- = \Phi^+ \setminus \Psi_\omega^+$ и, следовательно, $\omega'(\Psi_\omega^+) \subset \omega'(\Psi_{\omega'}^+) \subset \Phi^+$. Описание всех элементов ω' условием $\Psi_{\omega'}^- \subseteq \Psi_\omega^-$ приведено в леммах 4 – 6. Ясно, что $\omega(\Psi_\omega^+) = \Phi^+ \setminus \{-\omega(\Psi_\omega^-)\}$ и $\omega'(\Psi_\omega^+) \cap (-\omega'(\Psi_{\omega'}^-)) = \omega'(\Psi_\omega^+ \cap (-\Psi_{\omega'}^-)) = \varnothing$. Ниже используется также равенство

$$\omega'(\Psi_\omega^+) = \Phi^+ \setminus [(-\omega'(\Psi_{\omega'}^-)) \cup \omega'(\Psi_\omega^- \setminus \Psi_{\omega'}^-)].$$

Пусть Φ типа F_4. Если $\omega' = \omega_{\alpha_4}$, то $\omega'(\Psi_{\omega'}^-) = \{-\alpha_4\}$ и по лемме 4

$$\omega'(\Psi_\omega^-) = \omega'(\Psi_{\omega'}^-) \cup \{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3\},$$

$$\omega'(\Psi_\omega^+) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3\}.$$

В частности, $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \notin \omega'(\Psi_\omega^+)$. В то же время множество $\omega'(\Psi_\omega^+)$ содержит корень α_1 и в силу слабой нормальности содержит также корень $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$. Противоречие.

При $\omega' \neq \omega_{\alpha_4}$ выполняется одно из утверждений a), b), c) леммы 4. Покажем, что каждое из них дает включение $\alpha_4 \notin \omega'(\Psi_\omega^+)$. Когда $\omega' = \omega$, по формулам (4) – (7) получаем

$$\omega(\Psi_\omega^-) = \{-\alpha_1, -(\alpha_1 + \alpha_2), -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\}$$

и, следовательно, $\omega(\Psi_\omega^+) = \Phi^+ \setminus \{-\omega(\Psi_\omega^-)\} \ni \alpha_4$. Далее, при $\omega' = \omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}$ в силу (2) имеем

$$\omega'(\Psi_{\omega'}^-) = \{-\alpha_3, -(\alpha_3 + \alpha_4)\}, \qquad \omega'(\Psi_\omega^-) = \omega'(\Psi_{\omega'}^-) \cup \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\},$$

$$\omega'(\Psi_\omega^+) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}.$$

Наконец, в случае b) леммы 4 $\omega' = \omega_{\alpha_2}\omega_{\alpha_3}\omega_{\alpha_4}$. С помощью (3) находим

$$\omega'(\Psi_{\omega'}^-) = \{-\alpha_2, -(\alpha_2 + \alpha_3), -(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\}, \quad \omega'(\Psi_\omega^-) = \omega'(\Psi_{\omega'}^-) \cup \{\alpha_1\},$$

$$\omega'(\Psi_\omega^+) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1\}.$$

Итак, при $\omega' \neq \omega_{\alpha_4}$ во всех случаях множество $\omega'(\Psi_\omega^+)$ содержит α_4 и в силу слабой нормальности содержит также корни $\alpha_3 + \alpha_4$, $(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4$ и $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4$. Однако по доказанному множество $\omega'(\Psi_\omega^+)$ не содержит корень $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ или $\alpha_3 + \alpha_4$ соответственно случаям a), b) и c) леммы 4. Полученное противоречие завершает доказательство леммы для типа F_4.

Для классических типов элементы ω' и множества $\Psi^-_{\omega'}$ описаны в леммах 5 и 6. В основном случае, когда $\omega' = \omega_{k+1k}\omega_{k+2k+1}\ldots\omega_{nn-1}$ и поэтому $\Psi^-_{\omega'} = \{p_{nj} \mid k \le j < n\}$, $0 < k < n$, с помощью соотношений (9) и (10) получаем равенство

$$\omega'(\Psi^-_{\omega'}) = -\{p_{k+1k}, p_{k+2k}, \ldots, p_{nk}\}. \tag{16}$$

Множество $\omega'(\Psi^-_{\omega})$ для Φ типа A_{n-1} и $1 < k < n$ имеет вид

$$\omega'(\Psi^-_{\omega'}) \cup \{p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{kk-1}\}.$$

Для Φ типов B_n, C_n и D_n, $0 < k < n$, в силу (12) – (15) добавляется еще один корень p_{kt}, равный соответственно p_{k0}, $p_{k,-k}$ или $p_{k,-1}$, откуда

$$\omega'(\Psi^+_{\omega}) = \Phi^+ \backslash \{p_{kt}, p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{kk-1}, p_{k+1k}, p_{k+2k}, \ldots, p_{nk}\}. \tag{17}$$

Исключением является случай $k = 1$ при $\Phi = D_n$, в котором

$$\omega'(\Psi^-_{\omega}) = \omega'(\Psi^-_{\omega'}) \cup \{p_{2,-1}\}, \qquad \omega'(\Psi^+_{\omega}) = \Phi^+ \backslash \{p_{2,-1}, p_{21}, p_{31}, \ldots, p_{n1}\}.$$

По доказанному $p_{nk} \notin \omega'(\Psi^+_{\omega})$ во всех перечисленных случаях при $k \ne n-1$. С другой стороны, множество $\omega'(\Psi^+_{\omega})$ содержит корень p_{nn-1} и вместе с ним корень p_{nk} в силу слабой нормальности и равенства $p_{nk} = p_{nn-1} + p_{n-1k}$. Пусть $k = n-1$. Тогда $\omega' = \omega_{nn-1}$ и, в частности, по формуле (17) $p_{n-1,n-3} \notin \omega'(\Psi^+_{\omega})$. В то же время множество $\omega'(\Psi^+_{\omega})$ должно содержать корень $p_{n-1,n-3} = p_{n-2,n-3} + p_{n-1,n-2}$, поскольку оно содержит корень $p_{n-2,n-3}$ и слабо нормально. Вновь получили противоречие.

Когда Φ типа D_n и $\omega' = \omega_{2,-1}\omega_{32}\ldots\omega_{nn-1}$, по лемме 6 получаем

$$\omega'(\Psi^-_{\omega'}) = -\{p_{2,-1}, p_{3,-1}, \ldots, p_{n,-1}\},$$
$$\omega'(\Psi^-_{\omega}) = \omega'(\Psi^-_{\omega'}) \cup \{p_{21}\}, \qquad \omega'(\Psi^+_{\omega}) = \Phi^+ \backslash \{p_{21}, p_{2,-1}, p_{3,-1}, \ldots, p_{n,-1}\}. \tag{18}$$

В частности, $p_{n,-1} \notin \omega'(\Psi^+_{\omega})$. В то же время слабо нормальное множество $\omega'(\Psi^+_{\omega})$ вместе с корнем p_{nn-1} должно содержать корень $p_{n,-1} = p_{nn-1} + p_{n-1,-1}$.

Те же рассуждения приводят к противоречию и для типов B_n, C_n и D_n, когда $\omega' = \omega$; для $\Phi = D_n$ здесь используется равенство $p_{n,-2} = p_{nn-1} + p_{n-1,-2}$. Соотношения из леммы 6 для ω-образа множества Ψ^-_{ω} позволяют в этих случаях записать множество $\omega(\Psi^-_{\omega})$ $(= -(\Phi^+ \backslash \omega(\Psi^+_{\omega})))$ в явном виде

$$\omega(\Psi^-_{\omega}) = -\{p_{10}, p_{2,-1}, \ldots, p_{n,-1}\}, \qquad \Phi = B_n,$$

$$\omega(\Psi^-_{\omega}) = -\{p_{1,-1}, p_{2,-1}, \ldots, p_{n,-1}\}, \qquad \Phi = C_n,$$

$$\omega(\Psi^-_{\omega}) = -\{p_{2,-1}, p_{21}, p_{3,-2}, \ldots, p_{n,-2}\}, \qquad \Phi = D_n.$$

Таким образом, лемма 7 доказана.

С помощью найденного при доказательстве леммы 7 явного описания множества $\omega'(\Psi^-_{\omega'})$ несложно выявляются его различные свойства. В частности, для классических лиевых типов и типа F_4 справедлива следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть* $\Psi = \omega'(\Psi_{\omega'}^-)$ *для элемента* $\omega' \in W$ *с условием* $\Psi_{\omega'}^- \subseteq \subseteq \Psi_{\omega}^-$. *Тогда верны следующие свойства:*

a) *подмножество* $-\Psi$ *в* Φ^+ *при* $\Phi = D_n$, $n \geq 4$, $\omega' = \omega$, *содержит в точности два простых корня, а в остальных случаях — единственный простой корень;*

b) *сумма любых двух корней из* Ψ *не является корнем;*

c) *если* q *— простой, а* r *— непростой корни из* $-\Psi$, *то* $r - q \in \omega'(\Psi_{\omega}^+)$, *причем* $r - q - \alpha \notin \Phi$ *для любого корня* $\alpha \in -\Psi \setminus \{r\}$, *за исключением случая* $\omega' = \omega$, *когда* $\Phi = B_n$, $\alpha = q$ *или* $\Phi = D_n$ (q, α *— различные простые корни).*

4. Доказательство основной теоремы. Как отмечалось в п. 1, доказательство равносильных теорем 1 и 2 достаточно провести для классических типов Φ ранга ≥ 3 и для типа F_4. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть* r *и* s *— положительные корни,* $v \in X_{-s}$ *и* $X_r^v \subset U$. *Тогда либо нормальное замыкание в* U *подгруппы* X_r^v *содержит подгруппу* X_r, *либо* r *и* $-s$ *— корни типа* B_2 *или* G_2.

Доказательство. Пусть M — нормальное замыкание в U подгруппы X_r^v. Очевидно, $M \supset X_r$ при $X_r^v = X_r$. Допустим, что $X_r^v \neq X_r$ и, следовательно, $v \neq \neq 1$. По условию леммы $X_r^v \subset U$ и $v = x_{-s}(t)$ для некоторого $t \in K$. Поэтому $s \neq -r$ и $r - s \in \Phi^+$. Если r и $-s$ — корни типа B_2 или G_2, то утверждение леммы выполняется. Пусть r и $-s$ — корни типа A_2. Тогда $r + s \notin \Phi$ и верны соотношения

$$X_r^v = \{x_r(a)x_{r-s}(\pm at) \mid a \in K\} \subset X_r X_{r-s}, \quad [X_r^v, X_s] = [X_{r-s}, X_s] = X_r.$$

Учитывая нормальность M в U, получаем включение $X_r \subset M$. Лемма доказана.

Пусть $\omega = \omega_{\alpha_1}\omega_{\alpha_2}\ldots\omega_{\alpha_n}$. Докажем, что подгруппа U_ω^+ не сопряжена в группе $\Phi(K)$ с нормальной подгруппой группы U; тем самым в силу леммы 2 будет доказана и теорема 2. Предположим противное: подгруппа U_ω^+ сопряжена с нормальной подгруппой F группы U. Тогда по лемме 2 существуют элемент $\omega' \in W$ и сопрягающий элемент $n_{\omega'}v$ такие, что

$$F = (U_\omega^+)^{n_{\omega'}v} = \prod_{r \in \omega'(\Psi_\omega^+)} X_r^v \lhd U, \quad v \in (U_{\omega'}^-)^{n_{\omega'}}, \quad \Psi_{\omega'}^- \subseteq \Psi_\omega^-.$$

Положим $\Psi = \omega'(\Psi_{\omega'}^-)$; ясно, что $\Psi \subset \Phi^-$. Все элементы ω' с условием $\Psi_{\omega'}^- \subseteq \Psi_\omega^-$ перечислены в леммах 4 – 6. По лемме 8, b) сумма корней из Ψ не является корнем. Поэтому корневые подгруппы X_r, $r \in \omega'(\Psi_\omega^+)$, порождающие F, перестановочны. По лемме 7 можно предполагать, что F не совпадает с подгруппой $(U_\omega^+)^{n_{\omega'}}$, в частности, $v \neq 1$. Поэтому в силу конечности поля K для доказательства теоремы 2 достаточно доказать включение

$$F \supseteq (U_\omega^+)^{n_{\omega'}}. \tag{19}$$

Пусть Φ типа F_4 и $\operatorname{char} K = 2$. Систему положительных корней представим как объединение систем положительных корней $\{q_{ij} \mid 0 \leq |j| < i \leq 4\}$ и $\{p_{ij} \mid 0 \leq |j| < i \leq 4, i \neq j\}$ соответственно типов B_4 и C_4 с пересечением $\{q_{i0}, p_{i,-i}, 1 \leq i \leq 4\}$ [12] (§ 4, см. также диаграмму). При $\omega' = \omega$ имеем $\omega(\Psi_\omega^+) =$

$= \Phi^+\backslash(-\Psi)$. Множество Ψ состоит из корней q_{32}, q_{31}, q_{30} и p_{42}. Соответствующие им корневые множители в υ обозначим через υ_1, υ_2, υ_3, υ_4, а их аргументы — через a, b, c и d соответственно. Корень $q = q_{32}$ — простой. Очевидно, υ-сопряжение подгруппы X_s для $s = q_{21}$ совпадает с υ_2-сопряжением, так что $U \supset [\upsilon_2, X_s] = x_{-q}(bK)$, откуда $b = 0$. Равенства $c = d = 0$ получаем аналогично из включений $U \supset [\upsilon, X_s]$ для $s = p_{32}$ и $s = q_{3,-1}$. Таким образом, элемент υ совпадает с $x_{-q}(a)$. Ясно, что корневые подгруппы X_s для $s = p_{3,-2}$ и $s = q_{4,-1}$ перестановочны с υ и, следовательно, лежат в F. Но тогда вместе с подгруппой X_s^{υ} для $s = p_{41}$ в F лежит и подгруппа X_s. Если $s = q_{3,-1}$ или $s = q_{42}$, то s и $-q$ — корни типа A_2 и $X_s \subset F$ по лемме 9. В остальных случаях при $s \in \omega(\Psi_\omega^+)$ разность $s - q$ не является корнем и поэтому $X_s = X_s^{\upsilon} \subset F$, что доказывает включение (19).

При $\omega' \neq \omega$ множества Ψ и $\omega'(\Psi_\omega^+)$ также описаны в п. 3. Аналогично случаю $\omega' = \omega$ доказывается равенство $\upsilon = x_{-q}(a)$ для (единственного) простого корня q из $-\Psi$; при $l(\omega') = 1$ это очевидно, а в оставшихся случаях существует корень $r \in -\Psi$ такой, что $p_{32} - r \in \Phi^-$. При $l(\omega') = 2$ имеем $q = p_{21}$, $\Psi = -\{p_{21}, p_{31}\}$ и $\omega'(\Psi_\omega^+) = \Phi^+\backslash\{p_{21}, p_{31}, q_{21}, q_{31}\}$. Корневые подгруппы X_s, соответствующие корням $s = q_{i0}$ и корню $s = q_{32}$, централизуются элементом υ и поэтому лежат в F. Подгруппа F, в силу нормальности, содержит X_s и для $s = q_{31}$. Отсюда при $r = q_{3,-1}$ получаем включение $X_r \subset X_r^{\upsilon}[X_r, \upsilon] \subset F$. С другой стороны, $F \supset [[X_r^{\upsilon}, X_q], X_q]X_s \supset X_r$ при $r = q_{2,-1}$ и $r = q_{20}$. Для корней s, равных p_{41}, $p_{4,-2}$ и $p_{3,-2}$, включение $X_s \subset F$ получаем по лемме 9, а в оставшихся случаях оно следует из условия $s - q \notin \Phi$ или из нормальности F в U. Для случаев $l(\omega') = 1$ и 3 доказательство включения (19) аналогично. Это завершает доказательство теоремы 2 для типа F_4.

Докажем теорему 2 для классических типов. Запишем υ как произведение $\prod_{s\in-\Psi} x_{-s}(a_s)$ для некоторых элементов $a_s \in K$. Вначале докажем, что $a_r = 0$, когда r — непростой корень из $-\Psi$. По лемме 8 в $-\Psi$ существует простой корень q, причем $r - q \in \omega'(\Psi_\omega^+)$, так что $X_{r-q}^{\upsilon} \subset F$. Если в Φ все корни одной длины, то $-r$ и $r - q$ есть корни типа A_2. Пусть $\Phi = A_n$. Тогда по лемме 8 q — единственный простой корень в $-\Psi$ и $r - q - \alpha \notin \Phi$ для любого корня $\alpha \in (-\Psi)\backslash\{r\}$. Поэтому $X_{r-q}^{\upsilon} = X_{r-q}^{\upsilon'}$ для элемента $\upsilon' = x_{-r}(a_r)$. По лемме 9 $F \supset X_{r-q}$ и, следовательно,

$$U \supset F \supset X_{r-q}X_{r-q}^{\upsilon'} \supset [\upsilon', X_{r-q}] = x_{-q}(a_r K), \tag{20}$$

откуда $a_r = 0$. Произвол в выборе r дает равенство $\upsilon = x_{-q}(a_q)$. Вновь применяя лемму 9, получаем включение $F \supseteq (U_\omega^+)^{n_{\omega'}}$. Таким образом, для Φ типа A_n теорема 2 доказана.

По лемме 8 единственность простого корня q в $-\Psi$ и условие $r - q - \alpha \notin \Phi$ для корней $\alpha \in (-\Psi)\backslash\{r\}$, а следовательно, как и выше, включение (19) выполняются также при $\Phi = D_n$, когда $\omega' \neq \omega$. Рассмотрим случай $\omega' = \omega$. В соответствии с описанием множества $\omega(\Psi_\omega^-)$ в лемме 7 имеем

$$\omega'(\Psi_\omega^+) = \Phi^+\backslash(-\omega(\Psi_\omega^-)) = \Phi^+\backslash\{p_{2,-1}, p_{21}, p_{3,-2}, \ldots, p_{n,-2}\}$$

и $r = p_{i,-2}$ для некоторого фиксированного i, $2 < i \leq n$. По лемме 8, c) включение $r-q-\alpha\in\Phi$ здесь возможно при $\alpha=r$, а также в случае $\alpha=p$, где p, q — простые корни, $\{p,q\}=\{p_{2,-1},p_{21}\}$. Поэтому $F\supset X_{r-q}^{\upsilon}=X_{r-q}^{\upsilon'}$ для элемента $\upsilon'=x_{-r}(a_r)x_{-p}(a_p)$. Отсюда

$$U\supset F\ni x_{r-q}(t)^{\upsilon'}=x_{r-q}(t)[x_{r-q}(t),\upsilon']=x_{r-q}(t)[x_{r-q}(t),x_{-r}(a_r)x_{-p}(a_p)]=$$
$$=x_{r-q}(t)[x_{r-q}(t),x_{-r}(a_r)][x_{r-q}(t),x_{-p}(a_p)]=$$
$$=x_{r-q}(t)x_{-q}(\pm ta_r)x_{r-q-p}(\pm ta_p),\qquad t\in K,$$

и, следовательно, $a_rK=0$ и $a_r=0$. В силу произвола r получаем $\upsilon=x_{-p}(a_p)x_{-q}(a_q)$. Выберем произвольный корень $s\in\omega(\Psi_\omega^+)$ и покажем, что $X_s\subset F$. Когда $s-p$ и $s-q$ — корни, они, очевидно, лежат в Φ^+. Так как $q=p_{2,\pm1}$, то корень $s-q$ имеет вид $p_{i,\mp1}$ или p_{i2}, $i>2$. Поскольку $(p_{i2}+q)-p\notin\Phi$, то $s-q=p_{i,\mp1}$, откуда $s=p_{i,-2}\in(-\Psi)=\Phi^+\setminus\omega(\Psi_\omega^+)$ вопреки выбору s. Если $s-q\notin\Phi$ или $s-p\notin\Phi$ и, следовательно, $X_s^{x_{-p}(a_p)}=X_s^{\upsilon}\subset F$ или $X_s^{x_{-q}(a_q)}=X_s^{\upsilon}\subset F$ соответственно, то по лемме 9 получаем включение $X_s\subset F$. Тем самым теорема 2 для $\Phi=D_n$ доказана.

При $\Phi=B_n$ простой корень q в $-\Psi$ также единствен и для $\omega'\neq\omega$ пара $-r$ и $r-q$ всегда типа A_2, как показывают формулы (16) для множества Ψ и (17) для $\omega'(\Psi_\omega^+)$. С помощью леммы 8, как и в случае $\Phi=A_n$, получаем равенство $X_{r-q}^{\upsilon}=X_{r-q}^{\upsilon'}$ для элемента $\upsilon'=x_{-r}(a_r)$ и соотношения (20), откуда $\upsilon=x_{-q}(a_q)$. Формула (17) показывает, что в $\omega'(\Psi_\omega^+)$ существует единственный (короткий) корень $s\ (=p_{k+10})$, для которого s и $-q$ — корни типа B_2, причем $\omega'(\Psi_\omega^+)\not\ni s-q\ (=p_{k0})$. Для остальных корней согласно лемме 9 соответствующая корневая подгруппа лежит в F и все они вместе с подгруппой X_s^{υ} порождают в F подгруппу H порядка $\geq|U_\omega^+|$. Выберем в $-\Psi$ корень r наивысшей высоты; в обозначениях (16) $r=p_{nk}$, $q=p_{k+1k}$ и $r-q=p_{nk+1}$. Тогда подгруппа X_{r-q}^{υ} лежит в F, но не лежит в H. Следовательно, $|F|\geq|H||X_{r-q}|>|U_\omega^+|$, так что подгруппы F и U_ω^+ не могут быть сопряженными. Таким образом, предположение о нормальности F в U в этом случае приводит к противоречию.

Рассмотрим случай $\omega'=\omega$. В соответствии с описанием множества $\Psi=\omega(\Psi_\omega^-)$ в лемме 7

$$\omega(\Psi_\omega^+)=\Phi^+\setminus(-\omega(\Psi_\omega^-))=\Phi^+\setminus\{p_{10},p_{2,-1},p_{3,-1},\ldots,p_{n,-1}\}.$$

Здесь $-r$ и $r-q$ при непростом $r\in(-\Psi)$ — корни типа B_2. Включение $r-q-\alpha\in\Phi$ ($\alpha\in(-\Psi)$) по лемме 8, с) возможно лишь при $\alpha=r\ (=p_{i,-1})$ и $\alpha=q\ (=p_{10})$. Поскольку $r-q\ (=p_{i0})$ и $-q$ — короткие корни, то при $\operatorname{char}K=2$ элементы подгруппы X_{r-q} перестановочны с элементом $x_{-q}(a_q)$ и $X_{r-q}^{\upsilon}=X_{r-q}^{\upsilon'}\subset F$ для элемента $\upsilon'=x_{-r}(a_r)$. Отсюда

$$U\supset X_{r-q}X_{r-q}^{\upsilon'}\supset[X_{r-q},\upsilon']=[X_{r-q},x_{-r}(a_r)],$$

так что $U\supset x_{-q}(Ka_r)$, $a_rK=0$ и $a_r=0$. В силу произвола в выборе r получаем $\upsilon=x_{-q}(a_q)$. Отметим, что любой длинный корень s с условием $s-q\in\Phi^+$

лежит в $-\Psi = \Phi^+ \setminus \omega(\Psi^+_\omega)$. С другой стороны, при $\operatorname{char} K = 2$ подгруппа X_{-q} поэлементно перестановочна с любой корневой подгруппой, соответствующей короткому корню $s \neq -q$. Поэтому $F = (U^+_\omega)^{n_{\omega'}}$, что согласно лемме 7 невозможно.

Известно, что группы Шевалле типов B_n и C_n над совершенным полем характеристики 2 изоморфны (см., например, [8], предложение 11.3.2). Таким образом, доказательство теоремы 2 для типов B_n и C_n также завершено.

1. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). – 14-е изд. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. – 136 с.
2. *Зенков В. И.* Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Красноярск, 1996.
3. *Войтенко Т. Ю., Левчук В. М.* Гипотеза В. И. Зенкова о парных p-силовских пересечениях групп Шевалле характеристики p // Междунар. сем. по теории групп, посв. 70-летию А. И. Старостина и 80-летию Н. Ф. Сесекина: Тез. докл. – Екатеринбург: Урал. ун-т, 2001. – С. 55 – 57.
4. *Войтенко Т. Ю.* Гипотеза В. И. Зенкова о парных p-силовских пересечениях групп Шевалле характеристики p // Тез. II Всесиб. конгр. женщин-математиков. – Красноярск: Краснояр. ун-т, 2002. – С. 40 – 41.
5. *Войтенко Т. Ю., Левчук В. М.* Парные унипотентные пересечения групп Шевалле малых лиевых рангов // Симметрия и дифференциальные уравнения. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2000. – С. 71 – 74.
6. *Войтенко Т. Ю.* Парные силовские пересечения групп Шевалле лиева ранга 3 // Исследования по математическому анализу и алгебре. – Томск: Томск. ун-т, 2001. – Вып. 3. – С. 21 – 27.
7. *Войтенко Т. Ю.* Парные унипотентные пересечения групп Шевалле типов E_l // Сб. тр. – Красноярск: Краснояр. ун-т, 2001. – С. 32 – 40.
8. *Carter R.* Simple groups of Lie type. – New York: Wiley and Sons, 1972.
9. *Кабанов В. В., Кондратьев А. С.* Силовские 2-подгруппы конечных групп. – Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. – 146 с.
10. *Левчук В. М.* Гиперцентральные ряды и парные пересечения силовских подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. – 2002. – **41**, № 4. – С. 567 – 578.
11. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. – М.: Мир, 1982. – Ч. IV – VI. – 334 с.
12. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и логика. – 1990. – **29**, № 2. – С. 141 – 161.
13. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Там же. – № 3. – С. 315 – 338.

Получено 06.03.2002