УДК 519.4

О. Д. Артемович (Львов. нац. ун-т)

ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ МАКСИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

We obtain a characterization of not finitely generated groups with a maximality condition on nonhypercentral (respectively nonnilpotent) subgroups.

Отримано характеризацію груп, які не є скінченнопородженими, з умовою максимальності для негіперцентральних (відповідно ненільпотентних) підгруп.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. С. Н. Черников первым заметил, что исследования бесконечных групп с „малым" множеством не $\mathfrak{X}$-подгрупп (или, по-другому, групп, богатых на $\mathfrak{X}$-подгруппы) дают хорошие результаты, и предложил изучать их. Примерами таких групп являются минимальные не $\mathfrak{X}$-группы. Напомним, группа G называется минимальной не $\mathfrak{X}$-группой, если она не $\mathfrak{X}$-группа, но любая ее собственная подгруппа является $\mathfrak{X}$-группой. Минимальные не $\mathfrak{X}$-группы исследовались многими авторами. Особое место среди этих исследований занимают минимальные ненильпотентные группы и их обобщения. Конечные минимальные ненильпотентные группы описаны Л. Редеи [1]. М. Ньюмен и Дж. Вайголд [2] инициировали исследование бесконечных минимальных ненильпотентных групп и, в частности, описали такого вида группы, не являющиеся бесконечнопорожденными и содержащие максимальную подгруппу (сокращенно названные ими AN^*-группами). Первые примеры ненильпотентных групп с нильпотентными и субнормальными собственными подгруппами (и, как следствие этого, без максимальных подгрупп) построили Г. Хайнекен и И. Мохамед [3]; такие группы принято называть группами типа Хайнекена – Мохамеда. Различные примеры групп типа Хайнекена – Мохамеда строили Дж. Мелдрум [4], Б. Хартли [5], Б. Бруно и Р. Филлипс [6], Ф. Менегаццо [7]. Из результата В. Мереса [8] следует, что группы типа Хайнекена – Мохамеда всегда разрешимы. Класс групп с условием максимальности для не $\mathfrak{X}$-подгрупп является естественным расширением класса минимальных не $\mathfrak{X}$-групп и содержит примеры групп с „малыми" множествами не $\mathfrak{X}$-подгрупп. В данной работе $\mathfrak{X}$ — класс гиперцентральных (соответственно нильпотентных) групп. Поэтому далее будем говорить, что G удовлетворяет условию максимальности Max-$\overline{ZA}$ для негиперцентральных подгрупп (соответственно Max-$\overline{N}$ для ненильпотентных подгрупп), если она не имеет бесконечной строго возрастающей цепочки негиперцентральных (соответственно ненильпотентных) подгрупп. Понятно, что класс групп с условием максимальности Max-$\overline{ZA}$ для негиперцентральных (соответственно Max-$\overline{N}$ для ненильпотентных) подгрупп содержит минимальные негиперцентральные группы [9] (соответственно группы Хайнекена – Мохамеда). Отметим, что в этом направлении группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп изучались С. Н. Черниковым (см., например, [10]) и В. П. Шунковым [11], а группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп — Д. И. Зайцевым и Л. А. Кудраченко [12].

В настоящей статье изучаются группы, богатые на гиперцентральные подгруппы, а именно, получена характеризация групп, не являющихся конечнопорожденными, с условием максимальности Max-$\overline{ZA}$ для негиперцентральных подгрупп (и соответственно Max-$\overline{N}$ для ненильпотентных).

Доказаны следующие результаты.

Теорема А. *Пусть G — группа, не являющаяся конечнопорожденной. Тогда G удовлетворяет условию* Max-$\overline{N}$ *в том и только в том случае, когда она локально нильпотентная группа одного из следующих типов:*

1) G — *нильпотентная группа*;

2) $G = P \times Q$, *где* Q — *конечная нильпотентная* p'-*подгруппа*, $P = N_0 F$ — *ненильпотентная* p-*подгруппа*, N_0 — *характеристическая неразложимая минимальная ненильпотентная подгруппа из* P, F — *конечная подгруппа, а* $G'F$ — *нильпотентная подгруппа*;

3) G — *смешанная группа, периодическая часть которой* $\tau(G) = P \times Q$ — *группа типа* 2, $G = N_0 S$, *где* S — *конечнопорожденная подгруппа, а* $N_0' S$ — *нильпотентная подгруппа*;

4) $G = LF$ — *произведение делимой абелевой* p-*подгруппы* L *и конечнопорожденной подгруппы* F, $\tau(G)$ — *нильпотентная подгруппа*, $C_F(L) \neq F$, $L = [L, \langle z \rangle]$ *для каждого элемента* $z \in F \setminus C_F(L)$ *и любая ненильпотентная подгруппа субнормальна в* G;

5) $G = (L\langle x \rangle)F$, *причем* L — *делимая черниковская* p-*подгруппа*, $L\langle x \rangle$ — AN^*-*группа*, F — *конечнопорожденная подгруппа*, $L = [L, G]$, $F_0 / C_{F_0}(L)$ — p-*группа, где* $F_0 = \langle x, F \rangle$.

Теорема B. *Пусть* G — *группа, не являющаяся конечнопорожденной. Тогда* G *удовлетворяет условию* Max-$\overline{ZA}$ *в том и только в том случае, когда она локально нильпотентная группа одного из следующих типов*:

1) G — *гиперцентральная группа*;

2) $G = P \times Q$ — *прямое произведение конечной нильпотентной* p'-*подгруппы* Q *и негиперцентральной* p-*подгруппы* P, P *имеет характеристическую подгруппу* X_0 *конечного индекса, являющуюся минимальной негиперцентральной группой, а* G' — *гиперцентральная подгруппа*;

3) G — *смешанная группа, периодическая часть которой* $\tau(G) = P \times Q$ — *группа типа* 2, G' — *гиперцентральная подгруппа и* G / X_0 — *конечнопорожденная группа*.

Ранее группы с условием максимальности для негиперцентральных подгрупп рассматривались автором в [13, 14]; часть результатов этой работы анонсирована в [15]. Группы с условием максимальности для ненильпотентных подгрупп изучались также М. Диксоном и Л. А. Курдаченко [16, 17].

Пусть p — простое число, $\tau(H)$ — периодическая часть локально нильпотентной группы H, $Z(G)$ — центр группы G, $G^p = \langle x^p \mid x \in G \rangle$, $G', G'', \ldots$ $\ldots, G^{(k)}, \ldots$ — последовательные коммутанты группы G. Кроме того, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — квазициклическая p-подгруппа, $\mathbb{Q}_p$ — аддитивная группа тех рациональных чисел, знаменатели которых являются степенями простого числа p, $\mathbb{F}_p$ — конечное поле из p элементов, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, RG — групповое кольцо группы G над коммутативным кольцом R. Все остальные используемые обозначения и термины стандартны и содержатся, например, в [18 – 20].

Ниже исследуются группы с условием максимальности Max-$\overline{ZA}$ для негиперцентральных подгрупп (соответственно Max-$\overline{N}$ для ненильпотентных).

Лемма 1. *Пусть* G — *группа, удовлетворяющая условию* Max-$\overline{ZA}$ (*соответственно* Max-$\overline{N}$), H — *ее подгруппа. Тогда*:

1) H *удовлетворяет условию* Max-$\overline{ZA}$ (*соответственно* Max-$\overline{N}$);

2) *если* H *нормальна в* G, *то фактор-группа* G / H *удовлетворяет условию* Max-$\overline{ZA}$ (*соответственно* Max-$\overline{N}$); *если, кроме того,* H *негиперцентральна* (*соответственно ненильпотентна*), *то* G / H — *группа с условием максимальности для подгрупп*.

Лемма 2. *Пусть* G — *несовершенная негиперцентральная* (*соответственно ненильпотентная*) *локально нильпотентная группа с гиперцентраль-*

ными (соответственно нильпотентными) собственными нормальными подгруппами. Если G *удовлетворяет условию* Max-$\overline{ZA}$ *(соответственно* Max-$\overline{N}$*), то она является минимальной негиперцентральной (соответственно минимальной ненильпотентной) группой.*

Доказательство. Предположим, что группа G с условием Max-$\overline{ZA}$ (соответственно Max-$\overline{N}$) содержит негиперцентральную (соответственно ненильпотентную) собственную подгруппу. Тогда G имеет максимальную собственную негиперцентральную (соответственно ненильпотентную) подгруппу N и $NG' = G$. И поскольку G — локально нильпотентная группа, то получаем противоречие. Лемма доказана.

Доказательство следующей леммы не сложное и мы его опускаем.

Лемма 3. *Если группа* G *удовлетворяет условию* Max-$\overline{ZA}$ *(соответственно* Max-$\overline{N}$*), то она конечнопорожденная либо локально нильпотентная группа.*

Ниже если G — негиперцентральная (соответственно ненильпотентная) группа, то через $X_0(G)$ (соответственно $N_0(G)$) обозначаем $\bigcap \{H \mid H$ — негиперцентральная (соответственно ненильпотентная) подгруппа в $G\}$. Очевидно, $X_0(G)$ и $N_0(G)$ — нормальные подгруппы в G.

Лемма 4. *Пусть* G *— локально нильпотентная группа с условием* Max-$\overline{N}$ *и* $G = N_0(G)F$, *где* F *— конечнопорожденная подгруппа,* $N_0(G)$ *— минимальная ненильпотентная группа. Тогда:*

1) $N_0(G)$ *— p-группа, любая ненильпотентная подгруппа субнормальна в* G, *периодическая часть* $\tau(G) = P \times Q$ *— прямое произведение конечной p'-подгруппы Q и ненильпотентной p-подгруппы P;*

2) *если* $N_0(G)$ *—* AN^**-группа, то* $N_0(G) = R\langle x\rangle$, R *— делимая черниковская p-подгруппа,* $x^p \in Z(N_0(G))$, $R = [R, \langle x\rangle]$, *любой элемент бесконечного порядка содержится в* $C_F(R)$ *и* $F_0 / C_{F_0}(R)$ *— p-группа, где* $F_0 = \langle x, F\rangle$;

3) *если* $N_0(G)$ *— неразложимая группа, то* $\tau(G)$ *удовлетворяет нормализаторному условию; если при этом* G' *— нильпотентная подгруппа, то* G *— группа Бэра с конечнопорожденной фактор-группой* $G' / N_0(G)'$; *если же* G *не является группой Бэра, то* $[N_0(G), G] = N_0(G)$.

Доказательство. Утверждение 1 получается вследствие [2] (§4), а утверждение 2 — из теоремы 3.1 [21], а также того, что $R \rtimes \langle z\rangle$ — нильпотентная группа для любого элемента z бесконечного порядка. Утверждение 3 проверяется непосредственно.

Лемма 5. *Пусть* G *— локально нильпотентная группа с условием* Max-$\overline{ZA}$ *и* $G = X_0(G)F$, *где* F *— конечнопорожденная подгруппа, а* $X_0(G)$ *— минимальная негиперцентральная группа. Тогда:*

1) $X_0(G)$ *— p-группа, любая негиперцентральная подгруппа субнормальна в* G, *периодическая часть* $\tau(G) = P \times Q$ *— прямое произведение конечной p'-подгруппы Q и негиперцентральной p-подгруппы P;*

2) *если* $X_0(G)$ *— несовершенная группа, то* $X_0(G)'F$ *— гиперцентральная группа;*

3) *если же* $X_0(G)$ *— несовершенная группа либо* $X_0(P) = P$, *то* $\tau(G)$ *удовлетворяет нормализаторному условию.*

В самом деле, из леммы 8 и предложения 4.1 из [9] следует, что $X_0(G)$ — p-группа. Остальные утверждения доказываются так же, как и в лемме 4.

Лемма 6. *Пусть* G *— почти гиперцентральная (соответственно почти нильпотентная) группа с условием* Max-$\overline{ZA}$ *(соответственно* Max-$\overline{N}$*). Тогда:*

i) *если* G *— негиперцентральная (соответственно ненильпотентная) группа, то фактор-группа* G / G' *конечнопорождена;*

ii) *если* G *— локально нильпотентная p-группа, то она гиперцентральна.*

Доказательство i). Если фактор-группа G/G' не является конечнопорожденной, то $G'\langle a\rangle$ — гиперцентральная (соответственно нильпотентная) подгруппа для любого элемента a из G и, следовательно, G — гиперцентральная (соответственно нильпотентная) группа, что противоречит условию леммы. Поэтому $G = G'F$ для некоторой конечнопорожденной подгруппы F.

ii). Теперь предположим от противного, что G — негиперцентральная группа. По лемме 2.22 из [18] $G = \gamma_n G \cdot F$ для любого положительного целого числа n. Обозначив $\gamma_{c+1}G$, где c — класс нильпотентности подгруппы F, через L, получаем $L = [L, G]$. Поскольку L не содержит собственных G-инвариантных подгрупп конечного индекса, то она гиперцентральная (соответственно нильпотентная). Далее, замечаем, что

$$\overline{G} = G/L^pL' = \overline{L}\overline{F} = \overline{G}'\overline{F}$$

— нильпотентная группа по лемме 3.8 из [22], а значит,

$$L = L^pL' = L^p,$$

т. е. L — делимая абелева подгруппа. Но тогда G — гиперцентральная группа, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Очевидно, что негиперцентральная (соответственно ненильпотентная) p-группа G с гиперцентральным (соответственно нильпотентным) коммутантом G' и квазициклической фактор-группой G/G', удовлетворяющая условию Max-$\overline{ZA}$ (соответственно Max-$\overline{N}$), является минимальной негиперцентральной (соответственно минимальной ненильпотентной) группой.

Лемма 7. *Пусть G — локально конечная p-группа с условием* Max-$\overline{ZA}$. *Если коммутант G' гиперцентрален, то либо G — гиперцентральная группа, либо G имеет характеристическую подгруппу T конечного индекса, являющуюся минимальной негиперцентральной группой.*

Доказательство. Предположим, что G — негиперцентральная группа. Тогда по лемме 6 G/G' — бесконечная группа. Вследствие теоремы 21.3 из [19]

$$G/G' = D/G' \times S/G'$$

— прямое произведение делимой части D/G' и редуцированной подгруппы S/G'. Докажем, что подгруппа D/G' нетривиальна. С этой целью предположим от противного, что $D/G' = \overline{1}$. Обозначим через R/G' базисную подгруппу G/G'. Если R/G' — бесконечная группа, то вследствие леммы 26.1 и предложения 27.1 из [19] G/R^pG' — прямое произведение бесконечной абелевой подгруппы экспоненты p и некоторой делимой абелевой подгруппы. Из этого следует, что G — гиперцентральная группа вопреки сделанному предположению. Следовательно, R/G' — конечная группа, а G/G' — прямое произведение бесконечной абелевой подгруппы экспоненты p и некоторой делимой абелевой подгруппы, что опять противоречит предположению. Это означает, что фактор-группа D/G' нетривиальна и, как следствие, $D/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$, причем S/G' — конечная группа.

Далее предположим, что D/D' — редуцированная группа. Поскольку D — негиперцентральная группа, ввиду тех же соображений, что и выше, заключаем, что базисная подгруппа B/D' группы D/D' конечна. Это означает, что D/D' имеет нетривиальную делимую часть T/D', являющуюся квазициклической p-группой. Значит, D — черниковская группа и $D = TG'$. Кроме того, D' — подгруппа конечного индекса в G' и $D' = TG''$. Обозначим $\overline{D} = D/[T', T]G''$. Поскольку $\overline{T}$ — нильпотентная группа и $\overline{T}' = \overline{D}'$, то $\overline{T}/\overline{T}' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ и поэтому

$$T' = [T', T]G'' = D'.$$

Но тогда T — минимальная негиперцентральная группа, что и требовалось доказать.

Лемма 8. *Пусть G — локально конечная p-группа с условием* Max-$\overline{N}$. *Если коммутант G' нильпотентен, то либо G — нильпотентная группа, либо G содержит характеристическую подгруппу T конечного индекса, которая является минимальной ненильпотентной группой.*

Доказательство. Предположим, что G — ненильпотентная группа. Если G/G' — бесконечная группа, то можно получить требуемый результат из тех же соображений, что и в лемме 7. Поэтому предположим, что G/G' — конечная группа. Тогда по лемме 6 G — гиперцентральная группа. В силу леммы 2.22 из [18] $G = LF$ и $L = [L, G]$ для некоторой конечной подгруппы F, где $L = \gamma_{c+1}G$ и c — класс нильпотентности для F. Ясно, что L — делимая абелева подгруппа. Кроме того, F содержит такой элемент x, что $L\langle x^p\rangle$ — нильпотентная группа, в то время как $L\langle x\rangle$ ненильпотентна и, таким образом, является минимальной ненильпотентной группой. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — периодическая локально нильпотентная группа с условием* Max-$\overline{ZA}$ (*соответственно* Max-$\overline{N}$). *Тогда верно одно из утверждений:*

1) *G — гиперцентральная* (*соответственно нильпотентная*) *группа*;

2) *G — минимальная негиперцентральная* (*соответственно минимальная ненильпотентная*) *группа*;

3) *$G = P \times Q$, где Q — конечная p'-группа, P — негиперцентральная* (*соответственно ненильпотентная*) *p-группа, которая содержит такую подгруппу P_0 конечного индекса, что P_0 — минимальная негиперцентральная* (*соответственно минимальная ненильпотентная*) *группа*.

Доказательство. Предположим, что G содержит собственную негиперцентральную (соответственно ненильпотентную) подгруппу. Тогда G — несовершенная группа.

Если найдется такое положительное целое число k, что $G^{(k)}$ — негиперцентральная (соответственно ненильпотентная) подгруппа, а $G^{(k+1)}$ гиперцентральная (соответственно нильпотентная), то по лемме 7 (соответственно по лемме 8) $G^{(k)}$ имеет характеристическую подгруппу T, являющуюся минимальной негиперцентральной (соответственно минимальной ненильпотентной) группой, т. е. G — группа типа 3.

Теперь предположим, что $G^{(k)}$ негиперцентральная (соответственно ненильпотентная) подгруппа для всех целых $k \geq 1$. Тогда все факторы $G/G^{(k)}$ конечны. Поскольку $G = G'X$ для подходящей конечнопорожденной подгруппы X, то по лемме 2.22 из [18] $G = \gamma_n G \cdot X$ для всех положительных целых n. Записав L для $\gamma_{c+1}G$, где c — класс нильпотентности X, получим

$$\overline{G} = G/L = \overline{G}'\overline{X} = \overline{X},$$

а значит, $L = [L, G]$. Таким образом,

$$L \leq G_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} G^{(k)}.$$

Поскольку G/G_0 — конечная нильпотентная группа, то $G^{(m)} \leq G_0$ для некоторого положительного целого m и $G^{(m)} = G^{(m+1)} = \ldots$. Отсюда $T = G^{(m)}$ — минимальная негиперцентральная группа, т. е. G — группа типа 3 (соответственно получаем противоречие).

Применением леммы 5 (соответственно леммы 4) и леммы 1 завершаем доказательство.

Далее, $\operatorname{Spec}(D)$ — множество всех ненулевых простых идеалов из коммутативной дедекиндовой области D. Если A — правый D-модуль и

$$A = \{a \in A \mid \operatorname{Ann}_D(a) \neq \{0\}\},$$

то A называется D-периодическим. Подмодуль

$$A_P = \{a \in A \mid aP^n = \{0\} \text{ для некоторого } n = n(a) \in \mathbb{N}\}$$

называется P-компонентой модуля A, где $P \in \operatorname{Spec}(D)$. Известно, из $A = A_P$ следует, что A имеет базисный подмодуль B, т.е. B удовлетворяет таким условиям:

1) B — модульная прямая сумма циклических подмодулей;
2) B — чистый подмодуль в A;
3) A/B — делимый D-модуль.

Лемма 10. *Пусть $G = A \rtimes \langle x \rangle$ — полупрямое произведение нормальной абелевой подгруппы A экспоненты p и бесконечной циклической подгруппы $\langle x \rangle$. Если G — локально нильпотентная группа с условием* $\mathrm{Max}\text{-}\overline{N}$, *то она нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что G — ненильпотентная группа. Тогда $A - \mathbb{F}_p\langle x \rangle$-периодический правый $\mathbb{F}_p\langle x \rangle$-модуль относительно действия, индуцированного сопряжением x на A, поэтому A — модульная прямая сумма своих P-компонент A_P, где $P \in \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p\langle x \rangle)$. Вследствие сделанного предположения найдется такой идеал $R \in \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p\langle x \rangle)$, для которого базисный подмодуль B_R собственный в A_R. Понятно, что для некоторого подмодуля D $A = A_R \oplus D$ — модульная прямая сумма и, кроме того, модульная прямая сумма $B_R \oplus D$ — нормальная подгруппа в G. Пусть

$$\overline{G} = G/(B_R \oplus D) = \overline{A} \rtimes \langle \overline{x} \rangle.$$

Поскольку $\overline{A} \cong A_R / B_R$, то $\overline{A}$ — инъективный $\mathbb{F}_p\langle \overline{x} \rangle$-модуль. Поэтому ввиду теоремы Матлиса [20] (теорема 4.4) и без ограничения общности будем считать, что $A = A_R$ — неразложимый инъективный $\mathbb{F}_p\langle x \rangle$-модуль, а значит, $[A, \langle x \rangle] = A$. По предложению 4.23 из [20]

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

где

$$A_i = \{z \in A \mid zR^i = \{0\}\}.$$

Если $A_i \neq A_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ (соответственно $A_n = A_{n+1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$), то

$$\operatorname{Ann}_{\mathbb{F}_p\langle x \rangle}(A) \neq \{0\}$$

и по теореме 6.14 из [20] A — модульная прямая сумма циклических подмодулей, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* А.** ($\Leftarrow$) очевидно. Для доказательства ($\Rightarrow$) предположим, что группа G не является конечнопорожденной и содержит собственную ненильпотентную подгруппу. Отсюда сразу же следует, что G несовершенна. В силу леммы 3 G — локально нильпотентная группа. Если ее периодическая часть $\tau(G)$ ненильпотентна, то вследствие лемм 1, 9 и 4 G —

группа одного из типов 2, 3, или 5. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\tau(G)$ — собственная нильпотентная подгруппа в G.

1. Предположим, что $G = G'F$ для конечнопорожденной подгруппы F. Тогда лемма 2.22 из [18] позволяет заключить, что $G = LF$ и $L = [L, G]$, где $L = \gamma_{c+1}G$ и c — класс нильпотентности F. Кроме того, L не содержит ни одной собственной G-инвариантной подгруппы конечного индекса.

1′. Докажем теперь, что L — делимая подгруппа. С этой целью предположим противное, ввиду чего $L'L^p$ — собственная подгруппа в L для простого числа p. Положим $\overline{G} = G / L'L^p$. Если $\bar{x} \in \overline{F}$, то $\overline{L}$ — бесконечный $\mathbb{F}_p\langle\bar{x}\rangle$-периодический правый $\mathbb{F}_p\langle\bar{x}\rangle$-модуль, где $\bar{x}$ действует на $\overline{L}$ сопряжением. Предположим, что $\overline{L}\langle\bar{x}\rangle$ — ненильпотентная группа. Тогда лемма 10 позволяет заключить, что $\bar{x}$ конечного порядка. Но в соответствии с нашим предположением $(\overline{L}\langle\bar{x}\rangle)'$ — подгруппа конечного индекса в $\overline{L}\langle\bar{x}\rangle$ и тогда по лемме 2.22 из [18] найдется такая подгруппа $\overline{L}_1$ в $(\overline{L}\langle\bar{x}\rangle)'$, что $[\overline{L}_1, \langle\bar{x}\rangle] = \overline{L}_1$. Поскольку $\langle\bar{x}\rangle = \overline{P} \times \overline{T}$ — прямое произведение p-подгруппы $\overline{P}$ и p'-подгруппы $\overline{T}$, то $[\overline{L}_1, P] = \overline{L}_1$ и на основании леммы 3.8 из [22] $\overline{L}_1 P$ — нильпотентная группа, что невозможно. Следовательно, $\overline{L}\langle\bar{x}\rangle$ — нильпотентная группа для любого $\bar{x} \in \overline{F}$. Отсюда получаем, что $L\langle x\rangle$ также нильпотентна для любого $x \in F$. Из того, что $F = \langle x_1, \ldots, x_s\rangle$ для некоторых таких элементов $x_1, \ldots, x_s$, что $F_i \lhd F_{i+1}$, где $F_i = \langle x_1, \ldots, x_i\rangle$, LF_1 и $L\langle x_2\rangle$ — нильпотентные подгруппы, в силу леммы 1 из [23] получаем, что LF_2 такая же. Продолжая рассуждения, устанавливаем нильпотентность группы G вопреки сделанному предположению. Это доказывает, что $L = L'L^p = L^p$ для простого p. Отсюда L — минимальная ненильпотентная группа либо делимая нильпотентная группа. Поскольку любая минимальная ненильпотентная группа периодическая (см., например, [24], теорема 2.5), вследствие сделанного предположения заключаем, что L — делимая нильпотентная подгруппа.

1″. Пусть сначала L — абелева подгруппа без кручения. Как и выше, получаем, что $H = L\langle z\rangle$ — ненильпотентная группа для некоторого элемента $\langle z\rangle$ бесконечного порядка, вследствие чего

$$H = L \rtimes \langle z\rangle \quad \text{и} \quad [L, \langle z\rangle] = L.$$

Итак, L — делимый правый $\mathbb{Q}\langle z\rangle$-модуль относительно действия, индуцированного сопряжением z на L и по предложению 2.10 из [20] L — инъективный модуль. Ввиду предложения 2.28 из [20] и нашего предположения модуль L неразложимый. Мы видим, что L содержит подгруппу Q, изоморфную аддитивной группе рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$, и подгруппу Z, изоморфную аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}^+$. Кроме того,

$$\langle Z, z\rangle = Z_1 \rtimes \langle z\rangle$$

для подходящей конечнопорожденной подгруппы $Z_1 \le L$ и

$$\hat{H} = H / Z_1 = \hat{L} \rtimes \langle\hat{z}\rangle$$

— ненильпотентная группа. Поскольку периодическая часть $\tau(\hat{L})$ — полная абелева подгруппа, содержащаяся в центре $Z(\hat{L})$, то в силу неразложимости модуля L получаем, что $\hat{H}$ — периодическая группа. Но тогда отсюда легко следует, что подгруппа $\hat{H}$ нильпотентна, что невозможно. Эти рассуждения показывают, что L — периодическая (а значит, абелева) p-группа для некоторого простого числа p. Опять посредством тех же рассуждений, что и выше, устанавливаем ненильпотентность группы $L \rtimes \langle u \rangle$ для некоторого элемента $u \in F$ бесконечного порядка. Кроме того, если $g \in F \setminus C_G(L)$, то $[L, \langle g \rangle]\langle g \rangle$ — ненильпотентная группа, а поэтому $[L, \langle g \rangle] = L$. Итак, G — группа типа 4.

2. Теперь предположим, что $\overline{G} = G / G'$ не является конечнопорожденной. По теореме 21.3 из [19] $\overline{G} = \overline{D} \times \overline{S}$ — прямое произведение делимой части $\overline{D} = D / G'$ и редуцированной подгруппы $\overline{S} = S / G'$. Пусть $\overline{B}$ — q-базисная подгруппа в $\overline{S}$ для некоторого простого числа q. Если $\overline{B}$ не конечнопорожденная, то, как и при доказательствах леммы 26.1 и предложения 27.1 из [19], $\overline{G} / \overline{B}^q$ можно записать в виде прямого произведения двух бесконечных абелевых подгрупп, что приводит к нильпотентности группы G вопреки сделанному предположению. Итак, $\overline{B}$ — конечнопорожденная группа.

2′. Теперь утверждаем, что G имеет квазициклический гомоморфный образ. Это так, если $\overline{D}$ нетривиальна. Поэтому предположим, что $\overline{D} = \overline{1}$. Заметим, что в этом случае $\overline{G} / \overline{B}$ — бесконечная q-делимая группа. Если $\overline{G} / \overline{B}$ непериодическая или содержит нетривиальную q-подгруппу, то утверждение справедливо. Рассмотрим случай, когда $\overline{G} / \overline{B}$ — периодическая q'-группа. Тогда она является прямым произведением бесконечной r-подгруппы R_1, где r отлично от q, и некоторой конечной r'-подгруппы. Если B_1 — базисная подгруппа из R_1, то, как и выше, устанавливаем конечность подгруппы B_1 и $R_1 / B_1 \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Таким образом, мы доказали, что G / X — квазициклическая p-группа для некоторой нормальной нильпотентной подгруппы X и некоторого простого p. Ввиду $X\tau(G) \neq G$ без ограничения общности дальнейших рассуждений считаем, что $\tau(G) \leq X$.

2″. В соответствии с теоремой Ф. Холла [18] (теорема 2.27) G / X' — ненильпотентная группа и можно считать, что X — абелева подгруппа, откуда $G' \leq \tau(G)$. Если $\overline{D} \neq \overline{1}$, то S — нильпотентная подгруппа, в то время как D — периодическая ненильпотентная подгруппа, что невозможно. Значит, $\overline{D} = \overline{1}$ и ввиду сделанного предположения X / G' — конечнопорожденная непериодическая группа. Если индекс $| X : X^r |$ конечен для любого простого r, то

$$G' \leq \bigcap \{ X^m \mid m \in \mathbb{N} \}$$

по теореме 1.16 из [10] и $G' \leq Z(G)$, что не так. Следовательно, $| X : X^q |$ бесконечен для некоторого простого числа q. При этом ясно, что $q = p$. Положим $\breve{G} = G / X^p$. В случае, когда $\breve{G}$ — нильпотентная группа, по лемме 3.1 из [25] она является прямым произведением подгруппы $\breve{X}$ экспоненты p и некоторой делимой подгруппы, а это ведет к противоречию. Поэтому без ограничения общности считаем, что ненильпотентная группа G содержит бесконечную абелеву периодическую часть $\tau(G)$ экспоненты p.

2‴. Поскольку периодическая часть T_1 фактор-группы $\overline{G} = G / G'$ конечна, то по теореме 27.5 из [19] $\overline{G} = T_1 \times W_1$ — прямое произведение для некоторой подгруппы W_1 без кручения. Ясно, что W_1 содержит подгруппу W / G', изоморфную $\mathbb{Q}_p$, где W — ненильпотентная группа. Следовательно, индекс $| G' : W' |$ конечен и легко установить, что $W' = G'$. Кроме того, $W / W'\langle a \rangle \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ для некоторого элемента $a \in W \setminus W'$.

Предположим, что W имеет собственную ненильпотентную подгруппу и M — максимальная ненильпотентная подгруппа из W. Тогда $W' \leq M$ и

$$W = W'\langle a\rangle M = \langle a\rangle M.$$

Из $W'\langle a^p\rangle \leq M$ и того, что

$$\overline{W} = W / W'\langle a^p\rangle = \overline{M}\langle\overline{a}\rangle$$

— квазициклическая p-группа, следует $W = M$, что невозможно. Это позволяет утверждать, что W — непериодическая несовершенная минимальная ненильпотентная группа, что также невозможно ввиду теоремы 2.5 из [24].

Таким образом, на основании проведенных рассуждений получаем, что ненильпотентная группа G, удовлетворяющая условию Max-$\overline{N}$, с нильпотентной периодической частью $\tau(G)$ — группа типа 4. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* B.** Утверждение $(\Leftarrow)$ проверяется непосредственно. Для доказательства $(\Rightarrow)$ предположим, что G не конечнопорожденная и содержит собственную негиперцентральную подгруппу. Как следствие этого G — несовершенная локально нильпотентная группа. Если ее периодическая часть $\tau(G)$ негиперцентральна, то ввиду лемм 1, 9 и 5 G — группа одного из типов 2 или 3. В связи с этим в дальнейшем считаем, что $\tau(G)$ — собственная гиперцентральная подгруппа в G.

1. Если $G = G'X$ для некоторой конечнопорожденной подгруппы X, то по лемме 2.22 из [18] G содержит такую подгруппу A, что $A = [A, G]$ и $G = AX$. Кроме того, A не имеет собственных негиперцентральных подгрупп. Отсюда A — гиперцентральная группа, а значит, G такая же, что невозможно ввиду сделанных предположений.

2. Пусть G / G' не конечнопорожденная группа. По теореме 21.3 из [19] $\overline{G} = \overline{D} \times \overline{S}$ — прямое произведение делимой части $\overline{D} = D / G'$ и редуцированной подгруппы $\overline{S} = S / G'$. Как и при доказательстве теоремы А, можно установить существование такой бесконечной гиперцентральной подгруппы X, что $G / X \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ и $X = G'F$ для некоторой конечнопорожденной F. Нетрудно показать, что G' не имеет собственных G-инвариантных подгрупп конечного индекса.

Предположим, что $\tau(\overline{G})$ — бесконечная подгруппа. Тогда $\overline{D} \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Если G' — непериодическая подгруппа, то достаточно рассмотреть случай, когда она абелева и без кручения. По лемме 2.3 из [24] G' содержит такую собственную G-инвариантную подгруппу N, что G' / N — q-группа, где q отлично от p, а это приводит к противоречию. Итак, G' — периодическая подгруппа и поэтому D периодическая негиперцентральная, что невозможно. Следовательно, $\tau(\overline{G})$ — конечная подгруппа и по теореме 27.5 из [19]

$$\overline{G} = \tau(\overline{G}) \times \overline{S}_0$$

— прямое произведение, где $\overline{S}_0 = S / G'$ — подгруппа без кручения и

$$\overline{S}_0 / (\overline{X} \cap \overline{S}_0) \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$$

для $\overline{X} = X / G'$. Это позволяет сделать вывод, что S_0 содержит такую негиперцентральную подгруппу W, что $G' \leq W$, $W / G' \cong \mathbb{Q}_p$ и $W / G'\langle a\rangle \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ для некоторого элемента $a \in W \setminus G'$.

Докажем от противного, что $W' = G'$. Для этого предположим, что G' / W' не конечнопорожденная подгруппа. Положим $\hat{G} = G / W'$. Если

$\hat{G}'$ — делимая подгруппа, то $\hat{W}$ — прямое произведение двух бесконечных подгрупп, что влечет за собой гиперцентральность W, а это не так. Значит, $\hat{G}'$ — неделимая подгруппа и поэтому индекс $|\hat{G}' : (\hat{G}')^q|$ бесконечен для некоторого простого q. Ввиду этого будем считать, что $\hat{G}'$ — бесконечная группа экспоненты q. Тогда $\hat{W}$ — прямое произведение двух бесконечных подгрупп по теореме 27.5 из [19], в силу чего W — гиперцентральная группа, а это опять невозможно. Поэтому наше предположение неверно и G' / W' — конечнопорожденная группа. Поскольку G' не имеет собственных G-инвариантных подгрупп конечного индекса, то $W' = G'$ и $[W', \langle a \rangle] = W'$. Как и в пп. 2‴ из доказательства теоремы А, получаем противоречие. Теорема доказана.

1. *Rédei L.* Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen // Publ. Math. (Debrecen). – 1956. – **4**. – S. 303–324.
2. *Newman M. F., Wiegold L.* Groups with many nilpotent subgroups // Arch. Math. – 1964. – **15**. – P. 241–250.
3. *Heineken H., Mohamed I. J.* A group with trivial centre satisfying the normalizer condition // J. Algebra. – 1968. – **10**. – P. 368–376.
4. *Meldrum J. D. P.* On the Heineken–Mohamed groups // Ibid. – 1973. – **27**. – P. 437–444.
5. *Hartley B.* A note on the normalizer condition // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973. – **74**. – P. 11–15.
6. *Bruno B., Phillips R. E.* On multipliers of Heineken–Mohamed type groups // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1991. – **85**. – P. 133–146.
7. *Menegazzo F.* Groups of Heineken–Mohamed // J. Algebra. – 1995. – **171**. – P. 807–825.
8. *Möhres W.* Auflösbarkeit von Gruppen deren Untergruppen alle subnormal sind // Arch. Math. – 1990. – **54**. – S. 232–235.
9. *Artemovych O. D.* On indecomposable groups and groups with hypercentral-by-finite proper subgroups // Publ. Math. (Debrecen). – 1998. – **53**. – P. 163–175.
10. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
11. *Шунков В. П.* Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // Алгебра. Матрицы и матричные группы. – Красноярск, 1970. – С. 3–54.
12. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А.* Группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43.** № 7–8. – С. 926–930.
13. *Артемович О. Д.* Группы с условием максимальности для негиперцентральных подгрупп // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 1999. – Вип. 4. – С. 9–11.
14. *Артемович О. Д.* Про розв'язні періодичні групи з умовою максимальності для підгруп, що не є майже гіперцентральними // Там же. – 2000. – Вип. 1. – С. 27–30.
15. *Artemovych O. D.* Locally solvable groups with the maximal condition for non-hypercentral subgroups // Допов. НАН України. Сер. фіз.-мат. – 2001. –№ 9. – С. 42–44.
16. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups // J. Group Theory. – 2001. – **4**. – P. 75–87.
17. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Locally nilpotent groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups // Glasgow Math. J. – 2001. – **43**. – P. 85–102.
18. *Robinson D. J. S.* Finitennes conditions and generalized soluble groups. – Berlin etc.:Springer, 1972. – Pt 1.
19. *Fuchs L.* Infinite abelian groups. – New York; London: Acad. Press, 1973. – Vol. 2.
20. *Sharpe D. W., Vamos P.* Injective modules. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1972.
21. *Maoqian Xu.* Groups whose proper subgroups are Baer groups // Acta math. sinica (New Ser.). – 1996. – **12**. – P. 10–17.
22. *Baumslag G.* Wreath products and p-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1959. – **55**. – P. 224–231.
23. *Möhres W.* Torsiongruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind // Geom. dedic. – 1989. – **31**. – S. 237–248.
24. *Bruno B., Phillips R. E.* A note on groups with nilpotent-by-finite proper subgroups // Arch. Math. – 1995. – **65**. – P. 369–374.
25. *Asar A. O.* On non-nilpotent p-groups and the normalizer condition // Turk. J. Math. – 1994. – **18**. – P. 114–129.

Получено 01.04.2002