УДК 512.544

А. В. Тушев (Днепропетр. нац. ун-т)

О НЕТЕРОВЫХ МОДУЛЯХ НАД МИНИМАКСНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

We consider modules over minimax Abelian groups. We prove that if A is an Abelian minimax subgroup of a multiplicative group of a field k and if a subring K of the field k generated by the subgroup A is Noetherian, then the subgroup A is a direct product of torsion and finitely generated groups.

Вивчаються модулі над мінімаксними абелевими групами. Доведено, що якщо A — абелева мінімаксна підгрупа мультиплікативної групи поля k і підкільце K поля k, породжене підгрупою A, ньотерове, то підгрупа A є прямим добутком періодичної та скінченнопородженої групи.

1. Введение. Пусть A — абелева группа. Из теоремы Холла [1] (теорема 1) и [2] (лемма 1) следует, что групповое кольцо $\mathbb{Z}A$ нетерово тогда и только тогда, когда группа A конечнопорождена. Групповое кольцо $\mathbb{Z}A$ порождается группой A своих обратимых элементов.

В связи с этим естественно возникает вопрос об ограничениях на строение группы A обратимых элементов коммутативного кольца K в случае, когда кольцо K нетерово и группа A порождает кольцо K. Очевидно, мультипликативная группа F^* произвольного поля F порождает F как кольцо, которое является нетеровым. Поэтому из теоремы 127.3 [13] следует, что в общем случае нетеровость кольца K не влечет за собой конечную порожденность группы A. Вместе с тем в случае, когда группа A — минимаксная абелева, нетеровость кольца K накладывает очень сильные ограничения на строение группы A. Напомним, что абелева группа A является минимаксной, если она имеет конечный ряд подгрупп, каждый фактор которого либо циклический, либо квазициклический. Множество $\operatorname{Sp}(A)$ простых чисел p таких, что минимаксная группа A имеет бесконечную p-фактор-группу, называется спектром группы A. Основным результатом данной работы является теорема 1.

Следствием теоремы 1 является теорема 2 о строении произвольного нетерова модуля над минимаксной абелевой группой. Модуль M над групповым кольцом $\mathbb{Z}G$ называется точным, если $C_G(M) = 1$. Модуль M будем называть G-нильпотентным, если он имеет конечный ряд подмодулей, в факторах которого группа G действует тождественно.

Группа G называется G-минимаксной, если она имеет конечный нормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет либо условию минимальности, либо условию максимальности для G-инвариантных подгрупп. Отметим, что класс G-минимаксных групп достаточно широк. Например, из теоремы 4.2 [4] следует, что любая метанильпотентная группа, удовлетворяющая слабому условию минимальности для нормальных подгрупп, является G-минимаксной. В качестве одного из возможных теоретико-групповых приложений теоремы 1 получен результат о строении G-минимаксных метабелевых групп (теорема 3).

В работе используются стандартные обозначения. В частности, если k — поле, то k^* — его мультипликативная группа, а если f — расширение поля k, то $[f:k]$ — степень этого расширения. Если X — подмножество кольца K, то XK — идеал кольца K, порожденный подмножеством X. Если G — абелева группа, то $t(G)$ — ее периодическая часть, а $\pi(G)$ — множество простых делителей порядков элементов группы G в случае, когда группа G периодическая.

© А. В. ТУШЕВ, 2002

2. Теоретико-модульные леммы. Пусть G — группа, R — кольцо и I — идеал кольца RG. Тогда $I^+ = \{x \in G \mid x - 1 \in I\}$ — нормальная подгруппа в G.

Лемма 1. *Пусть H — конечнопорожденная свободная абелева группа, P — простой идеал группового кольца $\mathbb{Z}H$ такой, что $\mathbb{Z} \cap P = 0$, и $J = \mathbb{Z}H/P$. Пусть N — изолированная подгруппа группы H, максимальная относительно свойства $\mathbb{Z}N \cap P = 0$, и $K = \mathbb{Z}N$. Тогда существуют конечнопорожденный свободный K-подмодуль $U \leq J$ и элемент $0 \neq u \in K$ такие, что для любого максимального идеала L кольца K, не содержащего элемент u:*

i) $JL \cap U = UL$;

ii) $\left|H/\hat{L}^+\right| < \infty$, *где $\hat{L}$ — прообраз идеала LJ в кольце $\mathbb{Z}H$.*

Доказательство. Из теоремы A [5] и максимальности подгруппы N следует существование конечнопорожденного свободного K-подмодуля $U \leq J$ и элемента $u \in K$ таких, что любой элемент фактор-модуля J/U аннулируется некоторой степенью элемента u. Из леммы 5.2 [6] следует, что каждый элемент фактор-модуля $(JL \cap U)/UL$ аннулируется некоторой степенью элемента u. Поскольку идеал L — максимальный и не содержащий элемент u, отсюда следует $JL \cap U = UL$.

ii). Так как элемент u не принадлежит максимальному идеалу L и каждый элемент фактор-модуля J/U аннулируется некоторой степенью элемента u, то $(J/U)L = J/U$. Отсюда получаем $JL + U = J$ и, следовательно, $J/JL = (JL+U)/JL \simeq U/(JL \cap U) = U/UL$. Из теоремы 3.1 [7] следует, что $|K/L| < \infty$, а так как U — конечнопорожденный свободный K-модуль, то $|U/UL| = |J/JL| < \infty$. Отсюда следует $\left|\mathbb{Z}H/\hat{L}\right| < \infty$ и, значит, $\left|H/\hat{L}^+\right| < \infty$.

Лемма 2. *Пусть K — область целостности и $\mathcal{L}$ — некоторое множество идеалов области K, пересечение которых нулевое. Пусть u — ненулевой элемент области K и $\mathcal{M}$ — подмножество множества $\mathcal{L}$, состоящее из идеалов, не содержащих элемент u. Тогда пересечение идеалов из множества $\mathcal{M}$ нулевое.*

Доказательство. Пусть X — пересечение идеалов из $\mathcal{M}$ и Y — пересечение идеалов из $\mathcal{L}$, содержащих элемент u. Тогда $X \cap Y = 0$ и, следовательно, $XY = 0$. Очевидно, $Y \neq 0$, и так как K — область целостности, то $X = 0$.

Лемма 3. *Пусть K — коммутативное кольцо и M — K-модуль такой, что $M \leq \oplus_{i=1}^{\infty} M_i = N$, причем $M \cap M_i \neq 0$ и $\mathrm{Pr}_i M = M_i$ для каждого i. Пусть L — идеал кольца K такой, что $M_i L \neq M_i$ для каждого i. Тогда $|M/ML| = \infty$.*

Доказательство. Поскольку $ML \leq NL$, достаточно показать, что $|M'| = \infty$, где $M' = (M + NL)/NL \simeq M/(M \cap NL)$. Очевидно, $N/NL = \oplus_{i=1}^{\infty} M_i'$, где $M_i' = M_i/M_i L \neq 0$. Так как $\mathrm{Pr}_i M = M_i$ для каждого i, то $\mathrm{Pr}_i M' = M_i'$ для каждого i, откуда следует утверждение леммы.

Пусть R — область целостности и $0 \neq \alpha \in R$. Будем говорить, что R-модуль M принадлежит классу $\pi(R, \alpha)$, если модуль M содержит свободный подмодуль F такой, что каждый элемент фактор-модуля M/F аннулируется некоторой степенью элемента α. Подгруппу B мультипликативной группы поля k характеристики $p > 0$ будем называть трансцендентной, если элементы подгруппы B линейно независимы над полем $\mathbb{F}_p$.

Лемма 4. *Пусть k — поле характеристики $p > 0$ и A — абелева минимаксная подгруппа без кручения мультипликативной группы поля k такая, что $\mathrm{Sp}(A) = \{p\}$. Пусть K — подкольцо поля k, порожденное груп-*

ной A, H — конечнопорожденная плотная подгруппа из A такая, что фактор-группа A/H является делимой, и B — максимальная трансцендентная конечнопорожденная подгруппа из H. Тогда существуют $\mathbb{F}_pB$-подмодуль $F \le K$ и элемент $0 = \alpha \in \mathbb{F}_pB$ такие, что F содержится в свободном $\mathbb{F}_pB$-модуле и каждый элемент фактор-модуля K/F аннулируется некоторой степенью элемента α.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что поле k алгебраически замкнуто. Тогда существует подгруппа без кручения $\hat{A} \le k^*$ такая, что A является плотной подгруппой в $\hat{A}$ и $\hat{A} = \hat{A}^p$. Пусть $\hat{K}$ — подкольцо поля k, порожденное подгруппой $\hat{A}$. Так как $K \le \hat{K}$, достаточно показать, что $\hat{K} \in \pi(\mathbb{F}_pB, \alpha)$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $A^p = A$.

Очевидно, существует ряд подгрупп $\{A_i\}$ такой, что $A_1 = H$, $A_i \le A_{i+1}$, $A = \bigcup A_i$ и $A_i = A_{i+1}^p$. Пусть K_i — подкольцо кольца K, порожденное подгруппой A_i. Тогда $K_i \le K_{i+1}$ и $K = \bigcup K_i$. Поскольку поле k имеет характеристику p, то отображение $\varphi : a \mapsto a^p$ задает автоморфизм кольца K, причем $K_i = \varphi(K_{i+1})$. Из теоремы А [5] следует, что $K_2/K_1 \in \pi(\mathbb{F}_pB, \beta)$ для некоторого $0 \ne \beta \in \mathbb{F}_pB$. Пусть $\varphi_n = \varphi^{n-1}$, тогда $\varphi_n(K_{n+1}/K_n) = K_2/K_1$ и, следовательно, $K_{n+1}/K_n \in \pi(\mathbb{F}_p\varphi_n^{-1}(B), \varphi_n^{-1}(\beta))$. Так как $B \le \varphi_n^{-1}(B)$ и $(\varphi_n^{-1}(\beta))^q = \beta$, где $q = p^{n-1}$, отсюда следует, что $K_{n+1}/K_n \in \pi(\mathbb{F}_pB, \beta)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда из доказательства леммы 4.3 [7] видно, что $K/K_1 \in \pi(\mathbb{F}_pB, \beta)$. Из теоремы А [5] следует, что $K_1 \in \pi(\mathbb{F}_pB, \gamma)$ для некоторого $0 \ne \gamma \in \mathbb{F}_pB$. Тогда из доказательства леммы 4.3 [7] видно, что $K \in \pi(\mathbb{F}_pB, \alpha)$, где $\alpha = \beta\gamma$.

Лемма 5. *Пусть k — поле характеристики $p > 0$ и A — абелева минимаксная подгруппа без кручения из k^* такая, что $\mathrm{Sp}(A) = \{p\}$. Пусть K — подкольцо поля k, порожденное группой A. Тогда существует конечнопорожденная плотная подгруппа C группы A такая, что $|K/(1-C)K| = \infty$.*

Доказательство. Очевидно, существует конечнопорожденная плотная подгруппа H группы A такая, что фактор-группа A/H является делимой p-группой. Пусть f — подполе поля k, порожденное подгруппой H, и f^* — мультипликативная группа поля f. Тогда из леммы 5 [8] следует, что $|(A \cap f^*)/H| < \infty$ и, заменив H на $A \cap f^*$, можно считать, что $A \cap f^* = H$. Пусть D — подгруппа группы A такая, что $H \le D$, где фактор-группа D/H является квазициклической. Пусть $g \in D \setminus H$, тогда g является корнем многочлена вида $x^n - a$, где $n = p^m$, $a \in f$ и не является p-й степенью в поле f. Из [9] (гл. VIII, § 9, следствие 1) следует, что многочлен $x^n - a$ неприводим над полем f. Отсюда легко получаем $f\mathbb{Z}D = f \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}D$ и, значит, $F\mathbb{Z}D = F \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}D$, где F — подкольцо поля k, порожденное подгруппой H. Пусть B — максимальная трансцендентная подгруппа из H. Тогда из леммы 4 следует, что существуют $\mathbb{F}_pB$-подмодуль $N \le K$ и элемент $0 = \alpha \in \mathbb{F}_pB$ такие, что N содержится в свободном $\mathbb{F}_pB$-модуле и каждый элемент фактор-модуля K/N аннулируется некоторой степенью элемента α. Из соотношения $F\mathbb{Z}D = F \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}D$ следует, что свободный $\mathbb{F}_pB$-модуль, содержащий N, не может быть конечнопорожденным. Тогда из леммы 3 следует, что $|N/NL| = \infty$ для любого максимального идеала L кольца $\mathbb{F}_p B$.

Поскольку B — максимальная трансцендентная подгруппа в H, из теоремы А [5] следует, что существует конечнопорожденный свободный $\mathbb{F}_p B$-подмодуль $M \leq F$ такой, что каждый элемент фактор-модуля F/M аннулируется некоторой степенью элемента $0 \neq \beta \in \mathbb{F}_p B$. Пусть $\gamma = \alpha\beta$ и L — максимальный идеал кольца $\mathbb{F}_p B$, не содержащий γ. Тогда L не содержит элементы α и β. Из леммы 5.2 [6] следует, что каждый элемент фактор-модуля $(KL \cap N)/NL$ аннулируется некоторой степенью элемента α. Так как $\alpha \notin L$, отсюда следует, что $KL \cap N = NL$ и, значит, $|K/KL| = \infty$.

Поскольку $\beta \notin L$, то $(F/M)L = F/M$ и, следовательно, $FL + M = F$. Отсюда легко получаем $F/FL \simeq M/(M \cap FL)$ и, следовательно, $|F/FL| = \infty$. Тогда существует подгруппа C конечного индекса в H такая, что $(1-C)F \leq \leq LF$, а так как $K = F\mathbb{Z}A$, то $(1-C)K \leq LK$, и утверждение следует из соотношения $|K/KL| = \infty$.

3. Теоретико-числовые леммы.

Лемма 6. *Пусть f — конечное расширение поля k, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f такая, что $|G/(k^* \cap G)| = n$, где n не делится на характеристику поля k. Пусть $g \in G \setminus (k^* \cap G)$ и t — порядок образа элемента g в фактор-группе $G/(k^* \cap G)$. Предположим, что для любого простого числа p, делящего t, поле k содержит первообразный корень из единицы степени p, причем если t делится на 4, то поле k содержит первообразный корень из 1 степени 4. Пусть $d = k(g)$, тогда $[d:k] = t$.*

Доказательство. Пусть $g^t = a \in k^* \cap G$. Поскольку для любого простого числа p, делящего t, поле k содержит первообразный корень из единицы степени p, то $a \neq 1$.

Предположим, что для некоторого простого числа p, делящего t, существует элемент $b \in k$ такой, что $b^p = a$. Пусть $m = t/p$. Тогда $(g^m b^{-1})^p = = 1$, а так как поле k содержит первообразный корень из единицы степени p, отсюда следует, что $g^m \in k^* \cap G$. Но это невозможно, так как t — порядок образа элемента g в фактор-группе $G/(k^* \cap G)$. Таким образом, поле k не содержит корней из элемента a степени p для любого простого числа p, делящего t. Предположим, что t делится на 4 и $a \in -4k^4$. Тогда существует элемент $b \in k$ такой, что $a = -4b^4$. Пусть $m = t/4$ и $h = g^m$, тогда $h^4 = = -4b^4$ и, следовательно, $h^2 = (\pm 2i)b^2$. Поскольку поле k содержит i, то $h^2 \in k$ и, следовательно, $g^{2m} \in k^* \cap G$. Но это невозможно, так как t — порядок образа элемента g в фактор-группе $G/(k^* \cap G)$.

Таким образом, поле k не содержит корней из элемента a степени p для любого простого числа p, делящего t, причем если t делится на 4, то $a \notin -4k^4$. Тогда из [9] (гл. VIII, теорема 16) следует, что элемент g является корнем неприводимого над полем k многочлена $X^t - a$, и из [9] (гл. VII, предложение 3) — что $[d:k] = t$.

Лемма 7. *Пусть f — расширение поля k, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f такая, что фактор-группа G/H — периодическая и $\operatorname{char} k \notin \pi = \pi(G/H)$, где $H = k^* \cap G$. Предположим, что поле k содержит первообразный корень из единицы степени p для любого простого числа*

$p \in \pi$, причем если порядок силовской 2-подгруппы фактор-группы G/H больше либо равен 4, то поле k содержит первообразный корень из единицы степени 4. Тогда:

i) *если* $|G/H| = n < \infty$, *то* $[k(G):k] = n$;

ii) $k(G) = k \otimes_{kH} kG$;

iii) *если K — подкольцо поля f, порожденное группой G, и R — подкольцо поля f, порожденное подгруппой H, то $K = R \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}G$.*

Доказательство. i). Доказательство проведем индукцией по n. Пусть $g \in G$, причем порядок образа $\bar{g}$ элемента g в фактор-группе G/H равен $p \in \pi$, и $d = k(g)$. Тогда по лемме 6 $[d:k] = p$. Предположим, что существует элемент $h \in (G \cap d) \setminus H\langle g \rangle$ такой, что $h^q = g$, где q — простое число, делящее n. Тогда порядок образа элемента h в фактор-группе G/H равен pq. Из леммы 6 следует, что $[k(h):k] = pq$, а так как $k(h) \le k(g)$ и $[k(g):k] = p$, это противоречит теореме о составном конечном расширении [9] (гл. VII, предложение 2). Таким образом, можно считать, что фактор-группа $(d^* \cap G)/H$ является p-группой и в ней из элемента $\bar{g}$ не извлекается корень степени p. Заменив g на произвольный элемент $g_1 \in (d^* \cap G) \setminus H$ и применив к g_1 приведенные выше рассуждения, получим, что $(d^* \cap G)/H$ — элементарная абелева p-группа.

Пусть $d^* \cap G = L$, тогда $k^* \cap G = d^* \cap L$. Пусть $|L/(L \cap k^*)| = p^m$, тогда $|Lk^*/k^*| = p^m$ и $d = k(Lk^*)$. Из [9] (гл. VIII, теорема 13) следует $p = [d:k] = |L^p(k^*)^p/(k^*)^p|$. Поскольку поле k содержит первообразный корень ξ из 1 степени p, отсюда нетрудно получить $|Lk^*/k^*| = p$ и, следовательно, $|L/(L \cap k^*)| = p$. Таким образом, $G \cap d = (G \cap k)\langle g \rangle$ и по предположению индукции $[k(G):d] = n/p$. Тогда утверждение следует из [9] (гл. VII, предложение 2).

ii). Предположим, что $k(G) \ne k \otimes_{kH} kG$. Тогда нетрудно убедиться в существовании подгруппы $N \le G$ такой, что $H \le N$, $|N/H| < \infty$ и $k(N) \ne k \otimes_{kH} kN$. Но это противоречит утверждению i).

iii). Данное утверждение следует из утверждения ii).

Лемма 8. *Пусть π — конечное множество простых чисел. Тогда существуют натуральное число $n > 2$ и бесконечное множество простых чисел α такие, что числа из π меньше чисел из α и для любых двух различных простых чисел $q, r \in \alpha$ и любого простого числа $p \in \pi$:*

i) $q - 1$ *делится на* p^2, *но не делится на* p^n;

ii) *если P — силовская p-подгруппа мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, то $p^2 \le |P| < p^n$;*

iii) *порядок силовской p-подгруппы мультипликативной группы поля k не превышает числа p^{2n}, где поле k получено присоединением к полю $\mathbb{F}_q$ первообразного корня из единицы степени r^t, $t \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть s — произведение простых чисел из множества π. Тогда существует такое натуральное число n, что $s^2 < p^{n-1}$ для любого простого числа $p \in \pi$. Пусть $a = s^n$ и $b = s^2 + 1$, тогда числа a и b взаимно просты и из теоремы Дирихле об арифметической прогрессии [10] (гл. 1.10) следует, что арифметическая прогрессия $\{b + a^2 m \mid m \in \mathbb{N}\}$ содержит бесконечное множество α простых чисел.

i). Пусть $q \in \alpha$. Из определения множества α следует, что $q-1 = s^2+s^{2n}m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и, значит, p^2 делит число $q-1$ для любого $p \in \pi$. Предположим, что p^n делит $q-1$, тогда p^n делит s^2, что невозможно, так как $s^2 < p^{n-1}$.

ii). Данное утверждение следует из утверждения i).

iii). Пусть P — силовская p-подгруппа мультипликативной группы k^* поля k. Предположим, что порядок $|P|$ группы P равен p^j, где $j > 2n$. Тогда p^{2n} делит $|k^*|$.

Рассмотрим сначала случай, когда $t = 1$. Пусть ξ — первообразный корень из единицы степени r. Если $\xi \in \mathbb{F}_q$, то утверждение следует из утверждения i). Поэтому можно считать, что $\xi \notin \mathbb{F}_q$. Пусть $\varphi(x)$ — многочлен деления круга для корня из единицы степени r. Тогда степень многочлена $\varphi(x)$ равна $r-1$. Пусть $\varphi(x) = \prod \psi(x)_i$ — разложение многочлена $\varphi(x)$ на неразложимые над полем $\mathbb{F}_q$ многочлены. Поскольку $\mathbb{F}_q[X]/(\psi(x)_i\mathbb{F}_q[X]) \simeq k$, то степень многочлена $\psi(x)_i$ равна $[k:\mathbb{F}_q] = d$ для каждого i. Отсюда следует, что d делит $r-1$, а так как $r-1$ не делится на p^n, то и d не делится на p^n.

Пусть η — первообразный корень из 1 степени p^{2n}. Тогда из утверждения i) следует, что $\eta \notin \mathbb{F}_q$ и поле $\mathbb{F}_q$ содержит первообразный корень ζ из единицы степени p^2. Из утверждения i) леммы 7 следует $[\mathbb{F}_q(\eta):\mathbb{F}_q] = p^l$, где $l \geq n$, что противоречит теореме о составном конечном расширении, так как d не делится на p^n.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть поле d получено присоединением к $\mathbb{F}_q$ первообразного корня из единицы степени r. Как показано выше, p^{2n} не делит $|d|-1$, а так как $\eta \in k$, существует элемент $\nu \in k \setminus d$ такой, что $\nu^p \in d$ и, следовательно, $[d(\nu):d] \leq p < r$. Из утверждения i) леммы 7 следует $[k:d] = r^e$, где $1 \leq e < t$. Из теоремы о составном конечном расширении следует, что $[d(\nu):d]$ делит r^e, но это приводит к противоречию, так как $[d(\nu):d] < r$.

Лемма 9. *Пусть π — конечное множество простых чисел, s — произведение чисел из множества π и $d, t \in \mathbb{N}$, причем $t \geq 2$. Пусть $\mathcal{F}$ — множество конечных полей таких, что* $\operatorname{char} f \notin \pi$ *для любого поля $f \in \mathcal{F}$ и $s^2 \leq |B| \leq s^t$, где B — холлова π-подгруппа мультипликативной группы поля f. Пусть $\hat{f}$ — алгебраическое замыкание поля $f \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{R}_f(n)$ — множество корней степени s^n из единицы поля $\hat{f}$, не являющихся корнями из единицы степени s^{n-1}. Пусть $\mathcal{P}_f(n)$ — множество минимальных многочленов над f для элементов множества $\mathcal{R}_f(n)$. Тогда существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любого поля $f \in \mathcal{F}$ и любого натурального числа $n \geq m$ степени многочленов из множества $\mathcal{P}_f(n)$ строго больше числа d.*

Доказательство. Пусть p — наименьшее число из множества π и $m \in \mathbb{N}$ — такое число, что $p^{m-t} > d$. Пусть $n \geq m$, $a \in \mathcal{R}_f(n)$ и $k = f(a)$ — поле, полученное присоединением к полю f элемента a. Пусть r — порядок образа элемента a в фактор-группе k^*/f^*. Очевидно, $r \geq p^{m-t} > d$ и из леммы 6 следует $[k:f] > d$. Тогда утверждение следует из [9] (гл. VII, §1, предложение 3).

4. О максимальных идеалах групповых колец конечнопорожденных абелевых групп.

Лемма 10. *Пусть K — конечное поле, H — конечнопорожденная свободная абелева группа и r — простое число, отличное от* $\operatorname{char} \mathbb{F}$. *Тогда пересе-*

чение максимальных идеалов L кольца $K = \mathbb{F}H$ таких, что $\pi(H/L^+) \subseteq \{r\}$, является нулевым.

Доказательство. Пусть $H_n = H^{r^n}$. Так как $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = 1$, то $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(1-H_n)\mathbb{F}H = 0$. Очевидно, $\mathbb{F}H/(1-H_n)\mathbb{F}H \simeq \mathbb{F}(H/H_n)$, причем H/H_n является конечной r-группой. Поскольку простое число r не совпадает с $\operatorname{char}\mathbb{F}$, по теореме Машке кольцо $\mathbb{F}(H/H_n)$ полупростое. Отсюда следует, что идеал $(1-H_n)\mathbb{F}H$ является пересечением максимальных идеалов L кольца $\mathbb{F}H$ таких, что $\pi(H/L^+) \subseteq \{r\}$. Так как $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(1-H_n)\mathbb{F}H = 0$, отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 11. *Пусть H — конечнопорожденная свободная абелева группа и π — конечное множество простых чисел. Пусть $\mathbb{J}$ — область целостности, причем либо $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$, либо $\mathbb{J} = \mathbb{F}$ — конечное поле. Пусть n — натуральное число и $I(n)$ — пересечение максимальных идеалов L кольца $K = \mathbb{J}H$ таких, что $\pi(H/L^+) \bigcap \pi = \varnothing$ и для любого простого числа $p \in \pi$ порядок силовской p-подгруппы мультипликативной группы поля $\mathbb{J}H/L$ не превышает числа p^n. Тогда существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $I(n) = 0$ для всех $n \geq m$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$. По лемме 8 существуют натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и бесконечное множество простых чисел α такие, что $\pi \bigcap \alpha = \varnothing$ и для любых двух различных простых чисел $q, r \in \alpha$ и любого простого числа $p \in \pi$ порядок силовской p-подгруппы мультипликативной группы поля k не превышает числа p^m, где поле k получено присоединением к полю $\mathbb{F}_q$ первообразного корня из единицы степени r^t, $t \in \mathbb{N}$.

Из леммы 10 следует, что для любого простого числа $q \in \alpha$ пересечение максимальных идеалов L кольца $K = \mathbb{F}_q H$ таких, что $\pi(H/L^+) \subseteq \{q\}$, является нулевым. Из утверждения iii) леммы 8 следует, что для любого простого числа $p \in \pi$ силовская p-подгруппа мультипликативной группы поля $\mathbb{F}_q H/L$ не превышает числа p^m. Поскольку множество простых чисел α бесконечно, то $\bigcap_{q\in\alpha} q\mathbb{Z}H = 0$, откуда, очевидно, следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь случай $\mathbb{J} = \mathbb{F}$. Пусть r — простое число, которое больше $\operatorname{char}\mathbb{F}$ и чисел из множества π. По лемме 10 пересечение максимальных идеалов L кольца $\mathbb{F}H$ таких, что $\pi(H/L^+) \subseteq \{r\}$, является нулевым. Пусть $p \in \pi$ и P_L — силовская p-подгруппа мультипликативной группы поля $k_L = \mathbb{F}H/L$. Очевидно, поле k_L получено присоединением к полю $\mathbb{F}$ корня из единицы степени r^t для некоторого $t \in \mathbb{N}$, при этом можно считать, что $t \geq 2$. Пусть подполе d поля k_L получено присоединением к полю $\mathbb{F}$ первообразного корня из 1 степени r^2. Тогда из утверждения i) леммы 7 следует, что $[k_L : d] = r^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Нам достаточно показать, что $P_L \leq d$ для любого идеала L. Если это не так, то существует элемент $\xi \in P_L \setminus d$ такой, что $\xi^p \in d$. Пусть поле $f = d(\xi)$, тогда $[f : d] \leq p < r$. По теореме о составном конечном расширении $[f : d]$ делит r^m, что невозможно, так как $p < r$.

Идеал I группового кольца kH называется точным, если $I^+ = 1$.

Утверждение 1. *Пусть H — конечнопорожденная свободная абелева группа и π — конечное множество простых чисел. Пусть $\mathbb{J}$ — область целостности, причем либо $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$, либо $\mathbb{J} = \mathbb{F}$ — конечное поле. Пусть P — простой точный идеал кольца $\mathbb{J}H$ такой, что $\mathbb{J} \bigcap P = 0$. Тогда существует максимальный идеал I кольца $\mathbb{J}H$ такой, что $P \leq I$ и $\pi(H/I^+) \bigcap \pi = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть N — максимальная изолированная подгруппа группы H такая, что $\mathbb{J}N \bigcap P = 0$, и K — подкольцо кольца $J = \mathbb{J}H / P$, порожденное подгруппой N. Поскольку идеал P точный, то, не ограничивая общности, можно считать, что H — подгруппа группы обратимых элементов кольца J. Известно, что существует подгруппа $Y \leq H$ такая, что $H = N \times Y$. Пусть $\{y_i\}$ — множество, состоящее из свободных порождающих подгруппы Y и элементов, обратных к ним. Тогда все элементы y_i являются алгебраическими над кольцом K. Нетрудно проверить, что кольцо K изоморфно групповому кольцу $\mathbb{J}N$, а кольцо J получено присоединением к кольцу K конечного множества $\{y_i\}$ алгебраических над кольцом K элементов. Пусть $\varphi_i(x)$ — минимальный над кольцом K многочлен элемента y_i, $d_i = \deg \varphi_i(x)$ и $d = \max_i \{d_i\}$.

Пусть s — произведение простых чисел из множества π. По лемме 11 существуют число $n \in \mathbb{N}$ и множество $\mathcal{L}$ максимальных идеалов кольца K такие, что $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L = 0$, $\pi(N / L^{+}) \bigcap \pi = \varnothing$ и порядок холловой π-подгруппы мультипликативной группы поля $k_L = \mathbb{J}N / L$ не превышает числа s^n для любого $L \in \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{R}_L(m)$ — множество корней из 1 степени s^m в алгебраическом замыкании поля k_L, не являющихся корнями из 1 степени s^{m-1}. Пусть $\mathcal{P}_L(m)$ — множество минимальных многочленов над полем k_L для элементов множества $\mathcal{R}_L(m)$.

По лемме 9 существует такое число $h \in \mathbb{N}$, что для любого натурального числа $m \geq h$ и любого $L \in \mathcal{L}$ степени многочленов множества $\mathcal{P}_L(m)$ строго больше числа d. Так как многочлены из множества $\mathcal{P}_L(m)$ неприводимы над полем k_L, отсюда следует, что они взаимно просты с многочленами $\overline{\varphi}_i(x)$, где $\overline{\varphi}_i(x)$ — образ многочлена $\varphi_i(x)$ в фактор-кольце $K[X]/K[X]L \simeq K_L[X]$, поскольку $\deg \varphi_i(x) \leq d$ для любого i.

Пусть $\mathfrak{X}$ — множество наибольших общих делителей многочленов $\varphi_i(x)$ и многочлена $x^f - 1$, где $f = s^h$. Поскольку группа H без кручения, элементы y_i не являются корнями из единицы в кольце J. Тогда, так как многочлены $\varphi_i(x)$ неприводимы над кольцом K, $\mathfrak{X} \subseteq K$. Пусть v — произведение элементов из множества $\mathfrak{X}$.

Из утверждения i) леммы 1 следует, что существуют конечнопорожденный свободный K-подмодуль $U \leq J$ и элемент $u \in K$ такие, что $JL \bigcap U = UL$ для любого максимального идеала L кольца K, не содержащего элемент u. Пусть $w = uv$ и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ — подмножество, состоящее из идеалов, не содержащих элемент w. Тогда идеалы из $\mathcal{M}$ не содержат элементы u и v. Из леммы 2 следует, что $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Пусть $L \in \mathcal{M}$, $\hat{L}$ — прообраз идеала LJ в кольце $\mathbb{Z}H$. Из утверждения ii) леммы 1 следует, что $\left| H / \hat{L}^{+} \right| < \infty$. Так как $JL \bigcap U = UL$, то $\hat{L} \neq \mathbb{J}H$. Из выбора идеала L следует, что $N / (N \bigcap \hat{L}^{+})$ является π'-группой. Поскольку идеал L не содержит элемент v, легко видеть, что элементы $\hat{y}_i^f - 1$ обратимы в фактор-кольце $\mathbb{J}H / \hat{L}$ для любого i, где $\hat{y}_i$ — образ элемента y_i в фактор-группе $H / \hat{L}^{+}$.

Так как многочлены множества $\mathcal{P}_L(m)$ при $m > h$ взаимно просты с многочленами $\overline{\varphi}_i(x)$, где $\overline{\varphi}_i(x)$ — образ многочлена $\varphi_i(x)$ в фактор-кольце $K[X]/K[X]L \simeq K_L[X]$, отсюда следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ элементы $\hat{y}_i^g - 1$ обратимы в фактор-кольце $\mathbb{J}H / \hat{L}$, где $g = s^m$. Тогда порядки элементов $\hat{y}_i$ в фактор-группе $H / \hat{L}^{+}$ не делятся на числа из π. Поскольку группа H

порождается подгруппой N и элементами y_i, отсюда следует, что $H/\hat{L}^+$ является π'-группой. Тогда в качестве I можно выбрать любой максимальный идеал кольца $\mathbb{J}H$, содержащий $\hat{L}$.

5. Нетеровы модули над минимаксными абелевыми группами.

Лемма 12. *Пусть A и B — подгруппы мультипликативной группы поля k такие, что $B \leq A$ и $|A/B| < \infty$, K и R — подкольца поля k, порожденные соответственно подгруппами A и B. Кольцо K нетерово тогда и только тогда, когда нетеровым является кольцо R.*

Доказательство. Так как $|A/B| < \infty$, то K — конечнопорожденный R-модуль. Поэтому из нетеровости кольца R следует нетеровость кольца K. Если же кольцо K нетерово, то нетеровость кольца R следует из основного результата работы [11].

Лемма 13. *Пусть A — абелева группа, содержащая p-подгруппу B конечного индекса, и M — $\mathbb{F}_pA$-модуль. Если модуль M нетеров, то $|M| < \infty$.*

Доказательство. Из [11] следует, что M является нетеровым $\mathbb{Z}B$-модулем, поэтому можно считать, что A — p-группа. По теореме 1 [12] (гл. IV, §1) модуль M имеет конечный ряд подмодулей, аннуляторы факторов которого являются простыми идеалами. Поэтому можно считать, что $M = \mathbb{F}_pA/P$, где P — простой идеал кольца $\mathbb{F}_pA$. Так как A — p-группа, то $P = (1-A)\mathbb{F}_pA$ и, следовательно, $|\mathbb{F}_pA/P| = p$.

Лемма 14. *Пусть k — поле положительной характеристики p, A — минимаксная подгруппа мультипликативной группы поля k такая, что $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{p\}$ и $|t(A)| < \infty$, и K — подкольцо поля k, порожденное подгруппой A. Если кольцо K нетерово, то группа A конечнопорожденная.*

Доказательство. Предположим, что группа A не является конечнопорожденной. Ввиду леммы 12 можно считать, что группа A без кручения. По лемме 5 существует плотная конечнопорожденная подгруппа $C \leq A$ такая, что $|M| = \infty$, где $M = K/(1-C)K$. Тогда M — нетеров $\mathbb{F}_pG$-модуль, где группа $G = A/C$ содержит бесконечную p-подгруппу конечного индекса. Из предыдущей леммы следует, что модуль M конечен, что приводит к противоречию.

Теорема 1. *Пусть k — поле, A — минимаксная подгруппа мультипликативной группы поля k и K — подкольцо поля k, порожденное подгруппой A. Тогда*:

i) *если кольцо K нетерово, то $A = t(A) \times B$, где B — конечнопорожденная подгруппа группы A;*

ii) *если поле k имеет положительную характеристику и $A = t(A) \times B$, где B — конечнопорожденная подгруппа группы A, то кольцо K — нетерово.*

Доказательство. i). Пусть $\pi = \mathrm{Sp}(A) \setminus \{\mathrm{char}\, k\}$ и C — подгруппа мультипликативной группы поля k, порожденная подгруппой A и первообразными корнями из единицы степени p^2 по всем $p \in \pi$. Очевидно, $|C/A| < \infty$, поэтому ввиду леммы 12 можно считать, что $A = C$. Пусть H — некоторая плотная подгруппа группы A, содержащая первообразные корни из единицы степени p^2 по всем $p \in \pi$ и такая, что $\pi(A/H) = \pi$ и $\mathrm{Sp}(H) \subseteq \{\mathrm{char}\, k\}$. Пусть f — подполе поля k, порожденное подгруппой H. Тогда из леммы 6 [8] следует, что $\mathrm{Sp}(f \cap A) \subseteq \{\mathrm{char}\, k\}$ и, значит, $|(f \cap A)/H| < \infty$. Поэтому, заменив H на $f \cap A$, можно считать, что $f \cap A = H$. Тогда из леммы 7 следует, что $K = R \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}A$, где R — подкольцо поля k, порожденное подгруппой H, и, значит, кольцо R нетерово. Из леммы 13 следует, что подгруппа H конечнопорожденная.

Поскольку группа A минимаксная, то $A = t(A) \times B$, где группа B без кручения. Пусть T — подкольцо поля k, порожденное подгруппой HB. Тогда из соотношения $K = R \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}A$ получаем $K = T \otimes_{\mathbb{Z}HB} \mathbb{Z}A$ и, следовательно, кольцо T нетерово. Таким образом, можно считать, что $A = HB$ и $K = T$. Тогда $A = t(A) \times B$, где $|t(A)| < \infty$. Пусть D — подкольцо поля k, порожденное подгруппой B. Из леммы 12 следует, что кольцо D нетерово. Пусть $V = H \cap B$, тогда из соотношения $K = R \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}A$ следует, что $D = S \otimes_{\mathbb{Z}V} \mathbb{Z}A$, где S — подкольцо поля k, порожденное подгруппой V. Таким образом, можно считать, что $A = B$, $V = H$ и $K = D$. По утверждению 1 существует максимальный идеал L кольца $\mathbb{Z}H$ такой, что $\pi \cap \pi(H/L^+) = \varnothing$. Следовательно, существует подгруппа $Y = X/L^+ \leq A/L^+$ такая, что $A/L^+ = X/L^+ \times H/L^+$. Тогда из соотношения $K = R \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}A$ следует, что фактор-кольцо K/KL изоморфно групповому кольцу $(S/SL)Y$. Так как кольцо $(S/SL)Y$ нетерово, из леммы 1 [2] следует, что группа Y удовлетворяет условию максимальности для подгрупп. Тогда ввиду периодичности группы Y получаем $|Y| < \infty$ и, значит, $|A/H| < \infty$. Отсюда следует, что подгруппа B конечнопорожденная.

ii). Пусть f — подкольцо поля k, порожденное подгруппой $t(A)$. Тогда f — локально конечное подполе поля k. Очевидно, кольцо K можно рассматривать как конечнопорожденный fB-модуль и утверждение следует из теоремы 1 [1].

Следующее утверждение показывает, что в случае нулевой характеристики поля k условия предыдущей теоремы не являются достаточными для нетеровости кольца K.

Утверждение 2. *Пусть k — поле нулевой характеристики, A — бесконечная черниковская подгруппа мультипликативной группы поля k и K — подкольцо поля k, порожденное подгруппой A. Тогда кольцо K не является нетеровым.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(A)$ и B — подгруппа группы A, порожденная корнями из единицы степени p^2 по всем $p \in \pi$. Пусть T — подкольцо поля k, порожденное подгруппой B. Тогда из леммы 7 следует, что $K = T \otimes_{\mathbb{Z}B} \mathbb{Z}A$ и, значит, $|K/Kp| = \infty$ для любого $p \in \pi$. Поскольку $|A| = \infty$, существуют $p \in \pi$ и подгруппа $C \leq A$ такие, что $B \leq C$ и фактор-группа C/B является бесконечной p-группой. Пусть R — подкольцо поля k, порожденное подгруппой C.

Предположим, что кольцо K является нетеровым. Вследствие того, что $K = T \otimes_{\mathbb{Z}B} \mathbb{Z}A$, $K = R \otimes_{\mathbb{Z}C} \mathbb{Z}A$ и, значит, нетеровым является и кольцо R. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что группа A содержит бесконечную p-подгруппу конечного индекса. Так как кольцо K нетерово, то K/Kp — нетеров $\mathbb{F}_p A$-модуль, и из леммы 13 следует $|K/Kp| < \infty$, но это приводит к противоречию.

Теорема 2. *Пусть G — минимаксная абелева группа и M — нетеров точный $\mathbb{Z}G$-модуль. Тогда группа G имеет подгруппу H такую, что модуль M является H-нильпотентным и $G/H = t(G/H) \times B$, где B — конечнопорожденная группа.*

Доказательство. Из [12] (гл. IV, §1, теорема 1) следует, что модуль M имеет конечный ряд подмодулей, каждый фактор M_i которого изоморфен модулю $\mathbb{Z}G/P_i$ для некоторого простого идеала P_i кольца $\mathbb{Z}G$. Пусть $C_i = C_G(M_i)$. Из теоремы 1 следует, что $G/C_i = t(G/C_i) \times B_i$, где B_i — конечнопорожденная группа. Тогда можно положить $H = \bigcap C_i$.

6. О метабелевых G-минимаксных группах. Модуль называется минимаксным, если он имеет конечный ряд подмодулей, каждый фактор которого либо нетеров, либо артинов. Следующая лемма является очевидной.

Лемма 15. *Метабелева группа G является G-минимаксной тогда и только тогда, когда фактор-группа $G/[G,G]$ — минимаксная и $[G,G]$ — минимаксный $\mathbb{Z}(G/[G,G])$-модуль, где группа G действует на $[G,G]$ сопряжениями.*

Лемма 16. *Пусть G — абелева минимаксная группа и M — нетеров $\mathbb{Z}G$-модуль, аддитивная группа которого является периодической. Если группа G не допускает разложения $G = A\times\langle g\rangle$, где $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа, то модуль M является артиновым.*

Доказательство. Поскольку M — нетеров модуль с периодической аддитивной группой, то он имеет конечный ряд подмодулей, каждый фактор которого является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что M — $\mathbb{F}_pG$-модуль. Из [12] (гл. IV, §1, теорема 1) следует, что модуль M имеет конечный ряд подмодулей, каждый фактор M_i которого изоморфен модулю $\mathbb{F}_pG/P_i$ для некоторого простого идеала P_i кольца $\mathbb{Z}G$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $M = \mathbb{F}_pG/P$ для некоторого простого идеала P кольца $\mathbb{F}_pG$ и является точным $\mathbb{Z}G$-модулем. Так как группа G не допускает разложения $G = A\times\langle g\rangle$, где $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа, из теоремы 1 следует, что группа G периодическая и, значит, $M = \mathbb{F}_pG/P$ — локально конечное поле. Отсюда следует, что M — простой $\mathbb{F}_pG$-модуль.

Лемма 17. *Пусть G — абелева минимаксная группа и M — $\mathbb{Z}G$-модуль, аддитивная группа которого не имеет кручения. Предположим, что группа G не допускает разложения $G = A\times\langle g\rangle$, где $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа. Тогда*:

i) *если модуль M нетеров, то аддитивная группа модуля M является конечнопорожденной*;

ii) *если модуль M минимаксный, то аддитивная группа модуля M является минимаксной.*

Доказательство. i). Из [12] (гл. IV, §1, теорема 1) следует, что модуль M содержит подмодуль $N = \mathbb{Z}G/P$ для некоторого простого идеала P кольца $\mathbb{Z}G$. Так как группа G не допускает разложения $G = A\times\langle g\rangle$, где $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа, из теоремы 1 следует, что группа $H = G/C_G(N)$ — периодическая. Тогда из утверждения 2 следует, что группа H конечная и, значит, N — конечнопорожденная группа. Поскольку M — группа без кручения и N — ее конечнопорожденная подгруппа, то $t(M/N) = T/N$ — группа конечного ранга. Тогда из нетеровости модуля M следует, что $|T/N| < \infty$. Таким образом, модуль M содержит подмодуль T, аддитивная группа которого является конечнопорожденной изолированной подгруппой аддитивной группы модуля M. Применив аналогичные рассуждения к фактор-модулю M/T, получим возрастающий ряд подмодулей модуля M, факторы которого являются конечнопорожденными группами. Тогда утверждение следует из нетеровости модуля M.

ii). Вследствие того, что модуль M минимаксный, он имеет конечный ряд $\{M_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ подмодулей, каждый фактор которого либо артинов, либо нетеров. Доказательство проведем индукцией по n. Из теоремы 2.4 [13] следует, что модуль M не содержит простых подмодулей и, значит, модуль M_1 является нетеровым. Тогда из утверждения i) следует, что аддитивная группа модуля M_1 конечнопорожденная. Так как модуль M минимаксный, группа $t(M/M_1) = T/M_1$ является черниковской. Таким образом, аддитивная группа модуля T является минимаксной. Тогда, переходя к фактор-модулю M/T, можно воспользоваться предположением индукции.

Теорема 3. *Пусть G — метабелева G-минимаксная группа и H — ее коммутант. Тогда либо $G = N \leftthreetimes \langle g \rangle$, где $\langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа, либо фактор-группа $G/t(H)$ минимаксная и $t(H)$ удовлетворяет условию минимальности для G-инвариантных подгрупп.*

Доказательство. Предположим, что группа G не допускает полупрямого разложения $G = N \leftthreetimes \langle g \rangle$, где $\langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Из леммы 15 следует, что H является минимаксным $\mathbb{Z}A$-модулем, где $A = G/H$ — минимаксная абелева группа, не допускающая разложения $A = B \times \langle g \rangle$, где $\langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Тогда утверждение теоремы следует из лемм 16, 17.

1. *Hall P.* Finiteness condition for soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1954. – **4**, № 16. – P. 419 – 436.
2. *Ламбек И.* Кольца и модули. Групповое кольцо. – М.: Мир, 1971. – 279 с.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2-х т. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
4. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А., Тушев А. В.* Модули над нильпотентными группами конечного ранга // Алгебра и логика. – 1985. – **24**, № 6. – С. 631 – 666.
5. *Brown K. A.* The Nullstellensatz for certain group rings // J. London Math. Soc. – 1982. – **26**. – P. 425 – 434.
6. *Tushev A. V.* Spectra of conjugated ideals in group algebras of abelian groups of finite rank and control theorems // Glasgow Math. J. – 1996. – **38**. – P. 309 – 320.
7. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1959. – **9**. – P. 595 – 622.
8. *Тушев А. В.* Нетеровы модули над абелевыми группами конечного свободного ранга // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7, 8. – С. 1042 – 1048.
9. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
10. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. – М.: Наука, 1965. – 176 с.
11. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. – 1970. – **144**. – S. 19 – 21.
12. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. – М.: Мир, 1971. – 707 с.
13. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. – 1980. – **19**, № 2. – С. 150 – 172.

Получено 23.11.2000,
после доработки — 09.07.2001