УДК 517.9

**А. М. Самойленко** (Ін-т математики НАН України, Київ),
**Р. І. Петришин, Л. М. Лакуста** (Чернівец. нац. ун-т)

# УСЕРЕДНЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

By using the averaging method, we prove the solvability of boundary-value problems with parameters for nonlinear oscillating systems under pulse influence at fixed times. We also establish estimates of deviations of solutions of the initial and averaged problems.

За допомогою методу усереднення доведено розв'язність крайових задач з параметрами для нелінійних коливних систем, що зазнають імпульсного впливу у фіксовані моменти часу. Встановлено також оцінки відхилень розв'язків вихідної та усередненої задач.

Розглядається імпульсна багаточастотна система

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\tau,\mu) + \varepsilon A(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(x,\tau,\mu)}{\varepsilon} + B(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon), \quad \tau \neq \tau_j^{(q)},$$
$$\Delta x\big|_{\tau=\tau_j^{(q)}} = \varepsilon^2 f_q(x,\varphi,\mu,\varepsilon), \qquad \Delta\varphi\big|_{\tau=\tau_j^{(q)}} = \varepsilon g_q(x,\varphi,\mu,\varepsilon), \tag{1}$$

де $x \in D \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $m \geq 2$, $\tau \in [0, L]$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $G \ni \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ — параметри, $D$ і $G$ — обмежені області, $0 < \tau_1^{(1)} < \ldots < \tau_1^{(p)} \leq 2\pi\varepsilon$, $\tau_{j+1}^{(q)} - \tau_j^{(q)} = 2\pi\varepsilon$ для всіх $j \geq 1$ і $q = \overline{1, p}$, а функції $a, A, \omega, B, f_q, g_q$ мають неперервні, обмежені сталою $\sigma_1$, частинні похідні першого порядку за всіма змінними $x, \varphi, \tau, \mu, \varepsilon$ і є $2\pi$-періодичними за кожною із координат вектора $\varphi$. Такого вигляду системи виникають при моделюванні коливних процесів у різних задачах механіки [1 – 3], які зазнають імпульсного впливу у фіксовані моменти часу.

Вважатимемо, що при деякому $l \geq m$

$$\left\| \frac{\partial S(x,\tau,\mu)}{\partial\mu} - \frac{\partial S(\bar{x},\tau,\bar{\mu})}{\partial\mu} \right\| \leq \sigma_1(\|x - \bar{x}\| + \|\mu - \bar{\mu}\|),$$
$$(x,\tau,\mu) \in D \times [0, L] \times G \equiv G_1, \quad (\bar{x},\tau,\bar{\mu}) \in G_1, \quad S \in C^l_{x,\tau}(G_1, \sigma_1), \tag{2}$$

тобто $S = (a, \omega)$ має неперервні по $(x, \tau, \mu) \in G_1$ частинні похідні по $x, \tau$ до порядку $l$, які обмежені сталою $\sigma_1$. Нехай коефіцієнти Фур'є $C_k(x,\tau,\mu,\varepsilon)$ і $h_{qk}(x,\mu,\varepsilon)$ $2\pi$-періодичних по $\varphi_\nu$, $\nu = \overline{1, m}$, функцій $C = (A, B)$ і $h_q = (f_q, g_q)$ справджують нерівності

$$\sum_k \left[ \|k\| \sup \|C_k\| + \sup\left\| \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\| + \sup\left\| \frac{\partial C_k}{\partial \tau} \right\| \right] \leq \sigma_1,$$
$$\sum_{q=1}^{p} \sum_k \left[ \|k\|^3 \sup \|h_{qk}\| + \|k\|^2 \sup \left\| \frac{\partial h_{qk}}{\partial x} \right\| \right] \leq \sigma_1, \tag{3}$$

в яких супремум береться по $(x,\tau,\mu,\varepsilon) \in G_1 \times (0, \varepsilon_0]$. Під нормою матриці тут і далі розуміємо суму модулів її елементів.

Усереднена система набере вигляду

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a(\bar{x},\tau,\mu) + \varepsilon c(\bar{x},\tau,\mu,\varepsilon), \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\bar{x},\tau,\mu)}{\varepsilon} + b(\bar{x},\tau,\mu,\varepsilon), \tag{4}$$

де

$$c(x,\tau,\mu,\varepsilon) = \bar{A}(x,\tau,\mu,\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{p} \bar{f}_q(x,\mu,\varepsilon),$$

$$b(x,\tau,\mu,\varepsilon) = \bar{B}(x,\tau,\mu,\varepsilon) + \frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{p} \bar{g}_q(x,\mu,\varepsilon),$$

а $\bar{F}(x,\tau,\mu,\varepsilon)$ позначає середнє по $\varphi$ в кубі періодів функції $F(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon)$:

$$\bar{F}(x,\tau,\mu,\varepsilon) = (2\pi)^{-m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} F(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon)\,d\varphi_1\ldots d\varphi_m .$$

На відміну від (1) у системі (4) відсутні імпульсні впливи і вона є гладкою. Зазначимо, що такий підхід побудови гладких усереднених рівнянь запропонував А. М. Самойленко [4], а пізніше він отримав поширення на багаточастотні імпульсні коливні системи [3, 5]. Обгрунтування методу усереднення в таких системах ускладнюється через явище резонансу, тобто коли скалярний добуток цілочислового вектора $k \neq 0$ і вектора $\omega$ дорівнює цілому числу [2, 3].

Припустимо, що

$$\det\left(V_l^*(x,\tau,\mu)V_l(x,\tau,\mu)\right) > 0, \quad (x,\tau,\mu)\in G_1, \tag{5}$$

де через $V_l$ позначено $(l\times m)$-вимірну матрицю

$$\left(\frac{d^r}{d\tau^r}\omega_\nu(x,\tau,\mu)\right)_{r,\nu=1}^{l,m},$$

а через $V_l^*$ — транспоновану. Тут повні похідні по $\tau$ від координат $\omega_\nu$, $\nu = \overline{1,m}$, вектора частот $\omega$ обчислюються вздовж розв'язків рівняння $\frac{dx}{d\tau} = a(x,\tau,\mu)$.

Нехай $D_\rho$ — множина тих точок, що належать області $D$ разом із своїм $\rho$-околом, а $K_1 = K(y^*,\rho_1)$ і $K_2 = K(\mu^*,\rho_2)$ — кулі в $R^n$ та $R^s$ радіусів $\rho_1$ і $\rho_2$ з центрами в точках $y^*$ і $\mu^*$, причому $\bar{K}_1\subset D$, $\bar{K}_2\subset G$. Вважатимемо, що $z = z(\tau,y,\mu)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dz}{d\tau} = a(z,\tau,\mu), \quad z\,|_{\tau=0} = y,$$

і $z\in \bar{D}_{\bar{\rho}}$ при $\tau\in[0,L]$, $y\in\bar{K}_1$ і $\mu\in\bar{K}_2$ при деякому $\bar{\rho}>0$. На підставі умов (2) і (5) одержимо

$$\det\left(V_l^*(z,\tau,\mu)V_l(z,\tau,\mu)\right) \geq \bar{\sigma}_1 = \text{const} > 0 \tag{6}$$

для всіх $(\tau,y,\mu)\in[0,L]\times\bar{K}_1\times\bar{K}_2\equiv G_2$ і елементи матриці $V_l$ рівномірно неперервні на множині $G_2$. Відповідним чином модифікуючи процес доведення рівномірних оцінок осциляційних інтегралів [6] та сум [3, 5] у випадку $\omega=\omega(\tau)$, на підставі нерівності (6), як і в роботі [7], для кожної неперервно диференційовної на $[0,L]$ за винятком точок $\tau_j^{(q)}$ матриці $N(\tau)$,

$$\Delta N(\tau)\,\big|_{\tau_j^{(q)}} = N_{jq},$$

отримуємо оцінки

$$\left\| \int_0^\tau N(t)\Omega_k(t, y, \mu, \varepsilon)\, dt \right\| \le$$

$$\le \sigma_0 \varepsilon^\alpha \left[ \sup_{[0,L]} \|N(\tau)\| + \frac{1}{\|k\|} \left( \sup_{\substack{[0,L] \\ \tau \ne \tau_j^{(q)}}} \left\| \frac{d}{d\tau} N(\tau) \right\| + \sum_{\tau_j^{(q)} \le L} \|N_{jq}\| \right) \right], \tag{7}$$

$$\left\| \varepsilon \sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} N(\tau_j^{(q)}) \Omega_k(\tau_j^{(q)}, y, \mu, \varepsilon) \right\| \le$$

$$\le \bar{\sigma}_0 \|k\| \varepsilon^\alpha \left[ \sup_{[0,L]} \|N(\tau)\| + \sup_{\substack{[0,L] \\ \tau \ne \tau_j^{(q)}}} \left\| \frac{d}{d\tau} N(\tau) \right\| + \sum_{\tau_j^{(q)}} \|N_{jq}\| \right] \tag{8}$$

для всіх $(\tau, y, \mu) \in G_2$, $k \ne 0$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($0 < \varepsilon_0$ — досить мале) зі сталими $\sigma_0$ і $\bar{\sigma}_0$, не залежними від $\varepsilon, k, \mu, y$. Тут $\alpha = (l+1)^{-1}$, $k$ — цілочисловий вектор,

$$\Omega_k(t, y, \mu, \varepsilon) = \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t (k, \omega(z, \tau, \mu))\, d\tau \right\},$$

$z = z(\tau, y, \mu)$, $(k, \omega)$ — скалярний добуток, $i$ — уявна одиниця.

Позначимо $x_- = x(\tau) - \bar{x}(\tau)$, $\varphi_- = \varphi(\tau) - \bar{\varphi}(\tau)$, де $(x(\tau), \varphi(\tau)) = (x(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon))$ і $(\bar{x}(\tau), \bar{\varphi}(\tau)) = (\bar{x}(\tau, y, \mu, \varepsilon), \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \mu, \varepsilon))$ — ті розв'язки систем відповідно (1) і (4), які при $\tau = 0$ набувають значення $(y, \psi)$.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* (2), (3), (5) *і* $\bar{x}(\tau, y, \mu, \varepsilon) \in D_\rho$ *при* $\tau \in [0, L]$, $y \in K_1$, $\mu \in K_2$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і деякому* $\rho > 0$. *Тоді існують такі сталі* $\sigma_2 > 0$ *і* $\varepsilon_0^* > 0$, *що для всіх* $\tau \in [0, L]$, $y \in K_1$, $\psi \in R^m$, $\mu \in K_2$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le \varepsilon_0^*$, *мають місце нерівності*

$$\begin{aligned} \|x_-\| + \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} x_- \right\| + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial y} x_- \right\| + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial \mu} x_- \right\| + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_- \right\| &\le \sigma_2 \varepsilon^{1+\alpha}, \\ \|\varphi_-\| + \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_- \right\| + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial y} \varphi_- \right\| + \varepsilon \left\| \frac{\partial}{\partial \mu} \varphi_- \right\| + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi_- \right\| &\le \sigma_2 \varepsilon^{\alpha}. \end{aligned} \tag{9}$$

***Доведення.*** Із систем (1) і (4) маємо

$$x(\tau) = y + \int_0^\tau [a(x(t), t, \mu) + \varepsilon A(x(t), \varphi(t), t, \mu, \varepsilon)]\, dt +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} f_q\big(x(\tau_j^{(q)}), \varphi(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\big),$$

$$\varphi(\tau) = \varepsilon \sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} g_q\big(x(\tau_j^{(q)}), \varphi(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\big) +$$

$$+ \psi + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau [\omega(x(t), t, \mu) + \varepsilon B(x(t), \varphi(t), t, \mu, \varepsilon)]\, dt,$$

$$\bar{x}(\tau) = y + \int_0^\tau [a(\bar{x}(t), t, \mu) + \varepsilon c(\bar{x}(t), t, \mu, \varepsilon)]\, dt, \tag{10}$$

$$\bar{\varphi}(\tau) = \psi + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau} [\omega(\bar{x}(t), t, \mu) + \varepsilon b(\bar{x}(t), t, \mu, \varepsilon)]dt,$$

звідки для $u(\tau) = (x(\tau) - \bar{x}(\tau),\ \varepsilon\varphi(\tau) - \varepsilon\bar{\varphi}(\tau))$ дістаємо нерівність

$$\|u(\tau)\| \le 4\sigma_1 \int_0^{\tau} \|u(t)\|dt + 2\sigma_1\varepsilon \sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} \|u(\tau_j^{(q)})\| +$$

$$+ \varepsilon\left\|\int_0^{\tau} \tilde{C}(\bar{x}(t), \bar{\varphi}(t), t, \mu, \varepsilon)dt\right\| + \varepsilon^2\left\|\sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} \tilde{h}_q\left(\bar{x}(\tau_j^{(q)}), \bar{\varphi}(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\right)\right\| +$$

$$+ \varepsilon\left\|\int_0^{\tau} \frac{1}{2\pi}\sum_{q=1}^{p} \bar{h}_q(\bar{x}(t), \mu, \varepsilon)dt - \varepsilon\sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} \bar{h}_q\left(\bar{x}(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\right)\right\|, \tag{11}$$

де $\tilde{C} = C - \bar{C}$, $\tilde{h}_q = h_q - \bar{h}_q$. Як і в [3], останній доданок у правій частині нерівності (11) оцінюємо зверху величиною $\sigma_3^{(1)}\varepsilon^2$, $\sigma_3^{(1)} = 2\sigma_1[2 + \sigma_1(2 + (2\pi)^{-1}p)L]$.

Оскільки

$$\|\bar{x}(\tau, y, \mu, \varepsilon) - z(\tau, y, \mu)\| \le \varepsilon\sigma_1 e^{\sigma_1 L} < \frac{1}{2}\rho \equiv \bar{\rho}$$

при $\varepsilon_0 \le \rho(3\sigma_1)^{-1}\varepsilon^{-\sigma_1 L}$, то $z(\tau, y, \mu) \in \overline{D}_{\bar{\rho}}$ і функція

$$\bar{\theta}(\tau) = \bar{\varphi}(\tau) - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau} \omega(z(t, y, \mu), t, \mu)dt$$

задовольняє нерівність

$$\left\|\frac{d\bar{\theta}(\tau)}{d\tau}\right\| \le \tilde{\sigma}_2 = \text{const}.$$

Ці міркування дозволяють скористатись оцінкою осциляційного інтеграла (7) і умовами (3) для одержання нерівності

$$\varepsilon\left\|\int_0^{\tau} \tilde{C}(\bar{x}(t), \bar{\varphi}(t), t, \mu, \varepsilon)dt\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\sum_{k \ne 0}\left\|\int_0^{\tau} C_k(\bar{x}(t), t, \mu, \varepsilon)\exp\{i(k, \bar{\theta}(t))\}\Omega_k(t, y, \mu, \varepsilon)dt\right\| \le \sigma_3^{(2)}\varepsilon^{1+\alpha}.$$

На підставі (8) аналогічно встановлюємо, що

$$\varepsilon^2\left\|\sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} \tilde{h}_q\left(\bar{x}(\tau_j^{(q)}), \bar{\varphi}(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\right)\right\| \le$$

$$\le \varepsilon^2\sum_{k \ne 0}\left\|\sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} h_{qk}\left(\bar{x}(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\right)\exp\left\{i\left(k, \bar{\theta}(\tau_j^{(q)})\right)\right\}\Omega_k(\tau_j^{(q)}, y, \mu, \varepsilon)\right\| \le \sigma_3^{(3)}\varepsilon^{1+\alpha}.$$

Тому співвідношення (11) дають можливість одержати нерівність

$$\|u(\tau)\| \le 4\sigma_1\int_0^{\tau} \|u(t)\|dt + 2\sigma_1\varepsilon\sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} \|u(\tau_j^{(q)})\| + \varepsilon^{1+\alpha}(\sigma_3^{(1)} + \sigma_3^{(2)} + \sigma_3^{(3)}),$$

розв'язавши яку [1], матимемо оцінку

$$\| u(\tau) \| = \| x_- \| + \varepsilon \| \varphi_- \| \le \sigma_2^{(1)} \varepsilon^{1+\alpha}, \quad \tau \in [0, L],$$

зі сталою $\sigma_2^{(1)}$, не залежною від $\varepsilon$. При цьому ми скористалися тим, що кількість точок $\tau_j^{(q)}$ на відрізку $[0, L]$ не перевищує $\left(\frac{L}{2\pi} + 1\right)\rho\varepsilon^{-1}$.

Доведемо тепер оцінку для $\left\| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \mu} \right\|$. Диференціюючи рівності (10) по $\mu$, одержуємо

$$\left\| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \mu} \right\| \le 4\sigma_1 \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u(t)}{\partial \mu} \right\| dt + 2\sigma_1 \varepsilon \sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} \left\| \frac{\partial u(\tau_j^{(q)})}{\partial \mu} \right\| +$$

$$+ \varepsilon^\alpha \sigma_4^{(1)} + \left\| \varepsilon \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \varphi} C(x(t), \varphi(t), t, \mu, \varepsilon) \frac{\partial \bar{\varphi}(t)}{\partial \mu} dt \right\| +$$

$$+ \varepsilon^2 \left\| \sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} \frac{\partial}{\partial \varphi} h_q\left(\bar{x}(\tau_j^{(q)}), \bar{\varphi}(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\right) \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau_j^{(q)})}{\partial \mu} \right\|. \tag{12}$$

Із усереднених рівнянь (4) випливає

$$\left\| \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau)}{\partial \mu} \right\| + \left\| \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau)}{\partial \mu} \right\| \le \sigma_4^{(2)} \varepsilon^{-1}, \quad \tau \in [0, L], \tag{13}$$

де $\sigma_4^{(2)}$ — стала, не залежна від $\varepsilon$. Якщо позначити через $C_k^{(1)}(x, t, \mu, \varepsilon)$ коефіцієнти Фур'є функції $\frac{\partial}{\partial \varphi} C(x, \varphi, t, \mu, \varepsilon)$, $\|C_k^{(1)}\| \le \|k\| \, \|C_k\|$, то дістанемо нерівність

$$\delta_1 \equiv \left\| \varepsilon \int_0^\tau \frac{\partial C}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mu} dt \right\| \le \sum_{k \ne 0} \left\| \int_0^\tau D_k \Omega_k(t, y, \mu, \varepsilon) dt \right\|,$$

в якій

$$D_k = C_k^{(1)}(x(t), t, \mu, \varepsilon) \exp\left\{ i\left(k, \varphi(t) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \omega(z(r, y, \mu), r, \mu) dr \right) \right\} \frac{\partial(\varepsilon \bar{\varphi}(t))}{\partial \mu}.$$

Оскільки

$$\left\| \Delta D_k \big|_{t = \tau_j^{(q)}} \right\| \le \left[ \varepsilon^2 \sup \| f_q \| \sup \left\| \frac{\partial C_k^{(1)}}{\partial x} \right\| + \varepsilon \sup \| g_q \| \sup \| C_k^{(1)} \| \, \|k\| \right] \sigma_4^{(2)} \le$$

$$\le \varepsilon \sigma_1 \sigma_4^{(2)} \|k\| \left[ \|k\| \sup \|C_k\| + \sup \left\| \frac{\partial C_k}{\partial x} \right\| \right],$$

то на підставі оцінки (7) і умов (3) маємо

$$\delta_1 \le \sigma_4^{(3)} \varepsilon^\alpha.$$

Нехай $\delta_2$ позначає останній доданок у правій частині нерівності (12), а $h_{qk}^{(1)}(x, \mu, \varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є функції $h_q(x, \varphi, \mu, \varepsilon)$. Тоді, використовуючи нерівності (3), (8) і (13), одержуємо

$$\delta_2 \le \sum_{k \ne 0} \left\| \varepsilon \sum_{\tau_j^{(q)} \le \tau} h_{qk}^{(1)}\left(\bar{x}(\tau_j^{(q)}), \mu, \varepsilon\right) \exp\left\{ i\left( k, \bar{\varphi}(\tau_j^{(q)}) - \right.\right.\right.$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j^{(q)}} \omega\,(z(r, y, \mu), r, \mu) dr \Bigg\} \frac{\partial\left(\varepsilon \overline{\varphi}(\tau_j^{(q)})\right)}{\partial \mu} \Omega_k (\tau_j^{(q)}, y, \mu, \varepsilon) \Bigg\| \leq$$

$$\leq \sum_{k \neq 0} \sigma_4^{(4)} \varepsilon^{\alpha} \left( \|k\|^3 \sup \|h_{qk}\| + \|k\|^2 \sup \left\| \frac{\partial h_{qx}}{\partial x} \right\| \right) \leq \sigma_1 \sigma_4^{(4)} \varepsilon^{\alpha}.$$

Зазначені вище міркування дозволяють отримати із нерівності (12) оцінку

$$\left\| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \mu} \right\| = \left\| \frac{\partial x_-}{\partial \mu} \right\| + \varepsilon \left\| \frac{\partial \varphi_-}{\partial \mu} \right\| \leq \sigma_2^{(2)} \varepsilon^{\alpha},$$

в якій стала $\sigma_2^{(2)}$ не залежить від $\varepsilon$.

Таким же чином доводяться всі інші нерівності в (9). Малість $\varepsilon_0$ визначається можливістю використання оцінок (7), (8) і нерівністю $\sigma_2^{(1)} \varepsilon_0^{1+\alpha} \leq \frac{1}{2} \rho$, яка гарантує, що $x(\tau) \in D_{\frac{1}{2}\rho}$. Теорему доведено.

У деяких частинних випадках оцінки (9) можна покращити. Зокрема, для імпульсних систем з $\omega = \omega(\tau)$ у роботі [5] доведено, що оцінки $x_-$, $\varphi_-$ та їх частинні похідні по $y, \psi, \mu$ мають однаковий порядок відносно $\varepsilon$. Ми ж припустимо, що:

А) $a$ і $\omega$ не залежать від $\mu$, тобто $a = a(x, \tau)$ і $\omega = \omega(x, \tau)$;

Б) існують неперервні по $x$, $\varphi$, $\tau$, $\mu$, $\varepsilon$ обмежені частинні похідні

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \tau \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x_\nu \partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 h_q}{\partial x_\nu \partial \mu}, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad q = \overline{1, p};$$

В) $$\sum_{k \neq 0} \left[ \sup \left\| \frac{\partial C_k}{\partial \mu} \right\| + \frac{1}{\|k\|} \left( \sup \left\| \frac{\partial^2 C_k}{\partial \tau \partial \mu} \right\| + \sum_{\nu=1}^{n} \sup \left\| \frac{\partial^2 C_k}{\partial x_\nu \partial \mu} \right\| \right) \right] \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{q=1}^{p} \sum_{k} \left[ \|k\|^2 \sup \left\| \frac{\partial h_{qk}}{\partial \mu} \right\| + \|k\| \sum_{\nu=1}^{n} \sup \left\| \frac{\partial^2 h_{qk}}{\partial x_\nu \partial \mu} \right\| \right] \leq \sigma_1.$$

**Теорема 2.** *Якщо виконуються умови теореми* 1 *і* А) – В), *то вірні оцінки* (9) *з уточненнями*

$$\left\| \frac{\partial x_-}{\partial \mu} \right\| \leq \sigma_2 \varepsilon^{1+\alpha}, \quad \left\| \frac{\partial \varphi_-}{\partial \mu} \right\| \leq \sigma_2 \varepsilon^{\alpha}. \tag{14}$$

***Доведення.*** При зроблених припущеннях рівняння (10) дають можливість отримати нерівність

$$\left\| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \mu} \right\| \leq 4\sigma_1 \int_0^{\tau} \left\| \frac{\partial u(t)}{\partial \mu} \right\| dt + 2\sigma_1 \varepsilon \sum_{\tau_j^{(q)} \leq \tau} \left\| \frac{\partial u(\tau_j^{(q)})}{\partial \mu} \right\| + \sigma_5^{(1)} \varepsilon^{1+\alpha} +$$

$$+ \left\| \varepsilon \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \varphi} C(x(t), \varphi(t), t, \mu, \varepsilon) \frac{\partial \overline{\varphi}(t)}{\partial \mu} dt \right\| + \left\| \varepsilon \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{C}(\overline{x}(t), \varphi(t), t, \mu, \varepsilon) dt \right\| +$$

$$+ \left\| \varepsilon^2 \sum_{\tau_j^{(q)} \leq \tau} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} h_q(\overline{x}(\tau), \overline{\varphi}(\tau), \mu, \varepsilon) \frac{\partial \overline{\varphi}(\tau)}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{h}(\overline{x}(\tau), \overline{\varphi}(\tau), \mu, \varepsilon) \right] \Bigg|_{\tau = \tau_j^{(q)}} \right\|.$$

Оскільки $a$ і $\omega$ не залежать від $\mu$, то із усереднених рівнянь (4) знаходимо

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}(\tau)}{\partial \mu} \right\| + \left\| \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{x}(\tau)}{\partial \mu} \right\| \le \varepsilon \sigma_5^{(2)},$$
$$\left\| \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau)}{\partial \mu} \right\| + \left\| \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{\varphi}(\tau)}{\partial \mu} \right\| \le \sigma_5^{(2)}, \quad \tau \in [0, L], \tag{15}$$

де стала $\sigma_5^{(2)}$ не залежить від $\varepsilon$. Повторюючи далі схему встановлення оцінки $\left\| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \mu} \right\|$ при доведенні теореми 1 і використовуючи умови B) та (15), отримуємо нерівність (14). Теорему доведено.

Задамо для (1) інтегральні крайові умови [8]

$$\int_0^L [\xi(x, \tau, \mu) + \varepsilon \xi_1(x, \varphi, \tau, \mu, \varepsilon)] d\tau = 0, \tag{16}$$

$$\int_0^L [M(\tau)\varphi + \eta(x, \varphi, \tau, \mu, \varepsilon)] d\tau = 0, \tag{17}$$

в яких $\xi$, $\xi_1$ і $\eta$ — відповідно $(n+s)$- і $m$-вимірні обмежені вектори, $M$ — неперервна на $[0, L]$ $(m \times m)$-вимірна матриця, $\xi_1$ і $\eta$ — $2\pi$-періодичні по $\varphi_\nu$, $\nu = \overline{1, m}$. Вважатимемо, що

$$(\xi, \xi_1, \eta) \in C^1_{x, \varphi, \tau, \mu}(X, \sigma_1), \quad X = D \times R^m \times [0, L] \times K_2 \times (0, \varepsilon_0],$$
$$\left\| \frac{\partial \xi(r, \tau)}{\partial r} - \frac{\partial \xi(\bar{r}, \tau)}{\partial r} \right\| \le \sigma_1 \| r - \bar{r} \|^{l_1} \quad \forall r, \bar{r} \in D \times K_2, \quad \tau \in [0, L]. \tag{18}$$

Тут $r = (x, \mu)$, а $l_1$ — деяка стала, $0 < l_1 \le 1$. Накладемо також наступне обмеження на коефіцієнти Фур'є $H_k = (\xi_{1k}, \eta_k)$ функції $H = (\xi_1, \eta)$:

$$\sum_k \left[ \|k\| \sup \|H_k\| + \sup \left\| \frac{\partial H_k}{\partial x} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial H_k}{\partial \tau} \right\| \right] \le \sigma_1, \tag{19}$$

де супремум береться по $(x, \tau, \mu, \varepsilon) \in D \times [0, L] \times K_2 \times (0, \varepsilon_0] \equiv X_1$.

Задача (1), (16), (17) — це крайова задача з параметрами та інтегральними крайовими умовами, і розв'язати її — означає знайти такий розв'язок $(x(\tau), \varphi(\tau))$ системи (1) і такий вектор $\mu \in K_2$, які задовольняють умови (16), (17). Для побудови розв'язку вказаної задачі використаємо метод усереднення.

Усереднена по $\varphi$ задача набере вигляду

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a(\bar{x}, \tau, \mu) + \varepsilon c(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon), \quad \int_0^L \left[ \xi(\bar{x}, \tau, \mu) + \varepsilon \bar{\xi}_1(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon) \right] d\tau = 0, \tag{20}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\bar{x}, \tau, \mu)}{\varepsilon} + b(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon), \quad \int_0^L [M(\tau)\bar{\varphi} + \bar{\eta}(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon)] d\tau = 0, \tag{21}$$

де $\bar{\xi}_1$ і $\bar{\eta}$ — середні по $\varphi$ функцій $\xi_1$ і $\eta$.

Побудуємо $(n+s)$-вимірну квадратну матрицю

$$P(\bar{x}^0, \bar{\mu}^0) = \int_0^L \left( \frac{\partial \xi^0}{\partial z^0} \frac{\partial z^0}{\partial \bar{x}^0}, \ \frac{\partial \xi^0}{\partial z^0} \frac{\partial z^0}{\partial \bar{\mu}^0} + \frac{\partial \xi^0}{\partial \bar{\mu}^0} \right) d\tau,$$

в якій $\xi^0 = \xi(z^0, \tau, \bar{\mu}^0)$, $z^0 = z(\tau, \bar{x}^0, \bar{\mu}^0)$.

При зроблених припущеннях легко довести наступні твердження.

**Лема 1.** *Якщо існує єдиний розв'язок* $\left(z(\tau,\bar{x}^0,\bar{\mu}^0),\bar{\mu}^0\right)$ *задачі*

$$\frac{dz}{d\tau} = a(z,\tau,\mu), \qquad \int_0^L \xi(z,\tau,\mu)d\tau = 0,$$

*для якого* $\bar{\mu}^0 \in K_2$, $z(\tau,\bar{x}^0,\bar{\mu}^0) \in D$ *і матриця* $P_0 \equiv P(\bar{x}^0,\bar{\mu}^0)$ *невироджена, то існує єдиний розв'язок* $(\bar{x}(\tau),\bar{\mu}^0)$, *де* $\bar{x}(\tau) = \bar{x}(\tau,x^0,\mu^0,\varepsilon)$, *задачі* (20), *який задовольняє нерівність*

$$\left\|\bar{x}(\tau)-z(\tau,\bar{x}^0,\bar{\mu}^0)\right\| + \|\mu^0-\bar{\mu}^0\| \le \sigma_6\varepsilon \tag{22}$$

*для всіх* $\tau \in [0,L]$ *і* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *з деякою сталою* $\sigma_6$, *не залежною від* $\varepsilon$.

**Лема 2.** *Якщо* $(\bar{x}(\tau),\bar{\mu}^0)$ *— єдиний розв'язок задачі* (20) *і*

$$\det Q \ne 0, \qquad Q = \int_0^L M(\tau)d\tau,$$

*то існує єдиний розв'язок* $\bar{\varphi}(\tau) \equiv \bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\mu^0,\varepsilon)$ *задачі* (21).

Очевидно, що $z(\tau,\bar{x}^0,\bar{\mu}^0) \in D_{\rho_3}$ з деяким $\rho_3 > 0$. Із нерівності (22) випливає, що за рахунок вибору досить малого $\varepsilon_0 > 0$ $\bar{x}(\tau) \in D_{\frac{1}{2}\rho_3}$ і $K_3 = K(\mu^0,\rho_4) \subset \subset K_2$ для всіх $\tau \in [0,L]$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де $\rho_4 = \frac{1}{4}\left(\rho_2 - \|\mu^* - \bar{\mu}^0\|\right)$. Крім того, на підставі (18) і (22) існує така не залежна від $\varepsilon$ стала $\sigma_7$, що матриця

$$P_1(\varepsilon) = \int_0^L \left( \frac{\partial(\xi+\varepsilon\bar{\xi}_1)}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x^0},\ \frac{\partial(\xi+\varepsilon\bar{\xi}_1)}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial\mu^0} + \frac{\partial(\xi+\varepsilon\bar{\xi}_1)}{\partial\mu^0}\right)d\tau,$$

в якій $\xi = \xi(\bar{x},\tau,\mu^0)$, $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1(\bar{x},\tau,\mu^0,\varepsilon)$, $\bar{x} = \bar{x}(\tau,x^0,\mu^0,\varepsilon)$, задовольняє нерівності

$$\|P_1(\varepsilon)-P_0\| \le \sigma_7\varepsilon^{l_1}, \qquad \|P_1^{-1}(\varepsilon)\| \le \sigma_7, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0].$$

Перейдемо до дослідження розв'язності задачі (1), (16), (17), скориставшись при цьому ідеями роботи [8]. Якщо її розв'язок шукати у вигляді

$$\begin{gathered}(x(\tau),\ \varphi(\tau),\ \mu) = (x(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+h,\varepsilon),\\ \varphi(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu^0+h,\varepsilon),\mu^0+h),\end{gathered} \tag{23}$$

де $(y,h) = \upsilon \in R^{n+s}$ і $\psi \in R^m$ — невідомі параметри, то для їх знаходження дістанемо рівняння

$$\begin{aligned}\upsilon = &-P_1^{-1}(\varepsilon)\left\{\int_0^L\left[\xi(\bar{x},\tau,\mu)+\varepsilon\bar{\xi}_1(\bar{x},\tau,\mu,\varepsilon)\right]d\tau - P_1(\varepsilon)\upsilon\right\} - \\ &- P_1^{-1}(\varepsilon)\int_0^L\Big[\varepsilon\tilde{\xi}_1(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon)+\xi(x,\tau,\mu)-\xi(\bar{x},\tau,\mu) + \\ &+ \varepsilon\bar{\xi}_1(x,\tau,\mu,\varepsilon)-\varepsilon\bar{\xi}_1(\bar{x},\tau,\mu,\varepsilon)\Big]d\tau \equiv M_1(\upsilon,\psi,\varepsilon),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\psi = &-Q^{-1}\int_0^L\Big[M(\tau)(\varphi-\bar{\varphi}) + M(\tau)\bar{\varphi}(\tau,x^0+y,\varphi^0,\mu,\varepsilon) + \\ &+ \eta(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon)\Big]d\tau \equiv M_2(\upsilon,\psi,\varepsilon),\end{aligned} \tag{25}$$

де $x = x(\tau)$, $\varphi = \varphi(\tau)$, $\bar{x} = \bar{x}(\tau,x^0+y,\mu,\varepsilon)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau,x^0+y,\varphi^0+\psi,\mu,\varepsilon)$, $\tilde{\xi}_1 =$

$= \xi_1 - \bar{\xi}_1$, $\mu = \mu^0 + h$. Враховуючи, що $\|x - \bar{x}\| \le \sigma_2 \varepsilon^{1+\alpha}$, а інтеграл від $\dot{\bar{\xi}}_1$ по відрізку $[0, L]$ допускає оцінку вигляду (7), отримуємо нерівність

$$\|M_1(\upsilon, \psi, \varepsilon)\| \le \sigma_8 \varepsilon^{1+\alpha} + \sigma_9^{(1)} \varepsilon \|\upsilon\| + \sigma_9^{(2)} \|\upsilon\|^{1+l_1},$$

в якій сталі $\sigma_8$, $\sigma_9^{(1)}$ і $\sigma_9^{(2)}$ не залежать від $\varepsilon$. Звідси одержуємо, що $M_1$ відображає кулю $K_4 = \{\upsilon : \upsilon \in R^{n+s}, \|\upsilon\| \le 2\sigma_8 \varepsilon^{1+\alpha}\}$ в себе при $\psi \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і

$$\varepsilon_0 \le \min\left( (4\sigma_9^{(1)})^{-1}, \left[4\sigma_9^{(2)}(2\sigma_8)^{l_1}\right]^{-\frac{1}{l_1(1+\alpha)}} \right).$$

Встановимо властивість стиску відображення $M_1 : K_4 \to K_4$. Із (24) маємо

$$\frac{\partial M_1(\upsilon, \psi, \varepsilon)}{\partial \upsilon} = -P_1^{-1}(\varepsilon) \int_0^L \left( \frac{\partial(\xi + \varepsilon \xi_1)}{\partial x} \frac{\partial(x - \bar{x})}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial(\xi + \varepsilon \xi_1)}{\partial x} \frac{\partial(x - \bar{x})}{\partial \mu} + \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial \mu} + \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu} + \varepsilon \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} \right) d\tau -$$

$$- P_1^{-1}(\varepsilon) \varepsilon \int_0^L \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mu} \right) d\tau - P_1^{-1}(\varepsilon) \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} + \frac{\partial \xi}{\partial \mu} \right) d\tau - P_1(\varepsilon) \right]. \qquad (26)$$

Для оцінки першого доданка у правій частині рівності (26) скористаємося нерівностями (9), другого — оцінкою осциляційного інтеграла (7) і умовою (19), третього — нерівністю Гельдера в умовах (18) і означенням матриці $P_1(\varepsilon)$. У підсумку отримаємо

$$\left\| \frac{\partial M_1(\upsilon, \psi, \varepsilon)}{\partial \upsilon} \right\| \le \sigma_{10}(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{l_1}) \le \frac{1}{2}$$

для всіх $\upsilon \in K_4$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при досить малому $\varepsilon_0 > 0$. Тому існує єдиний розв'язок $\upsilon = \upsilon(\psi, \varepsilon) = (y(\psi, \varepsilon), h(\psi, \varepsilon)) \in K_4$ рівняння (24), який можна побудувати методом послідовних наближень:

$$\upsilon_0(\psi, \varepsilon) \equiv 0, \quad \upsilon_{j+1}(\psi, \varepsilon) = M_1(\upsilon_j(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon), \quad j \ge 0.$$

Диференціюючи останню рівність по $\psi$, дістаємо нерівність

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} \upsilon_{j+1}(\psi, \varepsilon) \right\| \le \sigma_{11}(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{l_1}) \left\| \frac{\partial}{\partial \psi} \upsilon_j(\psi, \varepsilon) \right\| + \sigma_{12} \varepsilon^{1+\alpha},$$

звідки випливає оцінка

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \psi} \upsilon_j(\psi, \varepsilon) \right\| \le \frac{\sigma_{12} \varepsilon^{1+\alpha}}{1 - \sigma_{11}(\varepsilon_0^\alpha + \varepsilon_0^{l_1})} \le 2\sigma_{12} \varepsilon^{1+\alpha}$$

для всіх $j \ge 0$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де $0 < \varepsilon_0$ — досить мале. Цього досить, щоб для граничної функції $\upsilon(\psi, \varepsilon) = \lim_{j \to \infty} \upsilon_j(\psi, \varepsilon)$ виконувалась умова Ліпшиця

$$\|\upsilon(\psi^{(1)}, \varepsilon) - \upsilon(\psi^{(2)}, \varepsilon)\| \le 2\sigma_{12} \varepsilon^{1+\alpha} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \qquad (27)$$

$\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)} \in R^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Підставимо далі $\upsilon = \upsilon(\psi, \varepsilon)$ у рівняння (25). Оскільки

$$\left\| \bar{\varphi}(\tau, x^0 + y, \varphi^0, \mu^0 + h, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \mu^0, \varepsilon) \right\| \le$$

$$\le \frac{\sigma_{13}^{(1)}}{\varepsilon} (\|y\| + \|h\|) \le 2\sigma_8 \sigma_{13}^{(1)} \varepsilon^\alpha$$

і справджується (27), то

$$\| M_2(\upsilon(\psi,\varepsilon),\psi,\varepsilon)\| \le \sigma_{13}\varepsilon^{\alpha},$$

$$\| M_2(\upsilon(\psi^{(1)},\varepsilon),\psi^{(1)},\varepsilon) - M_2(\upsilon(\psi^{(2)},\varepsilon),\psi^{(2)},\varepsilon)\| \le \sigma_{14}\varepsilon^{\alpha}\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|.$$

Тому при $\sigma_{14}\varepsilon_0^{\alpha} \le \dfrac{1}{2}$ існує єдиний розв'язок $\psi = \psi(\varepsilon)$ рівняння (25) і $\|\psi(\varepsilon)\| \le$ $\le \sigma_{13}\varepsilon^{\alpha}$. Отже, побудовано єдиний розв'язок (23) задачі (1), (16), (17) з $y =$ $= y(\psi(\varepsilon),\varepsilon)$, $h = h(\psi(\varepsilon),\varepsilon)$ і $\psi = \psi(\varepsilon)$, який задовольняє нерівності

$$\left\| x(\tau) - \bar{x}(\tau, x^0, \mu^0, \varepsilon)\right\| \le \sigma_2\varepsilon^{1+\alpha} + \left(\sup\left\|\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu}\right\|\right)\|\upsilon(\psi,\varepsilon)\| \le \sigma_{15}^{(1)}\varepsilon^{1+\alpha},$$

$$\left\|\varphi(\tau) - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \mu^0, \varepsilon)\right\| \le$$

$$\le \sigma_2\varepsilon^{\alpha} + \|\psi(\varepsilon)\| + \left(\sup\left\|\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mu}\right\|\right)\|\upsilon(\psi,\varepsilon)\| \le \sigma_{15}^{(2)}\varepsilon^{\alpha},$$

$$\|\mu - \mu^0\| = \|h(\psi(\varepsilon),\varepsilon)\| \le 2\sigma_8\varepsilon^{1+\alpha}.$$

Таким чином, доведено таку теорему.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови теореми* 1, *леми* 1, (18), (19) *і матриця* $Q$ *невироджена. Тоді при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *існує єдиний розв'язок* $(x(\tau), \varphi(\tau), \mu)$ *задачі* (1), (16), (17), *який задовольняє нерівності*

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| + \|\mu - \mu^0\| \le \sigma_{15}\varepsilon^{1+\alpha}, \quad \|\varphi(\tau) - \bar{\varphi}(\tau)\| \le \sigma_{15}\varepsilon^{1+\alpha},$$

$$\tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

***Зауваження* 1.** Теорема 3 залишається справедливою і тоді, коли нехтують умовою Гельдера у (18). При цьому досить скористатися тим, що із неперервності $\dfrac{\partial \xi(r,\tau)}{\partial r}$ на множині $D \times K_2 \times [0, L]$ випливає її рівномірна неперервність на замкненій підмножині $\overline{D}_{\rho} \times \overline{K}\left(\mu^*, \frac{1}{2}\rho_2\right) \times [0, L]$, але в такому разі ускладнюється доведення.

Розглянемо тепер крайові умови

$$\int_0^L [\xi(x,\tau,\mu) + \bar{\xi}(x,\varphi,\tau,\mu) + \varepsilon\xi_1(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon)]d\tau = 0, \quad \varphi|_{\tau=0} = \varphi^0, \tag{28}$$

в яких $\xi$, $\bar{\xi}$ і $\xi_1$ — $(n+s)$-вимірні неперервні по $x$, $\varphi$, $\tau$, $\mu$ обмежені сталою $\sigma_1$ вектори, $\varphi^0 \in R^m$, середнє по $\varphi$ функції $\bar{\xi}$ тотожно дорівнює нулю і

$$\xi \in C^1_{x,\mu}(D \times [0, L] \times K_2, \sigma_1), \quad \bar{\xi} \in C^1_{x,\tau}(X, \sigma_1),$$

$$\sum_{k\neq 0}\left[\sup\|\bar{\xi}_k\| + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup\left\|\frac{\partial \bar{\xi}_k}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial \bar{\xi}_k}{\partial \tau}\right\|\right)\right] \le \sigma_1 \tag{29}$$

($\bar{\xi}_k$ — коефіцієнти Фур'є функції $\bar{\xi}$).

У цьому випадку усереднена задача нульового наближення розпадається на дві задачі:

$$\frac{dz}{d\tau} = a(z, \tau, \mu), \quad \int_0^L \xi(z, \tau, \mu) d\tau = 0,$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\omega(z, \tau, \mu)}{\varepsilon}, \quad \theta|_{\tau=0} = \varphi^0.$$

Якщо перша з них має розв'язок $\left(z(\tau, \bar{x}^0, \bar{\mu}^0), \bar{\mu}^0\right)$, то розв'язок $\theta(\tau) = \theta(\tau, \bar{x}^0, \varphi^0, \bar{\mu}^0, \varepsilon)$ другої визначається інтегруванням.

**Теорема 4.** *Якщо виконуються умови теореми* 1, *леми* 1 *і* (29), *то при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($0 < \varepsilon_0$ — *досить мале*) *існує розв'язок* $(x(\tau), \varphi(\tau), \mu)$ *задачі* (1), (28), *який справджує нерівності*

$$\left\| x(\tau) - z(\tau, \bar{x}^0, \bar{\mu}^0) \right\| + \left\| \mu - \bar{\mu}^0 \right\| \leq \sigma_{16} \varepsilon^{\alpha},$$
$$\| \varphi(\tau) - \theta(\tau) \| \leq \sigma_{16} \varepsilon^{\alpha - 1} \quad \forall (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0] \tag{30}$$

*з деякою не залежною від* $\varepsilon$ *сталою* $\sigma_{16}$.

***Доведення.*** Невідомі параметри $\upsilon = (y, \mu) \in R^{n+s}$ розв'язку

$$(x(\tau), \varphi(\tau), \mu) = \left(x(\tau, \bar{x}^0 + y, \varphi^0, \bar{\mu}^0 + h, \varepsilon), \varphi(\tau, \bar{x}^0 + y, \varphi^0, \bar{\mu}^0 + h, \varepsilon), \bar{\mu}^0 + h\right) \tag{31}$$

крайової задачі (1), (28) визначаємо з рівняння

$$\upsilon = -P_0^{-1} \int_0^L [\xi(x, \tau, \mu) - \xi(z, \tau, \mu) + \bar{\xi}(x, \varphi, \tau, \mu) + \varepsilon \xi_1(x, \varphi, \tau, \mu, \varepsilon)] d\tau -$$
$$- P_0^{-1} \left[ \int_0^L \xi(z, \tau, \mu) d\tau - P_0 \upsilon \right] \equiv M_3(\upsilon, \varepsilon), \tag{32}$$

де $z = z(\tau, \bar{x}^0 + y, \mu)$, $x = x(\tau)$, $\varphi = \varphi(\tau)$, $\mu = \bar{\mu}^0 + h$. Враховуючи, що

$$\| x - z \| \leq \| x - \bar{x} \| + \| \bar{x} - z \| \leq \sigma_2 \varepsilon^{1 + \alpha} + \sigma_{16}^{(1)} \varepsilon,$$

і використовуючи оцінку (7), перший доданок у правій частині рівняння (32) оцінюємо зверху величиною $\sigma_{16}^{(2)} \varepsilon^{\alpha}$.

Оскільки $\dfrac{\partial \xi(r, \tau)}{\partial r}$, $r = (x, \mu)$, рівномірно неперервна на множині $\overline{D}_{\frac{1}{2}\rho_3} \times \overline{K}(\bar{\mu}^0, \frac{1}{2}\rho_4) \times [0, L] \equiv T$, то для довільного $\Delta_1 > 0$ існує таке $\Delta_2 > 0$, що для всіх $(r, \tau) \in T$, $(r + \bar{r}, \tau) \in T$, $\| \bar{r} \| < \Delta_2$, виконується нерівність

$$\left\| \frac{\partial \xi(r + \bar{r}, \tau)}{\partial r} - \frac{\partial \xi(r, \tau)}{\partial r} \right\| < \Delta_1.$$

На підставі зазначеного вище

$$\xi(r + \bar{r}, \tau) = \xi(r, \tau) + \frac{\partial \xi(r, \tau)}{\partial r} \bar{r} + N_1,$$
$$N_1 = \int_0^1 \left[ \frac{\partial \xi(r + \bar{r} t, \tau)}{\partial r} - \frac{\partial \xi(r, \tau)}{\partial r} \right] dt \bar{r}, \quad \| N_1 \| \leq \Delta_1 \| \bar{r} \| \tag{33}$$

при $\| \bar{r} \| < \Delta_2$. Аналогічно

$$z(\tau, \bar{x}^0 + y, \bar{\mu}^0 + h) = z^0 + \frac{\partial z^0}{\partial \bar{x}^0} y + \frac{\partial z^0}{\partial \bar{\mu}^0} h + N_2, \quad \| N_2 \| \leq \sigma_{16}^{(3)} \| \upsilon \|^2,$$

де $z^0 = z(\tau, \bar{x}^0, \bar{\mu}^0)$. Тому, використовуючи (33) для $r = (z^0, \bar{\mu}^0)$ і $\bar{r} = \left(\frac{\partial z^0}{\partial \bar{x}_0} y + \frac{\partial z^0}{\partial \bar{\mu}^0} h, h\right)$, другий доданок у правій частині рівняння (32) при $\sigma_{16}^{(4)} \|v\| < \Delta_2$ оцінюємо величиною $\sigma_{16}^{(4)} \|v\| \Delta_1 + \sigma_{16}^{(5)} \|v\|^2$, де

$$\sigma_{16}^{(4)} = L\left(\sup\left\|\frac{\partial z^0}{\partial \bar{x}^0}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial z^0}{\partial \bar{\mu}^0}\right\| + 1\right), \qquad \sigma_{16}^{(5)} = L\sigma_1\sigma_{16}^{(3)}.$$

Отже,

$$\| M_3(v, \varepsilon) \| \le \sigma_{16}^{(2)} \varepsilon^{\alpha} + \sigma_{16}^{(4)} \Delta_1 \|v\| + \sigma_{16}^{(5)} \|v\|^2.$$

Покладемо $\Delta_1 = \left(4\sigma_{16}^{(4)}\right)^{-1}$ і по ньому виберемо $\Delta_2$. Тоді при

$$\varepsilon_0 \le \left[\sigma_{17} \max\left(4\sigma_{16}^{(5)}, \frac{1}{\Delta_2}\sigma_{16}^{(4)}, \frac{2}{\rho_3} e^{\sigma_1 L}(n + \sigma_1 L), \frac{2}{\rho_4}\right)\right]^{-l-1},$$

де $\sigma_{17} = 2\sigma_{16}^{(2)}$, для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $M_3$ відображає кулю $K_5 = \{v: v \in R^{n+s}, \|v\| \le \sigma_{17}\varepsilon^{\alpha}\}$ в себе і є неперервним по $v$. На підставі теореми Брауера [9] існує розв'язок $v = v(\varepsilon) = (y(\varepsilon), h(\varepsilon)) \in K_5$ рівняння (32), який породжує розв'язок (31) задачі (1), (28) і гарантує оцінку вигляду (30). Теорему доведено.

***Зауваження 2.*** При зроблених припущеннях не вдається встановити властивість стиску відображення $M_3 : K_5 \to K_5$, тому теорема 4 встановлює лише існування розв'язку вихідної крайової задачі, але не його єдиність.

Нарешті, розглянемо випадок, коли $a$ і $\omega$ не залежать від $\mu$, тобто $a = a(x, \tau)$, $\omega = \omega(x, \tau)$, і задамо для (1) крайові умови (17) та умови

$$x|_{\tau=0} = x^0, \qquad \int_0^L [\beta(x,\tau,\mu) + \bar{\beta}(x,\varphi,\tau,\mu) + \varepsilon\beta_1(x,\varphi,\tau,\mu,\varepsilon)]d\tau = 0, \tag{34}$$

де $\beta$, $\bar{\beta}$ і $\beta_1$ — $s$-вимірні $2\pi$-періодичні по $\varphi_\nu$, $\nu = \overline{1, m}$, вектори, обмежені сталою $\sigma_1$, середнє по $\varphi$ функції $\bar{\beta}$ тотожно дорівнює нулю.

Нехай:

1) $(\beta, \bar{\beta}, \beta_1, \eta) \in C^1_{x,\varphi,\tau,\mu}(X, \sigma_1)$, $\quad \dfrac{\partial \bar{\beta}}{\partial \mu} \in C^1_{x,\tau}(X, \sigma_1)$,

$$\sum_{k \ne 0}\left[\|k\| \sup \|\bar{\beta}_k\| + \sup\left\|\frac{\partial \bar{\beta}_k}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial \bar{\beta}_k}{\partial \mu}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial \beta_k}{\partial \tau}\right\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|k\|}\left(\sup\left\|\frac{\partial^2 \bar{\beta}_k}{\partial \tau \partial \mu}\right\| + \sum_{\nu=1}^{n} \sup\left\|\frac{\partial^2 \beta_k}{\partial x_\nu \partial \mu}\right\|\right)\right] \le \sigma_1,$$

$$\sum_{k \ne 0}\left[\|k\| \sup \|\eta_k\| + \sup\left\|\frac{\partial \eta_k}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial \eta_k}{\partial \tau}\right\|\right] \le \sigma_1,$$

$\bar{\beta}_k$ — коефіцієнти Фур'є функції $\bar{\beta}$, а супремум береться по $(x, \tau, \mu, \varepsilon) \in X_1$;

2) $z(\tau, x^0) \in D$ $\forall \tau \in [0, L]$, де $z = z(\tau, x^0)$ — розв'язок задачі Коші

$$\frac{dz}{d\tau} = a(z, \tau), \qquad z|_{\tau=0} = x^0;$$

3) $M(\tau)$ неперервна на $[0, L]$ і $\det Q \ne 0$;

4) існує єдиний розв'язок $\mu = \bar{\mu}^0 \in K_2$ рівняння

$$\int_0^L \beta\big(z(\tau, x^0), \tau, \mu\big) d\tau = 0,$$

причому

$$\det \int_0^L \frac{\partial \beta\big(z(\tau, x^0), \tau, \bar{\mu}^0\big)}{\partial \bar{\mu}^0} d\tau \neq 0.$$

При цих обмеженнях існує єдиний розв'язок $(\bar{x}(\tau), \bar{\varphi}(\tau), \mu^0) \equiv \big(\bar{x}(\tau, x^0, \mu^0, \varepsilon),$ $\bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \mu^0, \varepsilon), \mu^0\big)$ усередненої задачі

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{\tau}} = a(\bar{x}, \tau) + \varepsilon c(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon), \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{\tau}} = \frac{\omega(\bar{x}, \tau)}{\varepsilon} + b(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon),$$

$$x\big|_{\tau=0} = x^0, \quad \int_0^L \big[\beta(\bar{x}, \tau, \mu) + \varepsilon \bar{\beta}_1(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon)\big] d\tau = 0,$$

$$\int_0^L [M(\tau)\bar{\varphi} + \bar{\eta}(\bar{x}, \tau, \mu, \varepsilon)] d\tau = 0,$$

для якого

$$\|\bar{x}(\tau) - z(\tau, x^0)\| + \|\mu^0 - \bar{\mu}^0\| \leq \sigma_{18}\varepsilon$$

і $\bar{x}(\tau) \in D_{\rho_5}$, $\mu^0 \in K(\bar{\mu}^0, \rho_6) \subset K_2$ для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ з деякими не залежними від $\varepsilon$ сталими $\rho_5 > 0$ і $\rho_6 > 0$.

За допомогою розробленої вище методики встановлюємо наступне твердження.

**Теорема 5.** *Нехай виконуються умови теореми* 2 *і умови* 1 – 4. *Тоді існують такі сталі* $\varepsilon_1 > 0$ *і* $\sigma_{19} > 0$, *що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, *задача* (1), (17), (34) *має єдиний розв'язок* $(x(\tau), \varphi(\tau), \mu)$, *для якого*

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \leq \sigma_{18}\varepsilon^{1+\alpha}, \quad \|\mu^0 - \bar{\mu}^0\| + \|\varphi(\tau) - \bar{\varphi}(\tau)\| \leq \sigma_{18}\varepsilon^{\alpha},$$

$$\tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$


1. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O.* Impulsive differential equations. – Singapore etc.: World Sci., 1995. – 462 p.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 750–762.
3. *Астафьева М. Н.* Усреднение многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 103 с.
4. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 101–117.
5. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкової задачі з параметрами для коливної системи з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 419–423.
6. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 340 с.
7. *Петришин Р. І., Сопронюк Т. М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1101–1108.
8. *Петришин Р. І., Петришин Я. Р.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. – 1998. – № 1. – С. 51–65.
9. *Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.


Одержано 28.01.2002