УДК 517.95

С. П. Лавренюк (Краків. політехніка, Польща), **Н. П. Процах** (Львів. нац. ун-т)

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

We investigate a mixed problem for certain nonlinear ultraparabolic equation in the domain Q unbounded in space variables. This equation degenerates on a part of lateral area on which boundary conditions are given. We obtain some conditions for the existence and uniqueness of solution of the mixed problem for ultraparabolic equation. These conditions do not depend on the behavior of solution at the infinity. We investigate the problem in the Lebesgue generalized spaces.

Досліджено мішану задачу для одного нелінійного ультрапараболічного рівняння в необмеженій за просторовими змінними області Q. Це рівняння вироджується на частині бічної поверхні, на якій задано крайові умови. Одержано деякі умови, за яких існує і єдиний розв'язок мішаної задачі для ультрапараболічного рівняння незалежно від його поведінки на нескінченності. Задачу досліджено в узагальнених просторах Лебега.

Уперше рівняння вигляду $u_t - u_{xx} + xu_y = f(t, x, y)$ ввів А. Н. Колмогоров [1] для опису неізотропних процесів. Таке рівняння та деякі його узагальнення виникають при дослідженні марковських дифузійних процесів, розсіюванні електронів, в кінетичній теорії, біології, теорії ймовірності та інших областях науки.

Задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь, які узагальнюють рівняння дифузії з інерцією А. Н. Колмогорова, досліджувались у працях [2–8]. Так, у праці [2] одержано умови розв'язності задачі Коші у спеціальних вагових просторах Гельдера з використанням властивості фундаментального розв'язку такої задачі, а у працях [3–7] досліджено певні властивості фундаментального розв'язку та доведено теореми єдиності в класах функцій з обмеженим зростанням та в класі невід'ємних функцій [4]. Властивості фундаментальних розв'язків таких рівнянь мають багато однакових властивостей з рівняннями, параболічними за Петровським [7].

Дослідженню мішаних задач для ультрапараболічних рівнянь присвячено праці [9–16]. У працях [9–12] отримано існування єдиного розв'язку першої крайової задачі, що має похідні за просторовими змінними з простору Гельдера [10–12], а також за допомогою інтегральних зображень і властивостей операторів Абеля досліджено першу крайову задачу для рівняння, в якому $L = \operatorname{sgn} x\, \partial^2/\partial x^2$ в області, що містить гіперплощину $x = 0$. При цьому доведено, що лише гладкість початкових даних не забезпечує належність розв'язку до просторів Гельдера [11].

У цій праці в необмеженій за просторовими змінними області Q досліджено мішану задачу для одного нелінійного ультрапараболічного рівняння. Це рівняння вироджується на частині бічної поверхні, на якій задано крайові умови. Подібність частини цього рівняння до рівнянь гіперболічного та параболічного типів дозволила використати при його дослідженні відомі методи. Одержано деякі умови, за яких існує і єдиний розв'язок мішаної задачі для ультрапараболічного рівняння незалежно від його поведінки на нескінченності. Задачу досліджено в узагальнених просторах Лебега [17].

1. Формулювання задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — необмежена область з межею Γ:

$$\hat{\Omega} = \Omega \times (0, y_0), \quad Q = \hat{\Omega} \times (0, T), \quad 0 < T < +\infty;$$

$$Q_{t_1 t_2} = \hat{\Omega} \times (t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \in [0, T], \quad t_1 < t_2, \quad Q_\tau = Q_{0\tau};$$

$$\hat{\Omega}_\tau = Q \cap \{t = \tau\}; \quad p \in L^\infty(\Omega); \quad S = \partial\hat{\Omega} \times (0, T),$$

© С. П. ЛАВРЕНЮК, Н. П. ПРОЦАХ, 2002

$$2 < p_1 = \operatorname{ess}\inf_{\Omega} p(x) \le \operatorname{ess}\sup_{\Omega} p(x) = p_2;$$

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

Нехай область Ω задовольняє такі умови:

1) $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbf{N}} \Omega^m$, причому $\Omega^m = \Omega \cap B_m$, де B_m — n-вимірна куля з центром у початку координат простору $\mathbb{R}^n$ і радіусом m; $\hat{\Omega}^m = \Omega^m \times (0, y_0)$, $Q^m = \hat{\Omega}^m \times (0, T)$;

2) $\partial\Omega^m = \Gamma_1^m \cup \Gamma_2^m$, де Γ_1^m, Γ_2^m — гладкі поверхні; $\operatorname{mes}\{\Gamma_1^m \cap \Gamma_2^m\} = 0$, $\Gamma_1^m \ne \varnothing$, $\Gamma_1^m \cap \Gamma \ne \varnothing$ $\forall m \in \mathbf{N}$; $\Gamma = \bigcup_{m\in\mathbf{N}} \Gamma_1^m$.

Розглянемо простір $L^{p(x)}(\hat{\Omega})$ [17] з нормою

$$\| v; L^{p(x)}(\hat{\Omega}) \| = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} |v|^{p(x)}/\lambda^{p(x)}\, dx < 1 \right\}.$$

В області Q розглянемо мішану задачу

$$u_t - \lambda(y,t)u_y - \sum_{i,l=1}^{n} (a_{il}(x,y,t)u_{x_i})_{x_l} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+ c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t), \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma\times(0,y_0)\times(0,T)} = 0, \qquad u(x,y_0,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y). \tag{3}$$

Введемо простір $V^{1,0,0}(Q^m)$ як замикання множини функцій $C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\hat{\Omega}^m))$ за нормою $\|u_x\|_{L^2(Q^m)} + \|u\|_{L^{p(x)}(Q^m)}$, а також простір $V_{\mathrm{loc}}^{1,0,0}(\overline{Q})$ всіх функцій, які належать до $V^{1,0,0}(Q^m)$ для кожного $m \in \mathbf{N}$. Через $L_{\mathrm{loc}}^r(\overline{\Omega})$ позначатимемо простір функцій, які належать до простору $L^r(\Omega^m)$, $1 \le r \le +\infty$, для всіх $m \in \mathbf{N}$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

A) $a_{il}, a_{il,x_k} \in L^\infty(Q)$, $(x,y,t) \in Q$, $i,l,k = 1,\ldots,n$,

$$a_0|\xi|^2 \le \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)\xi_i\xi_l \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ a_0 = \mathrm{const} > 0;$$

B) $b_i \in L^\infty(Q)$, $i = \overline{1,n}$;

C) $c \in L^\infty(Q)$;

G) $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$, неперервна по ξ майже для всіх $(x,y,t) \in Q$;

$$(g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta))(\xi - \eta) \ge g_0|\xi - \eta|^{p(x)},$$

$$|g(x,y,t,\xi)| \le g^0|\xi|^{p(x)-1}$$

для майже всіх $(x,y,t) \in Q$ і всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$; $g_0 = \mathrm{const} > 0$, $g^0 = \mathrm{const} > 0$;

F) $f \in L_{\mathrm{loc}}^{p'(x)}(\overline{Q})$, $u_0 \in L_{\mathrm{loc}}^2(\overline{\hat{\Omega}}_0)$, $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$;

L) $(y_0 - y)^{-1}\lambda$, $\lambda_y \in C([0,T] \times [0,y_0])$, $\lambda(y,t) > 0$ $\forall (y,t) \in [0,y_0) \times [0,T]$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі* (1) – (3) *назвемо функцію* $u \in V^{1,0,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_Q \left[-uv_t + \lambda(y,t)uv_y + \lambda_y(y,t)uv + \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_l} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i}v + c(x,y,t)uv + g(x,y,t,u)v \right] dx\,dy\,dt =$$

$$= \int\limits_Q f(x,y,t)v\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{\Omega_0} u_0 v\,dx\,dy \tag{4}$$

для довільної функції $v \in C^1([0,T];\ C_0^\infty(\hat{\Omega}))$, $v(x,y,T) = 0$.

2. Єдиність розв'язку.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* A), B), C), G), L), $2 < p_2 < 2n/(n-2)$, *якщо* $n > 1$, *і* $p_1 > 2$, *якщо* $n = 1$. *Тоді задача* (1) – (3) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що u_1 і u_2 — два розв'язки задачі (1) – (3). Тоді функція $u = u_1 - u_2$ задовольняє рівність

$$\int\limits_Q \left[-uv_t + \lambda(y,t)uv_y + \lambda_y(y,t)uv + \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_l} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i}v + c(x,y,t)uv +$$

$$\left. + (g(x,y,t,u_1) - g(x,y,t,u_2))v \right] dx\,dy\,dt = 0 \tag{5}$$

для довільної функції $v \in H^1(Q) \cap L^{p(x)}(Q)$ такої, що

$$v(x,y,T) = 0, \qquad v(x,y,t)\big|_S = 0,$$

supp v обмежений.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{gathered} -\mu\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial t} - \lambda(y,t)\frac{\partial u_\mu}{\partial y}\right) + u_\mu = u(x,y,t), \\ u_\mu(x,y,T) = 0, \quad u_\mu(x,0,t) = 0, \quad \mu > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Зауважимо, що $u_\mu(x,y,t) \to u(x,y,t)$ слабко у просторі $V^{1,0,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Виберемо $v = u_\mu(y_0 - y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}$, де $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\beta > 0$, $\alpha \geq 1$. Тоді

$$v_t = (u_{\mu t} - \nu u_\mu)(y_0 - y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t},$$

$$v_y = (u_{\mu y}(y_0 - y) - \alpha u_\mu)(y_0 - y)^{\alpha - 1}\psi^\beta(x) e^{-\nu t}$$

і рівність (5) запишеться у вигляді

$$\int\limits_Q \left[\left[\left[\left(-u_{\mu t} + \nu u_\mu + \frac{\lambda(y,t)}{y_0 - y}(u_{\mu y}(y_0 - y) - \alpha u_\mu)\right) \times \right.\right.\right.$$

$$\times\ (-\mu(u_{\mu t} - \lambda(y,t)u_{\mu y}) + u_\mu) + \lambda_y(y,t)uu_\mu +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i}u_\mu + c(x,y,t)uu_\mu + (g(x,y,t,u_1) - g(x,y,t,u_2))u_\mu\Big]\psi^\beta(x) +$$

$$+ \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u_{x_i}(u_\mu\psi^\beta(x))_{x_l}\Big](y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt = 0. \qquad (7)$$

Перетворимо доданки цієї рівності:

$$\tau_1 = \int_Q \mu(u_{\mu t} - \lambda u_{\mu y})^2 (y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \ge 0.$$

$$\tau_2 = \int_Q \left(-1 - \mu\nu + \frac{\mu\alpha\lambda}{y_0-y}\right)(y_0-y)^\alpha u_\mu u_{\mu t}\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left(1 + \mu\nu - \frac{\mu\alpha\lambda}{y_0-y}\right)(y_0-y)^\alpha u_\mu^2\psi^\beta(x)\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_Q\left(-\nu - \mu\nu^2 + \frac{\nu\mu\alpha\lambda}{y_0-y} - \frac{\mu\alpha\lambda_t}{y_0-y}\right)(y_0-y)^\alpha u_\mu^2\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_3 = \int_Q\left(\lambda + \lambda\mu\nu - \frac{\mu\alpha\lambda^2}{y_0-y}\right)(y_0-y)^\alpha u_\mu u_{\mu y}\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_Q\left(\lambda_y + \lambda_y\mu\nu - \frac{2\lambda\lambda_y\mu\alpha}{y_0-y} - \frac{\mu\alpha\lambda^2}{(y_0-y)^2} - \frac{\lambda\alpha}{y_0-y} - \frac{\mu\nu\alpha\lambda}{y_0-y} + \frac{\mu\alpha^2\lambda^2}{(y_0-y)^2}\right) \times$$

$$\times (y_0-y)^\alpha u_\mu^2\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_4 = \int_Q\left(\nu - \frac{\alpha\lambda}{y_0-y}\right)(y_0-y)^\alpha u_\mu^2\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt.$$

Враховуючи перетворені інтеграли $\tau_1, \ldots, \tau_4$, з рівності (7) одержуємо нерівність (покладаємо $1 + \mu\nu + \mu\alpha(y_0-y)^{-1}\lambda(y,t) \ge 0$)

$$\int_Q\left(\nu - \mu\nu^2 + \frac{\nu\mu\alpha\lambda}{y_0-y} - \frac{\mu\alpha\lambda_t}{y_0-y} - \lambda_y - \lambda_y\mu\nu + \frac{2\lambda\lambda_y\mu\alpha}{y_0-y} + \frac{\mu\alpha\lambda^2}{(y_0-y)^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{\lambda\alpha}{y_0-y} + \frac{\mu\nu\alpha\lambda}{y_0-y} - \frac{\mu\alpha^2\lambda^2}{(y_0-y)^2}\right)(y_0-y)^\alpha u_\mu^2\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+ 2\int_Q\left[\left(\lambda_y uu_\mu + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i}u_\mu + c(x,y,t)uu_\mu + (g(x,y,t,u_1) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - g(x,y,t,u_2))u_\mu\right)\psi^\beta(x) + \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u_{x_i}(u_\mu\psi^\beta(x))_{x_l}\right] \times$$

$$\times (y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \le 0.$$

Перейдемо у цій нерівності до границі при $\mu \to 0$:

$$\int_Q\left(\nu - \lambda_y - \frac{\lambda\alpha}{y_0-y}\right)(y_0-y)^\alpha u^2\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+ \ 2\int_Q \Bigg[\Bigg(\lambda_y u^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x,y,t)u_{x_i}u + c(x,y,t)u^2 + (g(x,y,t,u_1) -$$

$$- \ g(x,y,t,u_2))u\Bigg)\psi^\beta(x) + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x,y,t)u_{x_i}(u\psi^\beta(x))_{x_l}\Bigg] \times$$

$$\times \ (y_0 - y)^\alpha e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \le 0.$$

Виберемо ν з умови

$$\nu \ge \sup_{(0,y_0)\times(0,T)} \left[\lambda_y(y,t) + \lambda(y,t)\alpha(y_0 - y)^{-1}\right].$$

Оцінимо інші доданки в (8):

$$\tau_5 = 2\int_Q \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x,y,t)u_{x_i}(u(y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x))_{x_l} e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \ge$$

$$\ge 2a_0 \int_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \psi^\beta(x)(y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt + \tau_5^1,$$

$$\tau_5^1 = -A\beta \int_Q \sum_{i,l=1}^n \left[\psi^{\beta-1}\psi_{x_l} + (\beta-1)\psi^{\beta-2}\psi_{x_i}\psi_{x_l} + \psi^{\beta-1}\psi_{x_l x_i}\right] \times$$

$$\times \ u^2 (y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \ge$$

$$\ge -\frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1} \int_Q |u|^{p(x)} \psi^\beta(x)(y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt - A\beta\Psi_1 \delta^{-\frac{2}{p_1-2}},$$

$$\tau_6 = 2\int_Q \sum_{i=1}^n b_i(x,y,t)u_{x_i}u(y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \le$$

$$\le \int_Q \sum_{i=1}^n \left[\delta u_{x_i}^2 + \frac{(b^0)^2 u^2}{\delta}\right](y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt,$$

$$\tau_7 = 2\int_Q c(x,y,t)u^2 (y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \ge$$

$$\ge 2c_0 \int_Q u^2 (y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt,$$

$$\tau_8 = 2\int_Q (g(x,y,t,u_1) - g(x,y,t,u_2))u(y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \ge$$

$$\ge 2g_0 \int_Q |u|^{p(x)} (y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt.$$

На підставі оцінок інтегралів $\tau_5, \ldots, \tau_8$ з (8) одержимо оцінку

$$\int_Q \Bigg[\left(2c_0 - \frac{(b^0)^2 n}{\delta} + \nu + \lambda_y - \frac{\lambda\alpha}{y_0 - y}\right)u^2 + (2a_0 - \delta)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 +$$

$$+ \left(2g_0 - \frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1}\right)|u|^{p(x)}\Bigg](y_0-y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \le A\beta\Psi_1 \delta^{-\frac{2}{p_1-2}}$$

Виберемо ν та δ з умов

$$2c_0 - \frac{(b^0)^2 n}{\delta} + \nu + \lambda_y - \frac{\lambda\alpha}{y_0 - y} \geq 0,$$

$$2a_0 - \delta > 0, \quad 2g_0 - \frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1} > 0,$$

де

$$A = \max_{i,l}\{\sup_Q a_{il}(x,y,t),\ \sup_Q a_{ilx_i}(x,y,t)\}.$$

Виберемо

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{R}, & 0 \leq |x| \leq R; \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Тоді $\psi_{x_i}(x) = -2x_i / R$, $0 \leq |x| \leq R$, $\psi_{x_i x_l}(x) = -2\delta_{il} / R$, $0 \leq |x| \leq R$, де δ_{ij} — символ Кронекера. Зауважимо, що $|\psi| \leq 2R$, $|\psi_{x_i}| \leq 2$, $|\psi_{x_i x_l}| \leq 2/R$. Тоді (при $R \geq 1$)

$$\Psi_1 = \int_{Q^R} \sum_{i,l=1}^n \left[\psi^{\beta-1}\psi_{x_l} + (\beta-1)\psi^{\beta-2}\psi_{x_l}\psi_{x_i} + \psi^{\beta-1}\psi_{x_l x_i}\right]^{\frac{p(x)}{p(x)-2}} \psi^{-\frac{2\beta}{p(x)-2}} \times$$

$$\times (y_0 - y)^\alpha e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \leq T y_0^\alpha \sum_{i,l=1}^n \int_{B_R} (2R)^{\beta - \frac{2p_2}{p_2-2}} (4R + 4\beta)^{\frac{p_2}{p_2-2}}\, dx =$$

$$= T y_0^\alpha 2^\beta n^2 R^{\beta - \frac{2p_2}{p_2-2} + n} P_n (R+\beta)^{\frac{p_2}{p_2-2}},$$

де $R \in \mathbf{N}$ і P_n — коефіцієнт в рівності

$$\int_{B_R} dx = P_n R^n = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} R^{2k}, & n = 2k; \\ \dfrac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!} R^{2k+1}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Далі, одержимо нерівність

$$\int_{Q^{R_0}} \left[\left(2c_0 - \frac{(b^0)^2 n}{\delta} + \nu + \lambda_y - \frac{\lambda\alpha}{y_0 - y}\right) u^2 + (2a_0 - \delta)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \right.$$

$$\left. + \left(2g_0 - \frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1}\right)|u|^{p(x)}\right](y_0 - y)^\alpha (R - R_0)^\beta e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \leq$$

$$\leq \int_{Q^R} \left[\left(2c_0 - \frac{(b^0)^2 n}{\delta} + \nu + \lambda_y - \frac{\lambda\alpha}{y_0 - y}\right) u^2 + (2a_0 - \delta)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \right.$$

$$\left. + \left(2g_0 - \frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1}\right)|u|^{p(x)}\right](y_0 - y)^\alpha \left(\frac{R^2 - |x|^2}{R}\right)^\beta e^{-\nu t}\, dx\, dy\, dt \leq$$

$$\leq A\beta T y_0^\alpha 2^\beta n^2 R^{\beta - \frac{2p_2}{p_2-2} + n} P_n (R+\beta)^{\frac{p_2}{p_2-2}} \delta^{-\frac{2}{p_1-2}},$$

де

$$M = \inf\left\{\inf_Q\left(2c_0 - \frac{(b^0)^2 n}{\delta} + \nu + \lambda_y(y,t) - \lambda(y,t) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\ \alpha(y_0 - y)^{-1}\right), 2a_0 - \delta, 2g_0 - \frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1}\right\}.$$

Звідси

$$\int\limits_{Q^{R_0}}\left[u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + |u|^{p(x)}\right](y_0 - y)^\alpha\, dx\,dy\,dt \leq$$

$$\leq MA\beta\delta^{-\frac{2}{p_1-2}} T y_0^\alpha 2^\beta n^2 \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^\beta R^{-\frac{2p_2}{p_2-2}+n} P_n(R+\beta)^{\frac{p_2}{p_2-2}}.$$

Виберемо $R > \beta$. Тоді

$$\int\limits_{Q^{R_0}}\left[u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + |u|^{p(x)}\right](y_0 - y)^\alpha\, dx\,dy\,dt \leq$$

$$\leq 2^{\beta+\frac{p_2}{p_2-2}} n^2 R^{-\frac{p_2}{p_2-2}+n} P_n \delta^{\frac{-2}{p_1-2}} M_1,$$

де $M_1 = MTA\beta\, y_0^\alpha e^{\nu T}$. Для достатньо великих R права частина є як завгодно малою при $n < p_2/(p_2 - 2)$. Тому $u = 0$ майже скрізь в Q^{R_0}. Оскільки R_0 — довільне, то це завершує доведення теореми.

3. Існування розв'язку.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* A) — L), *то існує узагальнений розв'язок задачі* (1) – (3).

Доведення. Нехай Ω^* — довільна обмежена підобласть області Ω, Γ^* — її межа, $\hat\Omega^* = \Omega^* \times (0, y_0)$, $Q_\tau^* = \hat\Omega^* \times (0, \tau)$, $Q_T^* = Q^*$, $\hat\Omega_\tau = Q^* \cap \{t = \tau\}$. Розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з умовами

$$u|_{\Gamma^*\times(0,y_0)\times(0,T)} = 0, \quad u(x, y_0, t) = 0, \quad u(x,y,0) = u_0^*(x,y).$$

Нехай $\{\varphi^{*,k}(x)\}$ — база простору $H_0^1(\Omega^*) \cap L^{p(x)}(\Omega^*)$,

$$\varphi^{*,k,s}(x,y) = \varphi^{*,k}(x)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y,$$

$$u^{*,j}(x,y,t) = \sum_{k,s=1}^{j} c_{ks}^j(t)\varphi^{*,k,s}(x,y), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

де $c_{ks}^j(t)$ є розв'язками задачі

$$\int\limits_{\hat\Omega_\tau^*}\left[u_t^{*,j}\varphi^{*,k,s} - \lambda(y,t)u_y^{*,j}\varphi^{*,k,s} + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x,y,t)u_{x_i}^{*,j}\varphi_{x_l}^{*,k,s} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,y,t)u_{x_i}^{*,j}\varphi^{*,k,s} + c(x,y,t)u^{*,j}\varphi^{*,k,s} +$$

$$\left. + g(x,y,t,u^{*,j})\varphi^{*,k,s}\right] dx\,dy\,dt = \int\limits_{\hat\Omega_\tau^*} f(x,y,t)\varphi^{*,k,s}\, dx\,dy\,dt. \tag{10}$$

$$c_{ks}^{j}(0) = u_{0,k,s}^{*,j}, \tag{11}$$

$$u_0^{*,j} = \sum_{k,s=1}^{n} u_{0,k,s}^{*,j}\varphi^{*,k,s}(x,y), \qquad \lim_{j\to+\infty}\left\|u_0^{*,j} - u_0^{*}\right\|_{L^2(\Omega^*)} = 0.$$

За теоремою Каратеодорі [18, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (10), (11). Домножимо (10) на $c_{ks}^{j}(t)$, підсумуємо по s і k, проінтегруємо по t на проміжку $[0,\tau]$ і оцінимо кожний доданок отриманої рівності:

$$\tau_9 = \int_{Q_\tau^*} u_t^{*,j}u^{*,j}\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau^*}(u^{*,j})^2\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0^*}(u_0^{*,j})^2\,dx\,dy,$$

$$\tau_{10} = -\int_{Q_\tau^*}\lambda(y,t)u_y^{*,j}u^{*,j}\,dx\,dy\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\Omega^*}\lambda(0,t)(u^{*,j}(x,0,t))^2\,dx\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{Q_\tau^*}\lambda_y(y,t)(u^{*,j})^2\,dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_{11} = \int_{Q_\tau^*}\sum_{i,l=1}^{n}a_{il}(x,y,t)u_{x_i}^{*,j}u_{x_l}^{*,j}\,dx\,dy\,dt \ge a_0\int_{Q_\tau^*}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{*,j})^2\,dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_{12} = \int_{Q_\tau^*}\sum_{i=1}^{n}b_i(x,y,t)u_{x_i}^{*,j}u^{*,j}\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau^*}\left[\sum_{i=1}^{n}\delta(b^0)^2(u_{x_i}^{*,j})^2 + \frac{n}{\delta}(u^{*,j})^2\right]dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_{13} = \int_{Q_\tau^*}c(x,y,t)u^{*,j}u^{*,j}\,dx\,dy\,dt \le c^0\int_{Q_\tau^*}(u^{*,j})^2\,dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_{14} = \int_{Q_\tau^*}g(x,y,t,u^{*,j})u^{*,j}\,dx\,dy\,dt \ge g_0\int_{Q_\tau^*}\left|u^{*,j}\right|^{p(x)}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_{15} = \int_{Q_\tau^*}f(x,y,t)u^{*,j}\,dx\,dy\,dt \le \int_{Q_\tau^*}\left[\frac{|f(x,y,t)|^{p'(x)}}{p'(x)\delta} + \frac{\delta\left|u^{*,j}\right|^{p(x)}}{p(x)}\right]dx\,dy\,dt,$$

де $c(x,y,t) \le c^0 = \mathrm{const}$, $|b_i(x,y,t)| \le b^0 = \mathrm{const}$ $\forall i = \overline{1,n}$.

Звідси маємо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau^*}(u^{*,j})^2\,dx\,dy + \int_0^\tau\int_{\Omega}\lambda(0,t)(u^{*,j})^2\,dx\,dt + (2a_0 - (b^0)^2\delta)\times$$

$$\times\int_{Q_\tau^*}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{*,j})^2\,dx\,dy\,dt + \left(2g_0 - \frac{2\delta}{p_1}\right)\int_{Q_\tau^*}\left|u^{*,j}\right|^{p(x)}\,dx\,dt \le$$

$$\le \int_{Q_\tau^*}\left[\left(-\lambda_y + \frac{n}{\delta} + 2c^0\right)\left|u^{*,j}\right|^2 + \frac{2|f|^{p'(x)}}{\delta p'(x)}\right]dx\,dy\,dt + \int_{\Omega_0^*}(u_0^{*,j})^2\,dx\,dy.$$

Вибравши δ з умов $2a_0 - (b^0)^2\delta > 0$, $g_0 \geq \delta p_1^{-1}$ та застосувавши лему Гронуолла – Беллмана, одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau^*} (u^{*,j})^2\,dx\,dy + \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega^*} \lambda(0,t)(u^{*,j})^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau^*} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{*,j})^2\,dx\,dy\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^*} \left|u^{*,j}\right|^{p(x)} dx\,dy\,dt \leq M_2 \left(\int\limits_{Q^*} |f|^{p'(x)}\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{\Omega_0^*} \left|u_0^*\right|^2 dx\,dy \right), \tag{12}$$

в якій стала M_2 не залежить від j.

З цієї оцінки випливають такі збіжності деякої підпослідовності $\{u^{*,j_k}\}$ послідовності $\{u^{*,j}\}$:

$$\begin{gathered} u^{*,j_k} \to u^* \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T,L^2(\hat\Omega^*)), \\ u_{x_i}^{*,j_k} \to u_{x_i}^* \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T,L^2(\hat\Omega^*)), \\ u^{*,j_k} \to u^* \quad \text{слабко в} \quad L^{p(x)}(Q^*), \\ \sqrt{\lambda(0,\cdot)}\,u^{*,j_k}(\cdot,0,\cdot) \to \xi_1 \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T)\times\Omega^*), \\ u^{*,j_k}(\cdot,\cdot,T) \to \sigma \quad \text{слабко в} \quad L^2(\hat\Omega^*). \end{gathered} \tag{13}$$

З умови G) та збіжностей (13) випливає

$$\int\limits_{Q^*} (g(x,y,t,u^{*,j}))^{p(x)}\,dx\,dy\,dt \leq M_3 \left(\int\limits_{Q^*} |f|^{p'(x)}\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{\Omega_0^*} \left|u_0^*\right|^{p'(x)} dx\,dy \right),$$

де стала M_3 не залежить від j. Звідси

$$g(x,y,t,u^{*,j}) \to \chi \quad \text{слабко в} \quad L^{p'(x)}(Q^*). \tag{14}$$

Використовуючи (10) та збіжності (13), (14), легко одержуємо рівність

$$\int\limits_{Q^*} \Bigg[-u^* v_t + \lambda_y(y,t) u^* v + \lambda(y,t) u^* v_y + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x,y,t) u_{x_i}^* v_{x_l} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,y,t) u_{x_i}^* v + c(x,y,t) u^* v + \chi v \Bigg] dx\,dy\,dt + \int\limits_{\Omega_T^*} \sigma v\,dx\,dy -$$

$$- \int\limits_{\Omega_0^*} u_0^* v\,dx\,dy + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega^*} \sqrt{\lambda(0,t)}\,\xi_1 v\,dx\,dt = \int\limits_{Q^*} f v\,dx\,dy\,dt \tag{15}$$

для довільної функції $v \in C^1(\overline{Q}^*)$ такої, що $v|_{\Gamma^*\times(0,y_0)\times(0,T)} = 0$, $v(x,y_0,t) = 0$. Якщо, крім того, $v(x,0,t) = v(x,y,T) = 0$, то виконуватиметься рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^*} \Bigg[-u^* v_t + \lambda(y,t) u^* v_y + \lambda_y(y,t) u^* v + \sum_{i,l=1}^n a_{il}(x,y,t) u_{x_i}^* v_{x_l} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,y,t) u_{x_i}^* v + c(x,y,t) u^* v + \chi v \Bigg] dx\,dy\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau^*} f v\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{\Omega_0^*} u_0^* v\,dx\,dy. \tag{16}$$

Нехай в (15) функція $v \in C_0^1(\overline{Q}^*)$. Тоді (16) перепишемо у вигляді

$$\int_{Q_\tau^*} (v_t - \lambda(y,t)v_y)u^* \, dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_{Q_\tau^*} \left[F(x,y,t)v + \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u^*_{x_i} v_{x_l} \right] dx\,dy\,dt, \tag{17}$$

де

$$F(x,y,t) = \lambda_y(y,t)u^* + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u^*_{x_i} + c(x,y,t)u^* + \chi - f(x,y,t).$$

Позначимо

$$F_1(x,y,t) = F(x,y,t) + \sum_{i,l=1}^{n} (a_{il}(x,y,t)u^*_{x_i})_{x_l}.$$

Вздовж кожної характеристики

$$F \in L^{q_1}(t_1,t_2;L^{p'(x)}(\hat{\Omega}^*)), \qquad F_1 \in L^{q_1}(t_1,t_2;L^{p'(x)}(\hat{\Omega}^*) + W^{-1,2}(\hat{\Omega}^*)),$$

де $[t_1, t_2]$ — відрізок, на якому визначено вибрану характеристику, $q_1 = \inf_\Omega p'(x)$.

Нехай $y = \rho(t,\xi,\tau)$ — характеристика рівняння (1), тобто функція ρ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda(y,t), \qquad y(\tau) = \xi.$$

У (17) виконаємо заміну змінних: $y = \rho(\tau,\xi,0)$, $t = \tau$. Якобіан переходу

$$J = \frac{\partial\rho}{\partial\xi} = \exp\left\{-\int_0^\tau \lambda_y\,dt\right\}, \qquad J_\tau = -\lambda_y(\rho(\tau,\xi,0),\tau)J.$$

Нехай область $(0,y_0)\times(0,T)$ при такому відображенні отримується з області D. Тоді з (17) маємо

$$\int_{\Omega^*}\int_D u^*(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau)(v(\rho(\tau,\xi,0),\tau)J)_\tau \, d\xi\,d\tau\,dx =$$

$$= \int_{\Omega^*}\int_D \Bigg[\left(F(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau) + J_\tau \frac{u^*(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau)}{J} \right) v(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau)J \; +$$

$$+ \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau)u^*_{x_i}(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau)v_{x_l}(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau)J \Bigg] d\xi\,d\tau\,dx,$$

тобто

$$\frac{d}{d\tau}u^*(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau) = -F_1(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau) + \lambda_y(\rho(\tau,\xi,0),\tau)u^*(x,\rho(\tau,\xi,0),\tau)$$

є функцією з простору $L^{q_1}(t_1,t_2;L^{p'(x)}(\hat{\Omega}^*) + W^{-1,2}(\hat{\Omega}^*))$ для кожного $\xi \in [0,y_0]$.

Тоді $u^* \in C([t_1,t_2];L^2(\hat{\Omega}^*))$ вздовж кожної характеристики, вираз $u^*_t - \lambda(y,t)u^*_y$ має зміст і в формулі (15) можна покласти $v = u^*$. Легко довести, що $\sigma(x, y) = u^*(x, y, T)$, $\xi_1(x, t) = \sqrt{\lambda(0, t)}\, u^*(x, 0, t)$. Доведемо, що $\chi = g(x, y, t, u^*)$. Розглянемо послідовність

$$0 \le X_j = \int_{Q^*} e^{-\zeta t}(g(x, y, t, u^{*,j}) - g(x, y, t, \psi)(u^{*,j} - \psi)\, dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q^*} e^{-\zeta t}(g(x, y, t, u^{*,j})u^{*,j}\, dx\, dy\, dt +$$

$$+ \int_{Q^*} e^{-\zeta t}[-g(x, y, t, \psi)(u^{*,j} - \psi) - g(x, y, t, u^{*,j})\psi]\, dx\, dy\, dt.$$

Застосувавши (10), отримаємо

$$\int_{Q^*} e^{-\zeta t} g(x, y, t, u^{*,j})u^{*,j}\, dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q^*} e^{-\zeta t}\Bigg[f(x, y, t)u^{*,j} - \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x, y, t)u^{*,j}_{x_i} u^{*,j}_{x_l} +$$

$$+ \left(-\frac{\lambda_y(y, t)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_{ix_i}(x, y, t) - c(x, y, t) - \frac{\zeta}{2}\right)(u^{*,j})^2\Bigg]\, dx\, dy\, dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega^*} \lambda(0, t)(u^{*,j}(x, 0, t))^2 e^{-\zeta t}\, dx\, dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\Omega_T^*} (u^{*,j})^2 e^{-\zeta T}\, dx\, dy + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0^*} (u^{*,0})^2\, dx\, dy. \tag{18}$$

Виберемо ζ з умови $\zeta > \sup\limits_{Q^*}\left(-\lambda_y(y, t) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ix_i}(x, y, t) - 2c(x, y, t)\right)$. Підставимо (18) у вираз для X_j, використаємо формулу (15), в якій виберемо $v = u^* e^{-\zeta t}$, та проінтегруємо частинами в першому і третьому доданках. Після виконання вказаних перетворень матимемо

$$0 \le \limsup_{j\to\infty} X_j = \int_{Q^*} e^{-\zeta t}\Bigg[f(x, y, t)u^* - \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x, y, t)u^*_{x_i} u^*_{x_l} +$$

$$+ \left(-\frac{\lambda_y(x, y, t)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_{ix_i}(x, y, t) - c(x, y, t) - \frac{\zeta}{2}\right)(u^*)^2\Bigg]\, dx\, dy\, dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega^*} \sqrt{\lambda}(\xi_1(x, t))^2 e^{-\zeta t}\, dx\, dt - \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} (\sigma(x, y))^2 e^{-\zeta T}\, dx\, dy + \frac{1}{2}\int_{\Omega_0^*} (u^{*,0})^2\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{Q^*} e^{-\zeta t}[-g(x, y, t, \psi)(u^* - \psi) - \chi\psi]\, dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q^*} e^{-\zeta t}(\chi - g(x, y, t, \psi))(u^* - \psi)\, dx\, dy\, dt.$$

Виберемо $\psi = u^* - \kappa w$, $w \in V^{1,0,0}(Q^*)$, $\kappa > 0$. З семінеперервності $g(x, y, t, u^*)$ випливатиме, що $g(x, y, t, u^*) = \chi$ майже скрізь в Q^*.

Виберемо послідовність областей $Q^m = \Omega^m \times (0, y_0) \times (0, T)$, $\hat{\Omega}^m = \Omega^m \times (0, y_0)$, $\Gamma^m = \partial\Omega^m$. Розглянемо задачу

$$u_t - \lambda(y,t)u_y - \sum_{i,l=1}^{n}(a_{il}(x,y,t)u_{x_i})_{x_l} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u_{x_i} +$$

$$+ c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f^m(x,y,t),$$

$$u(x,y,0) = u_0^m, \quad u(x,y_0,t) = 0, \quad u\big|_{\Gamma^m \times (0,y_0)\times(0,T)} = 0,$$

у кожній області Q^m, де

$$f^m(x,y,t) = \begin{cases} f(x,y,t), & (x,y,t) \in Q_m; \\ 0, & (x,y,t) \in Q \setminus Q_m, \end{cases}$$

$u_0^m = u_0(x,y)\xi^m(|x|)$, $\xi^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1) : \xi^m(r) = 1$, якщо $|r| \le m - \delta$, $\xi^m(r) = 0$, якщо $|r| \ge m$, $0 \le \xi^m(r) \le 1$, якщо $m - \delta < |r| < m$.

Розв'язок $u^m(x, y, t)$ цієї задачі існує і належить до простору $V^{1,0,0}(Q^m)$. Продовживши його нулем в область Q, отримаємо рівність

$$\int_Q \Bigg[-u^m v_t + \lambda(y,t)u^m v_y + \lambda_y(y,t)u^m v + \sum_{i,l=1}^{n} a_{il}(x,y,t)u^m_{x_i} v_{x_l} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y,t)u^m_{x_i} v + c(x,y,t)u^m v + g(x,y,t,u^m)v\Bigg]\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_Q f^m(x,y,t)v\,dx\,dy\,dt + \int_{\Omega_0} u_0^m v\,dx\,dy$$

для довільної $v \in C^\infty([0,T], C^\infty(\hat{\Omega}))$, $v(x,0,t) = 0$.

Виберемо $v = u_\mu^m \psi^\beta(x)(y_0 - y)^\alpha e^{-\nu t}$ та виконаємо аналогічні перетворення, як у випадку доведення єдиності розв'язку:

$$\tau_{16} = 2\int_Q g(x,y,t,u^m)u^m (y_0 - y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \ge$$

$$\ge 2g_0 \int_Q |u^m|^{p(x)} (y_0 - y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt,$$

$$\tau_{17} = 2\int_Q f^m(x,y,t)u^m (y_0 - y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le 2\int_Q \left[\frac{|f^m|^{p'(x)}}{p'(x)\delta_1} + \frac{\delta_1 |u^m|^{p(x)}}{p(x)}\right](y_0 - y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt.$$

На підставі оцінок інтегралів $\tau_5, \ldots, \tau_8$ з (8) одержимо оцінку

$$\int_Q \Bigg[\left(2c_0 - \frac{(b^0)^2 n}{\delta} + \nu + \lambda_y - \frac{\lambda\alpha}{y_0 - y}\right)|u^m|^2 + (2a_0 - \delta)\sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}|^2 +$$

$$+ \left(2g_0 - \frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1} - \frac{2\delta_1}{p(x)}\right)|u^m|^{p(x)}\Bigg](y_0 - y)^\alpha \psi^\beta(x) e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\leq A\beta\Psi_1\delta^{-\frac{2}{p_1-2}} + \frac{2}{\delta_1}\int\limits_Q \frac{\left|f^m\right|^{p'(x)}}{p'(x)}(y_0-y)^\alpha\psi^\beta(x)e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+ 2\int\limits_{\Omega_0}\left|u_0^m\right|^2(y_0-y)^\alpha\psi^\beta(x)\,dx\,dy.$$

Виберемо ν, δ, δ_1 з умов $2c_0 - \frac{(b^0)^2 n}{\delta} + \nu + \lambda_y - \frac{\lambda\alpha}{y_0-y} \geq 0$, $2a_0 -$ $2g_0 - \frac{2\delta n^2 A\beta}{p_1} - \frac{2\delta_1}{p(x)} > 0$. Виберемо

$$\psi(x) = \begin{cases}\dfrac{R^2-|x|^2}{R}, & 0 \leq |x| \leq R;\\ 0. & |x| > R.\end{cases}$$

Тоді матимемо нерівність

$$\int\limits_{Q^{R_0}}\left[\left|u^m\right|^2 + \sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^m\right|^2 + \left|u^m\right|^{p(x)}\right](y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \leq$$

$$\leq M_4\frac{1}{(R-R_0)^\beta}\left[A\beta\delta^{-\frac{2}{p_1-2}}Ty_0^\alpha 2^\beta n^2 R^\beta R^{-\frac{2p_2}{p_2-2}+n}P_n(R+\beta)^{\frac{p_2}{p_2-2}} +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{Q^R}\left|f^m\right|^{p'(x)}y_0^\alpha(2R)^\beta e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{\Omega_0^R}\left|u_0^m\right|^2 y_0^\alpha(2R)^\beta\,dx\,dy\right].$$

Виберемо $R > \beta$ і $R > R_0$. Тоді

$$\int\limits_{Q^{R_0}}\left[\left|u^m\right|^2 + \sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^m\right|^2 + \left|u^m\right|^{p(x)}\right](y_0-y)^\alpha e^{-\nu t}\,dx\,dy\,dt \leq$$

$$\leq M_4\left[\int\limits_{Q^R}|f|^{p'(x)}\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{\Omega_0^R}|u_0|^2\,dx\,dy\right] + M_5,$$

де M_4, M_5, M_6 не залежать від m. З такої оцінки випливають такі зб деякої підпослідовності $\{u^{m_i}\}\subset\{u^m\}$:

$$u^{m_i}\to u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T,L^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\hat{\Omega}})),$$

$$u_{x_i}^{m_i}\to u_{x_i} \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T,L^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\hat{\Omega}})),$$

$$u^{m_i}\to u \quad \text{слабко в} \quad L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}),$$

$$\sqrt{\lambda(0,\cdot)}\,u^{m_i}(\cdot,0,\cdot)\to\xi_1 \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}([0,T])\times\overline{\Omega}),$$

$$u^{m_i}(\cdot,\cdot,T)\to\sigma \quad \text{слабко в} \quad L^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\hat{\Omega}}),$$

$$g(\cdot,\cdot,\cdot,u^{m_i})\to\chi \quad \text{слабко в} \quad L^{p'(x)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}).$$

Як і у попередньому випадку, можна довести, що $\chi = g(x, y, t, u)$ і u — розв'язок задачі (1) – (3).

1. *Kolmogorov A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – P. 116 – 117.
2. *Дронь В. С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Сер. мат. – 2000. – Вип. 76. – С. 32 – 42.
3. *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментальних розв'язків задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка". Сер. прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 221 – 228.
4. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. –1998. – **50**, № 11. – С. 1482 – 1496.
5. *Івасишен С. Д., Тичинська Л. М., Ейдельман С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 5. – С. 6 – 8.
6. *Малицкая А. П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. –1985. – **37**, № 6. – С. 713 – 719.
7. *Ейдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения. –1975. – **11**, № 7. – С. 1316 – 1331.
8. *Малицька Г. П.* Про принцип максимуму для ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. –1996. – **48**, № 2. – С. 195 – 201.
9. *Терсенов С. А.* О предельных значениях решений ультрапараболических уравнений на многообразиях вырождения // Докл. АН СССР. –1988. – **299**, № 5. – С. 1070 – 1075.
10. *Син Донха З.* Оценки потенциалов для ультрапараболического уравнения // Математическое моделирование механики сплошных сред (Динамика сплошной среды). – 1987. – Вып. 79. – С. 108 – 117.
11. *Терсенов С. А.* О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложениях // Мат. сб. –1987. – **133** (175), № 4 (8). – С. 539 – 555.
12. *Орлова С. А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. –1990. – **31**, № 6. – С. 211 – 215.
13. *Паскалев Г. П.* Об исследовании одной краевой задачи для ультрапараболического уравнения с постоянными коэффициентами вариационным методом // Дифференц. уравнения. –1992. – **28**, № 9. – С. 1640 – 1642.
14. *Пятков С. Г.* Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск, 1990. – С. 182 – 197.
15. *Амиров Ш.* Смешанная задача для ультрапараболического уравнения в ограниченной области // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск, 1984. – С. 173 – 179.
16. *Улукназаров М. Ж.* Решение одной краевой задачи для многомерного уравнения ультрапараболического типа // Вопросы вычислит. и прикл. математики. – 1986. – Вып. 80. – С. 60 – 67.
17. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czech. Math. J. – 1991. – **41**, № 4. – P. 592 – 618.
18. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.

Одержано 09.04.2001