УДК 517.937

В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т)

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ КОШІ

We establish a criterion of convolutes in some S-type spaces. By using this criterion, we obtain the correct solvability (in both ways) of certain Cauchy problem in these spaces.

Встановлено критерій згортувачів у деяких просторах типу S, завдяки якому одержано коректну розв'язність (в обидва боки) однієї задачі Коші у цих просторах.

Вступ. При розв'язуванні природничих задач з метою одержання повних характеристик процесів, що описуються ними, суттєвими є відомості про максимальні простори початкових даних, які забезпечують не тільки коректну розв'язність відповідних модельних задач, а і збереження певних властивостей їх розв'язків [1].

У даній роботі вивчається питання про знаходження усіх початкових даних задачі Коші для одного параболічного рівняння, при яких вона є коректно розв'язною, причому її розв'язок має ту ж властивість гладкості і поведінку при наближенні просторової змінної до нескінченності, що і фундаментальний розв'язок.

1. Простори типу *S*. Нехай $C^\infty(R)$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на R. Для довільних $\alpha > 0$, $\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha = \{\varphi \in C^\infty(R) \mid \exists A > 0\ \forall k \in Z_+\ \exists c_k > 0\ \forall q \in Z_+\ \forall x \in R: |x^q D^k \varphi(x)| \le \le c_k A^q q^{\alpha q}\},$$

$$S_\alpha^\beta = \{\varphi \in C^\infty(R) \mid \exists c > 0\ \exists A > 0\ \exists B > 0\ \forall \{k; q\} \subset Z_+\ \forall x \in R: |x^q D^k \varphi(x)| \le \le c A^q B^k k^{\beta k} q^{\alpha q}\}.$$

Відмітимо, що $S_\alpha^\beta \subset S_\alpha$, якщо $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Ці простори були побудовані І. М. Гельфандом і Г. Є. Шиловим у [2] і названі ними просторами типу S, де S — відомий простір Л. Шварца [3].

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \ge 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, і складаються з тих і тільки тих $\varphi \in C^\infty(R)$, які задовольняють нерівність

$$|D^k \varphi(x)| \le c A^k k^{\beta k} e^{-\delta |x|^{1/\alpha}}, \quad k \in Z_+, \quad x \in R,$$

з деякими додатними сталими c, A і δ, які залежать тільки від функції φ, а $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \varphi$ у просторі S_α^β, де $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \in N\} \subset S_\alpha^\beta$, тоді і тільки тоді, коли [2]:

1) $\forall k \in Z_+: D^k \varphi_\nu(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} D^k \varphi(x)$ рівномірно відносно x на довільному компакті $K \subset R$;

2) $\exists c > 0\ \exists A > 0\ \exists B > 0\ \forall \{k; q\} \subset Z_+\ \forall \nu \in N\ \forall x \in R: |x^q D^k \varphi_\nu(x)| \le c \times \times A^q B^k k^{\beta k} q^{\alpha q}$.

Справедливе таке твердження.

Лема 1. *Для кожного фіксованого* $\delta > 0$ *функція* $\theta_\delta(x) = \exp\{-\delta x^{2m}\}$, $m \in N$, $x \in R$, *належить простору* $S_{1/2m}^{1-1/2m}$.

Доведення. Оскільки функція θ_δ, $\delta > 0$, є нескінченно диференційовною, то для доведення леми досить показати, що

$$\exists \delta_1 > 0\ \exists c > 0\ \exists A > 0\ \forall k \in Z_+\ \forall x \in R: |D^k \vartheta_\delta(x)| \le c A^k k^{k(1-1/2m)} e^{-\delta_1 |x|^{2m}}.$$

Виходячи з відомої формули Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_x^k f(\varphi(x)) = \sum_p^k \frac{k!}{i!\,j!\ldots h!}\frac{d^p f(\varphi)}{d\varphi^p}\left(\frac{d\varphi(x)}{1!dx}\right)^i\left(\frac{d^2\varphi(x)}{2!dx^2}\right)^j\ldots\left(\frac{d^L\varphi(x)}{L!dx^L}\right)^h$$

(тут знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $k = i + 2j + \ldots + Lh$, а число $p = i + j + \ldots + h$), одержуємо

$$\forall k \in Z_+ : |D_x^k \theta_\delta(x)| \le \sum_p^k \frac{k!}{i!\,j!\ldots h!}\delta^p e^{-\delta x^{2m}}\left|\frac{dx^{2m}}{dx}\right|^i\left|\frac{d^2x^{2m}}{2!dx^2}\right|^j\ldots\left|\frac{d^Lx^{2m}}{L!dx^L}\right|^h,$$

де $\delta > 0$, $x \in R$.

Оскільки

$$\forall l \in Z_+ : \frac{d^l x^{2m}}{l!dx^l} = \begin{cases}\dfrac{(2m)!}{(2m-l)!\,l!}x^{2m-l}, & l \le 2m;\\ 0, l > 2m,\end{cases}$$

то

$$|D_x^k\theta_\delta(x)| \le \sum_p^k \frac{k!}{i!\,j!\ldots h!}\delta^p e^{-\delta x^{2m}}\left(2m|x|^{2m-1}\right)^i\left(\frac{(2m)!}{(2m-2)!\,2!}|x|^{2m-2}\right)^j \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(\begin{cases}\left(\dfrac{(2m)!}{(2m-L)!\,L!}|x|^{2m-L}\right)^h, & L \le 2m;\\ 0, L > 2m\end{cases}\right) \le$$

$$\le (2^{2m+1})^k e^{-\delta x^{2m}} \sum_p^k \delta^p \left(\begin{cases}|x|^{2mp-k}, & k \le 2mp;\\ 0, & k > 2mp\end{cases}\right) =$$

$$= \left(2^{2m+1}\delta_0^{1/2m}\right)^k e^{-(\delta-\delta_0)x^{2m}} \sum_p^k \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^p e^{-\delta_0 x^{2m}} \left(\begin{cases}\delta_0\left(|x|^{2m}\right)^{\frac{2mp-k}{2m}}, & k \le 2mp;\\ 0, k > 2mp\end{cases}\right) \le$$

$$\le \left(2^{2m+1}\delta\delta_0^{\frac{1}{2m}-1}\right)^k e^{-(\delta-\delta_0)x^{2m}} \sum_p^k \left(\begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(t^{\frac{2mp-k}{2m}}e^{-t}\right), & k \le 2mp;\\ 0, k > 2mp\end{cases}\right) =$$

$$= \left(2^{2m+1}\delta\delta_0^{\frac{1}{2m}-1}\right)^k e^{-(\delta-\delta_0)x^{2m}} \sum_p^k \left(\begin{cases}\left(p - \dfrac{k}{2m}\right)^{p-\frac{k}{2m}} e^{-\left(p-\frac{k}{2m}\right)}, & k \le 2mp;\\ 0, k > 2mp\end{cases}\right) \le$$

$$\le \left(2^{2m+2}\delta\delta_0^{\frac{1}{2m}-1}e^{\frac{1}{2m}+1}\right)^k e^{-(\delta-\delta_0)x^{2m}} k^{k\left(1-\frac{1}{2m}\right)}\left(1-\frac{1}{2m}\right)^{-\frac{k}{2m}} \le$$

$$\le \left(2^{2m+2}\delta\delta_0^{\frac{1}{2m}-1}e^{\frac{1}{2m}+1}\frac{2m}{2m-1}\right)^k k^{k\left(1-\frac{1}{2m}\right)} e^{-(\delta-\delta_0)x^{2m}},$$

$$0 < \delta_0 < \delta, \quad k \in Z_+, \quad x \in R, \tag{1}$$

що й потрібно було довести.

Далі нам буде потрібне наступне твердження.

Лема 2. *Нехай* $m \in N$, $0 < \alpha \le \frac{1}{2m}$, $\beta \ge 1 - \frac{1}{2m}$, $\Phi \in \{S_\alpha, S_\alpha^\beta\}$. *Тоді*

$$\forall \varphi \in \Phi \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in R: e^{\delta_1 x^{2m}} \varphi(x) \in \Phi.$$

Доведення. Вважатимемо спочатку, що $\Phi = S_\alpha^\beta$, $0 < \alpha \le \frac{1}{2m}$, $\beta \ge 1 - \frac{1}{2m}$, $m \in N$. Тоді досить довести, що якщо $\varphi \in \Phi$, то

$$\exists \delta > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \forall l \in Z_+ \ \forall x \in R: \left| D^l \left(e^{\delta_1 x^{2m}} \varphi(x) \right) \right| \le$$

$$\le cA^l l^{l\beta} e^{-\delta |x|^{1/\alpha}}.$$

Для довільного $l \in Z_+$

$$\left| D^l \left(e^{\delta_1 x^{2m}} \varphi(x) \right) \right| \le \sum_{k=0}^{l} C_l^k \left| D^k e^{\delta_1 x^{2m}} \right| \left| D^{l-k} \varphi(x) \right|, \quad \delta_1 > 0, \quad x \in R. \tag{2}$$

і оскільки $\varphi \in \Phi$, то

$$\exists \delta_0 \in (0;1) \ \exists c_1 > 0 \ \exists A_1 > 0 \ \forall l \in Z_+ \ \forall x \in R: \left| D^l \varphi(x) \right| \le c_1 A_1^l l^{\beta l} e^{-\delta_0 |x|^{1/\alpha}}.$$

Отже, звідси та з (2), а також з нерівностей (1) (при $\delta = -\delta_1$) одержуємо

$$\forall \varphi \in \Phi: \left| D^l \left(e^{\delta_1 x^{2m}} \varphi(x) \right) \right| \le \sum_{k=0}^{l} C_l^k (2^{2m+1})^k e^{\delta_1 x^{2m}} \times$$

$$\times \sum_p^k \delta_1^p \left(\begin{cases} |x|^{2mp-k}, & k \le 2mp; \\ 0, & k > 2mp \end{cases} \right) c_1 A_1^{l-k} (l-k)^{\beta(l-k)} e^{-\delta_0 |x|^{1/\alpha}} \le$$

$$\le c_1 e^{\delta_0} e^{-\left(\frac{\delta_0}{2} - \delta_1\right)|x|^{1/\alpha}} \sum_{k=0}^{l} C_l^k (2^{2m+1})^k A_1^{l-k} (l-k)^{\beta(l-k)} \times$$

$$\times \sum_p^k \left(\frac{2\delta_1}{\delta_0} \right)^{2m\alpha p} \left(\frac{\delta_0}{2} \right)^{k\alpha} e^{-\frac{\delta_0}{2}|x|^{1/\alpha}} \left(\begin{cases} \left(\frac{\delta_0}{2} |x|^{1/\alpha} \right)^{(2mp-k)\alpha}, & k \le 2mp; \\ 0, & k > 2mp \end{cases} \right) \le$$

$$\le c_1 e^{\delta_0} e^{-\left(\frac{\delta_0}{2} - \delta_1\right)|x|^{1/\alpha}} \sum_{k=0}^{l} C_l^k (2^{2m+1})^k A_1^{l-k} (l-k)^{\beta(l-k)} \times$$

$$\times \sum_p^k \left(\begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(t^{(2mp-k)\alpha} e^{-t} \right), & k \le 2mp; \\ 0, & k > 2mp \end{cases} \right),$$

$$0 < \delta_1 < \frac{\delta_0}{2}, \quad \beta \ge 1 - \frac{1}{2m}, \quad 0 < \alpha \le \frac{1}{2m}, \quad m \in N, \quad x \in R.$$

Далі, оскільки

$$\sup_{t>0} \left(t^{(2mp-k)\alpha} e^{-t} \right) \le \left(\frac{e}{1-\alpha} \right)^{\alpha k} k^{k\left(\frac{2m}{1/\alpha} - \alpha\right)}, \quad 0 < p \le k, \quad k \le 2mp,$$

а

$$\frac{2m}{1/\alpha} - \alpha = 1 - \alpha(\gamma+1) = 1 - \frac{\gamma+1}{\gamma+2m} \le 1 - \frac{1}{2m}$$

(тут $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2m}$, $\gamma = \dfrac{1}{\alpha} - 2m$), тому що

$$\frac{\gamma+1}{\gamma+2m} = 1 - \frac{2m-1}{\gamma+2m} \ge 1 - \frac{2m-1}{2m} = \frac{1}{2m}, \qquad \gamma \ge 0,$$

то

$$\left| D^l\left(e^{\delta_1 x^{2m}} \varphi(x)\right)\right| \le c_1 e^{\delta_0} e^{-\left(\frac{\delta_0}{2} - \delta_1\right)|x|^{1/\alpha}} \sum_{k=0}^{l} C_l^k \left(2^{2m+2}(1-\alpha)^{-\alpha} e^{\alpha+1}\right)^k \times$$

$$\times A_1^{l-k}(l-k)^{\beta(l-k)} k^{k\left(1-\frac{1}{2m}\right)} \le cA^l l^{\beta l} e^{-\left(\frac{\delta_0}{2} - \delta_1\right)|x|^{1/\alpha}}, \tag{3}$$

$$\beta \ge 1 - \frac{1}{2m}, \qquad 0 < \alpha \le \frac{1}{2m}, \qquad m \in N, \quad \varphi \in \Phi,$$

де c, A — додатні сталі, які не залежать від $l \in Z_+$ і $x \in R$, якщо $0 < \delta_1 < \dfrac{\delta_0}{2}$.

Неважко переконатися у тому, що дане твердження є справедливим і у випадку, коли $\Phi = S_\alpha$, $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2m}$, $m \in N$. Лему доведено.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $m \in N$, $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2m}$, $\beta \ge 1 - \dfrac{1}{2m}$, $\Phi \in \{S_\alpha, S_\alpha^\beta\}$. *Тоді для того щоб функція* $c(\cdot)$ *була мультиплікатором у просторі* Φ, *необхідно і досить, щоб для кожного фіксованого* $\delta > 0$ $c(\cdot)e^{-\delta(\cdot)^{2m}} \in \Phi$.

Доведення. *Необхідність* очевидна. Доведемо *достатність*. Для цього досить установити виконання наступних умов:

1) $\forall\, \varphi \in \Phi$: $c(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi$;

2) для кожної послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \in N\} \subset \Phi$ такої, що $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ у просторі Φ, відповідна послідовність $\{c(\cdot)\varphi_\nu(\cdot), \nu \in N\}$ прямує до нуля у просторі Φ при $\nu \to \infty$.

Згідно з твердженням леми 2

$$\forall \varphi \in \Phi \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in R\colon c(x)\varphi(x) = \left(c(x)e^{-\delta x^{2m}}\right)\left(e^{\delta x^{2m}}\varphi(x)\right) \in \Phi$$

як добуток функцій з Φ. Отже, умова 1 виконується.

Для доведення умови 2 у випадку, коли $\Phi = S_\alpha^\beta$, досить показати, що:

I. $\forall\, k \in Z_+$: $|D^k(c(x)\varphi_\nu(x))| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ рівномірно відносно x на кожному компакті K з R.

II. $\exists \delta_1 > 0 \; \exists c_1 > 0 \; \exists A_1 > 0 \; \forall \nu \in N \; \forall k \in Z_+ \; \forall x \in R$: $\left|D^k(c(x)\varphi_\nu(x))\right| \le$

$$\le c_1 A_1^k k^{\beta k} e^{-\delta_1 |x|^{1/\alpha}}.$$

Оскільки $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ у просторі Φ, то:

а) $\forall\, k \in Z_+$: $|D^k\varphi_\nu(x)| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ рівномірно відносно x на кожному компакті $K \subset R$;

б) $\forall \nu \in N \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |D^k \varphi_\nu(x)| \le c_0 A_0^k k^{\beta k} e^{-\delta_0 |x|^{1/\alpha}}$, $x \in R$, де c_0, A_0, δ_0 — додатні сталі, які не залежать від x, k і ν.

Умова I виконується. Справді, згідно з умовою а)

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ : \left| D^k(c(x)\varphi_\nu(x)) \right| = \left| \sum_{l=0}^{k} C_k^l D^l c(x) D^{k-l} \varphi_\nu(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k} C_k^l \sup_{x \in K \subset R} \left(\left| D^l c(x) \right| \right) \left| D^{k-l} \varphi_\nu(x) \right| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

рівномірно відносно x на довільному компакті $K \subset R$.

Доведемо виконання умови II. Завдяки умові б) та міркуванням, проведеним при встановленні нерівності (3), маємо

$$\left| D^l \left(e^{\delta_2 x^{2m}} \varphi_\nu(x) \right) \right| \le c_2 A_2^l l^{\beta l} e^{-\left(\frac{\delta_0}{2} - \delta_2 \right) |x|^{1/\alpha}},$$

де c_2, A_2 — додатні сталі, які не залежать від $l \in \mathbb{Z}_+$ і $x \in R$, якщо $0 < \delta_2 < \delta_0/2$.

Звідси, враховуючи те, що $c(x) e^{-\delta_2 x^{2m}} \in \Phi$, $x \in R$, $\delta_2 > 0$, одержуємо

$$\forall \nu \in N \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \ \forall x \in R: \quad \left| D^k(c(x)\varphi_\nu(x)) \right| =$$

$$= \left| D^k \left(\left(c(x) e^{-\delta_2 x^{2m}} \right) \left(e^{\delta_2 x^{2m}} \varphi_\nu(x) \right) \right) \right| \le \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left| D^{k-l} \left(c(x) e^{-\delta_2 x^{2m}} \right) \right| \times$$

$$\times \left| D^l \left(e^{\delta_2 x^{2m}} \varphi_\nu(x) \right) \right| \le c_2 c_3 e^{-\left(\frac{\delta_0}{2} - \delta_2 \right) |x|^{1/\alpha}} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{k} C_k^l A_2^l l^{\beta l} A_3^{k-l} (k-l)^{\beta(k-l)} e^{-\delta_3 |x|^{1/\alpha}} \le c_4 A_4^k k^{\beta k} e^{-\delta_4 |x|^{1/\alpha}},$$

де c_4, A_4, δ_4 — додатні сталі, які не залежать від ν, k і x. Отже, виконання умови II доведено.

У випадку, коли $\Phi = S_\alpha$, $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2m}$, $m \in N$, справедливість умови II доводиться аналогічно. Теорему доведено.

2. Перетворення Фур'є та згортка. Нехай

$$\Phi \in \{ S_\alpha, \alpha > 0; \ S_\alpha^\beta, \alpha > 0, \beta > 0 \},$$

а $F[\Phi] \equiv \tilde{\Phi}$ — простір Фур'є-образів

$$F[\Phi] = \left\{ F[\varphi](\sigma) = \int_R \varphi(x) e^{ix\sigma}\, dx, \ \varphi \in \Phi \right\}.$$

Домовимося через Φ' позначати сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів зі слабкою збіжністю, визначених на Φ.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначимо співвідношенням

$$\langle F[f], F[\Phi] \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \Phi.$$

Нагадаємо, що елемент f з Φ' називається згортувачем у просторі Φ, якщо:

1) $\forall \varphi \in \Phi \ \ \forall x \in R$: $(f * \varphi)(x) := \langle f(\cdot), \varphi(x + \cdot)\rangle \in \Phi$;

2) для кожної послідовності $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \in N\}$ з Φ такої, що $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \varphi$ у просторі Φ, відповідна послідовність $\{f * \varphi_\nu, \nu \in N\}$ прямує до функції $f * \varphi$ у просторі Φ при $\nu \to \infty$, і якщо f — згортувач у Φ, то операцію $f *$ у просторі Φ', визначену співвідношенням

$$\langle f * f_1, \varphi\rangle = \langle f_1, f * \varphi\rangle,$$

яке має місце для довільних $f_1 \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, називають згорткою функціонала f у просторі Φ'.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* $m \in N$, $\alpha = \dfrac{1}{2m}$, $\beta \geq 1 - \dfrac{1}{2m}$, $\Phi \in \{S^\alpha, S^\alpha_\beta\}$, $g_\delta = F^{-1}\left[e^{-\delta\xi^{2m}}\right]$, $\delta > 0$, *а* f — *згортувач у* Φ. *Тоді:*

1) $\forall \delta_1 > 0 \ \forall \delta_2 > 0$: $\dfrac{F[f * g_{\delta_1}]}{F[g_{\delta_1}]} = \dfrac{F[f * g_{\delta_2}]}{F[g_{\delta_2}]}$;

2) $\dfrac{F[f * g_\delta]}{F[g_\delta]}$ — *мультиплікатор у* $\tilde{\Phi}$;

3) $F[f]$ — *регулярний функціонал з* $\tilde{\Phi}'$, *породжений* $\dfrac{F[f * g_\delta]}{F[g_\delta]}$;

4) $\forall \varphi \in \Phi \ \forall \xi \in R$: $F[f * \varphi](\xi) = \overline{F[f](\xi)}F[\varphi](\xi)$.

Доведення. 1. Оскільки f — згортувач у Φ, то

$$\forall \{\varphi_1, \varphi_2\} \subset \Phi \ \forall \xi \in R: \quad (f * \varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (f * \varphi_2 * \varphi_1)(\xi). \tag{4}$$

Справді, згідно з означенням згортувача f і властивістю комутативності операції згортки для основних функцій маємо

$$\forall \{\varphi_1, \varphi_2, \psi\} \subset \Phi: \quad \langle f * \varphi_1 * \varphi_2, \psi\rangle = \langle \varphi_1 * \varphi_2, f * \psi\rangle =$$
$$= \langle \varphi_2 * \varphi_1, f * \psi\rangle = \langle f * \varphi_2 * \varphi_1, \psi\rangle,$$

або

$$\int_R \left(\overline{(f * \varphi_1 * \varphi_2)(\xi)} - \overline{(f * \varphi_2 * \varphi_1)(\xi)}\right)\psi(\xi)\, d\xi = 0.$$

Покладаючи в останній рівності

$$\psi(\cdot) = \overline{(f * \varphi_1 * \varphi_2)(\cdot)} - \overline{(f * \varphi_2 * \varphi_1)(\cdot)},$$

одержуємо

$$\int_R \left(\overline{(f * \varphi_1 * \varphi_2)(\xi)} - \overline{(f * \varphi_2 * \varphi_1)(\xi)}\right)^2 d\xi = 0,$$

тобто

$$(f * \varphi_1 * \varphi_2)(\xi) = (f * \varphi_2 * \varphi_1)(\xi)$$

майже скрізь на R. Звідси, враховуючи гладкість елементів простору Φ, приходимо до твердження (4).

Оскільки для довільного $\delta > 0$ $F[g_\delta](\xi) = e^{-\delta\xi^{2m}} \in S^{1-1/2m}_{1/2m} \subset \tilde{\Phi}$ (лема 1), то згідно з рівністю (4) одержуємо таке співвідношення:

$$\forall\, \delta_1 > 0 \;\; \forall\, \delta_2 > 0: \quad \frac{F[f * g_{\delta_1}]}{F[g_{\delta_1}]} = \frac{F[f * g_{\delta_1}]F[g_{\delta_2}]}{F[g_{\delta_1}]F[g_{\delta_2}]} =$$

$$= \frac{F[f * g_{\delta_1} * g_{\delta_2}]}{F[g_{\delta_1}]F[g_{\delta_2}]} = \frac{F[f * g_{\delta_2} * g_{\delta_1}]}{F[g_{\delta_1}]F[g_{\delta_2}]} = \frac{F[f * g_{\delta_2}]F[g_{\delta_1}]}{F[g_{\delta_2}]F[g_{\delta_1}]} = \frac{F[f * g_{\delta_2}]}{F[g_{\delta_2}]}.$$

Далі, для довільного $\delta > 0$ $F[f * g_\delta] \in \tilde{\Phi}$, а отже, $\dfrac{F[f * g_\delta]}{F[g_\delta]} \in C^\infty(R)$.

Згідно з лемою 2 і твердженням 1 даної теореми одержуємо

$$\forall \varphi \in \tilde{\Phi} \quad \exists \delta_1 > 0: \quad \frac{F[f * g_\delta]}{F[g_\delta]}\varphi = \frac{F[f * g_{\delta_1}]}{F[g_{\delta_1}]}\varphi =$$

$$= F[f * g_{\delta_1}](\xi) e^{\delta_1 \xi^{2m}} \varphi(\xi) \in \tilde{\Phi}, \quad \xi \in R.$$

Звідси завдяки теоремі 1 отримуємо твердження 2 даної теореми.

Нехай $\varphi \in \Phi$, тоді існує таке $\delta_1 > 0$, що $e^{\delta_1 \xi^{2m}} F[\varphi](\xi) \in \tilde{\Phi}$, $\xi \in R$ (лема 2), тому на підставі рівності (4) одержуємо співвідношення

$$\forall\, \delta > 0: \quad \left\langle \frac{F[f * g_\delta]}{F[g_\delta]}, F[\varphi] \right\rangle = \left\langle \frac{F[f * g_{\delta_1}]}{F[g_{\delta_1}]}, F[\varphi] \right\rangle =$$

$$= \left\langle F[f * g_{\delta_1}] e^{\delta_1 \xi^{2m}}, F[\varphi] \right\rangle = \left\langle e^{\delta_1 \xi^{2m}}, F[f * g_{\delta_1} * \varphi] \right\rangle =$$

$$= \left\langle e^{\delta_1 \xi^{2m}}, F[f * \varphi] F[g_{\delta_1}] \right\rangle = \left\langle e^{\delta_1 \xi^{2m}} e^{-\delta_1 \xi^{2m}}, F[f * \varphi] \right\rangle =$$

$$= \langle 1, F[f * \varphi] \rangle = 2\pi \left\langle F^{-1}[1], f * \varphi \right\rangle = 2\pi \langle \delta(\cdot), f * \varphi \rangle =$$

$$= 2\pi (f * \varphi)(0) = 2\pi \langle f, \varphi \rangle = \langle F[f], F[\varphi] \rangle$$

(тут і далі F^{-1} — обернене перетворення Фур'є, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака). Отже, $F[f]$ — регулярний функціонал, породжений функцією $\dfrac{F[f * g_\delta]}{F[g_\delta]}$, $\delta > 0$.

Твердження 3 доведено.

Нарешті, доведемо твердження 4. Оскільки операція зсуву визначена і неперервна у просторі Φ, то

$$\forall\, \varphi \in \Phi: \quad F[\varphi(x + h)](\xi) = e^{-ih\xi} F[\varphi](\xi), \qquad \{h, \xi\} \subset R. \tag{5}$$

Враховуючи, що

$$F^{-1}[e^{ih\xi}](x) = \delta(x - h), \qquad \{h, x\} \subset R,$$

а також доведені твердження 2, 3 цієї теореми і рівність (5), одержуємо

$$\forall\, \varphi \in \Phi: \quad F^{-1}\left[\overline{F[f]} F[\varphi]\right](h) = \left\langle \delta(x - h), F^{-1}\left[\overline{F[f]} F[\varphi]\right](x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle F^{-1}[e^{ih\xi}](x), F^{-1}\left[\overline{F[f]} F[\varphi]\right](x) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle e^{ih\xi}, \overline{F[f](\xi)} F[\varphi](\xi) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\langle F[f](\xi), e^{-ih\xi} F[\varphi](\xi) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F[f](\xi), F[\varphi(x + h)](\xi) \rangle =$$

$$= \langle f(x), \varphi(x + h) \rangle = (f * \varphi)(h), \qquad h \in R,$$

тобто твердження 4. Теорему доведено.

З теореми 2 та теореми 1 з [4], як наслідок, дістаємо критерій згортувача у просторах типу S.

Теорема 3. *Якщо* $m \in N$, $\alpha = \dfrac{1}{2m}$, $\beta \geq 1 - \dfrac{1}{2m}$, $\Phi \in \{S^{\alpha}, S_{\beta}^{\alpha}\}$, *то для того щоб* f *з* Φ' *був згортувачем у* Φ, *необхідно і досить, щоб* $F[f]$ *був мультиплікатором у просторі* $\tilde{\Phi}$, *при цьому завжди матиме місце співвідношення*

$$F[f * \varphi](\xi) = \overline{F[f]}(\xi)\, F[\varphi](\xi), \qquad \xi \in R, \quad \varphi \in \Phi.$$

3. Задача Коші. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = (-1)^{m+1} D_x^{2m} U(t, x), \qquad (t, x) \in \Omega \equiv (0, +\infty) \times R, \quad m \in N. \tag{6}$$

Якщо для рівняння (6) задати початкову умову

$$U(t, \cdot)|_{t=0} = f, \qquad f \in \tilde{\Phi}', \tag{7}$$

то під розв'язком задачі Коші (6), (7) розумітимемо гладку функцію U, яка задовольняє рівняння (6) і початкову умову (7) у тому розумінні, що $U(t, \cdot) \xrightarrow[t \to +0]{} f$ у просторі $\tilde{\Phi}'$.

Нехай

$$G_t(x) = F^{-1}[\exp(-t\xi^{2m})](t, x), \qquad (t, x) \in \Omega.$$

Згідно з лемою 1 $G_t(\cdot) \in S_{1-1/2m}^{1/2m}$, $t > 0$.

Справедлива така теорема.

Теорема 4. *Для того щоб задача Коші* (6), (7) *була коректно розв'язною і:*

1) *її розв'язок* $U(t, \cdot)$ *при кожному фіксованому* $t > 0$ *належав простору* $\tilde{\Phi} \in \{S^{\alpha}, S_{\beta}^{\alpha}\}$, $\alpha = \dfrac{1}{2m}$, $\beta \geq 1 - \dfrac{1}{2m}$;

2) $\dfrac{\partial}{\partial t} F[U] = F\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}\right]$ $t > 0$;

3) $U(t, x) = f * G_t(x)$, $(t, x) \in \Omega$,

необхідно і досить, щоб f *був згортувачем у просторі* $\tilde{\Phi}$.

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки рівняння (6), які при кожному фіксованому $t > 0$ є елементами з простору $\tilde{\Phi}$ і відносно t задовольняють умову 2 даної теореми, то, враховуючи те, що відображення

$$F(F^{-1})\colon\ S_{\beta}^{\alpha} \to S_{\alpha}^{\beta}, \qquad F(F^{-1})\colon\ S_{\beta} \to S^{\beta}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

є взаємно однозначними і неперервними [2, с. 155], одержуємо еквівалентність рівняння (6) з рівнянням

$$\frac{\partial \tilde{U}(t, \xi)}{\partial t} = -\xi^{2m} \tilde{U}(t, \xi), \qquad (t, \xi) \in \Omega \tag{8}$$

(тут і далі $\tilde{Y} = F[Y]$), причому початкова умова (7) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{U}(t, \cdot) \xrightarrow[t \to +0]{} \tilde{f} \qquad \text{у просторі } \Phi'. \tag{9}$$

Дійсно,

$$\forall \varphi \in \tilde{\Phi}\colon \quad 2\pi \langle \tilde{U}(t, \cdot), \tilde{\varphi} \rangle = \langle U(t, \cdot), \varphi \rangle \xrightarrow[t \to +0]{} \langle f, \varphi \rangle = 2\pi \langle \tilde{f}, \tilde{\varphi} \rangle.$$

Отже, питання коректної розв'язності задачі Коші (6), (7) еквівалентне питанню коректної розв'язності задачі Коші (8), (9).

Доведемо *необхідність*. Для цього згідно з теоремою 3 досить показати, що якщо задача Коші (8), (9) коректно розв'язна, то $\tilde{f}$ — мультиплікатор у просторі Φ.

Відзначимо, що рівняння (8) — звичайне диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, загальний розв'язок якого

$$\tilde{U}(t,\xi) = c(\xi)e^{-t\xi^{2m}}, \quad (t,\xi) \in \Omega. \tag{10}$$

Оскільки $\tilde{U}(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному фіксованому $t > 0$, то згідно з теоремою 1 функція $c(\cdot)$ є мультиплікатором у просторі Φ.

Враховуючи, що

$$\forall \varphi \in \Phi: \quad e^{-t\xi^{2m}}\varphi(\xi) \xrightarrow[t \to +0]{} \varphi(\xi) \quad \text{у просторі } \Phi,$$

з умови (9) і з рівності (10) дістаємо

$$\left\langle \tilde{U}(t,\xi), \varphi(\xi) \right\rangle = \left\langle c(\xi)e^{-t\xi^{2m}}, \varphi(\xi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle c(\xi), e^{-t\xi^{2m}}\varphi(\xi) \right\rangle \xrightarrow[t \to +0]{} \langle c(\xi), \varphi(\xi) \rangle = \left\langle \tilde{f}, \varphi(\xi) \right\rangle, \quad \xi \in R, \quad \varphi \in \Phi.$$

Звідси на підставі того, що задача Коші (8), (9) має єдиний розв'язок, одержуємо, що $\tilde{f}$ — регулярний функціонал, породжений мультиплікатором у просторі Φ. Необхідність доведено.

Доведемо *достатність*. Нехай f — згортувач у $\tilde{\Phi}$, тоді згідно з теоремою 3 і лемою 1 функція $\tilde{U}(t,\xi) = \tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}$, $(t,\xi) \in \Omega$, є елементом простору Φ при кожному $t > 0$, причому вона є розв'язком задачі Коші (8), (9). Доведемо, що цей розв'язок єдиний у просторі Φ. Для цього припустимо, що існує у цьому просторі ще один розв'язок $\tilde{U}_1$ цієї задачі. На підставі структури загального розв'язку (10) рівняння (8)

$$\tilde{U}_1(t,\xi) = c_1(\xi)e^{-t\xi^{2m}}, \quad (t,\xi) \in \Omega,$$

і оскільки $\tilde{U}_1(t,\cdot) \in \Phi$, $t > 0$, то функція $c_1(\cdot)$ — мультиплікатор у просторі Φ.

Розглянемо функцію $V(t,\cdot) = \tilde{U}_1(t,\cdot) - \tilde{U}(t,\cdot)$, $t > 0$, яка також є розв'язком рівняння (8). Вона задовольняє умову $V(t,\cdot) \xrightarrow[t \to +0]{} 0$ у просторі Φ'. Звідси, враховуючи те, що різниця мультиплікаторів у просторі Φ є мультиплікатором у цьому просторі, отримуємо

$$\langle V(t,\xi), \varphi(\xi) \rangle = \left\langle \left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)e^{-t\xi^{2m}}, \varphi(\xi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \tilde{f}(\xi) - c_1(\xi), e^{-t\xi^{2m}}\varphi(\xi) \right\rangle \xrightarrow[t \to +0]{} \left\langle \tilde{f}(\xi) - c_1(\xi), \varphi(\xi) \right\rangle =$$

$$= \langle 0, \varphi(\xi) \rangle, \quad \xi \in R, \quad \varphi \in \Phi.$$

Отже,

$$\forall \varphi \in \Phi: \quad \left\langle \tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot), \varphi(\cdot) \right\rangle = 0.$$

Покладаючи в останній рівності

$$\varphi(\xi) = \overline{\left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)}e^{-\xi^{2m}} \in \Phi, \quad \xi \in R,$$

одержуємо

$$\left\langle \left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right), \overline{\left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)}e^{-\xi^{2m}} \right\rangle = \int_R \overline{\left(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)\right)}e^{-\xi^{2m}}\, d\xi = 0.$$

Звідси $\tilde{f}(\xi) = c_1(\xi)$ майже скрізь на R. Але оскільки $\tilde{f}(\cdot)$ і $c_1(\cdot)$ — нескінченно диференційовні функції, ця рівність справджується скрізь на R, тобто

$$\tilde{U}_1(t,\xi) \equiv U(t,\xi), \quad (t,\xi) \in \Omega.$$

Отже, задача Коші (8), (9) має єдиний розв'язок у просторі Φ.

Далі встановимо виконання умови 2 цієї теореми для розв'язку рівняння (8). Оскільки

$$F\left[\frac{\partial}{\partial t}U\right] = F\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right]\right)\right], \quad t > 0,$$

то досить довести, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right]\right) = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right)\right], \quad t > 0, \tag{11}$$

тобто

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right]\right) = -F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\xi^{2m}\right]$$

для кожного фіксованого $t > 0$. Для цього зафіксуємо довільним чином $t = t_0 > 0$ і виберемо $\delta > 0$ таке, що $t_0 > \delta$. Тоді

$$\forall\, t \geq \delta: \ \left|F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right)\right]\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_R \tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\xi^{2m}e^{-ix\xi}\, d\xi\right| \leq$$

$$\leq \int_R \left|\tilde{f}(\xi)\right| e^{-\delta\xi^{2m}}\xi^{2m}\, d\xi < +\infty,$$

тобто інтеграл $\int_R \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right)e^{-ix\xi}\, d\xi$ рівномірно збігається відносно $t \geq \delta$ і $x \in R$. Оскільки $\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right)e^{-ix\xi}$ — неперервна функція за сукупністю змінних $x \in R$, $\xi \in R$ і $t \geq \delta$, то згідно з відомою теоремою математичного аналізу одержуємо виконання рівності (11) для кожного $t \geq \delta$, а отже, і для $t = t_0$. Довільність вибору $t = t_0$ і доводить виконання умови 2 даної теореми для розв'язку рівняння (8).

Нарешті, зважаючи на те, що

$$U(t,\cdot) = F^{-1}\left[\tilde{U}(t,\xi)\right] = F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)e^{-t\xi^{2m}}\right], \quad t > 0,$$

і беручи до уваги твердження теореми 3, одержуємо

$$U(t,\cdot) = f * G_t(\cdot), \quad t > 0.$$

Розв'язок U задачі Коші (6), (7) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок $\tilde{U}$ має таку властивість, а F^{-1} є неперервним оператором з Φ у $\tilde{\Phi}$. Теорему доведено.

Зауважимо, що всі наведені тут твердження справедливі і у випадку n-вимірного евклідового простору, якщо замість D_x^2 у рівнянні (6) розглядати оператор Лапласа.

1. *Городецкий В. В.* О периодической задаче Коши для уравнений параболического типа в классах обобщенных функций // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 10. – С. 1745 – 1750.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. *Schwartz L.* Theorie des distributions // Acta. Sci industr. – 1950. – **1**, № 1091.
4. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 949 – 952.

Одержано 13.11. 2000