УДК 513.83

И. Ю. Власенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ A-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

We consider periodic components of A-diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. We study properties of these components and give the topological description of their boundaries.

Розглядаються періодичні компоненти A-дифеоморфізмів на двовимірних многовидах. Вивчаються їхні властивості та наводиться топологічний опис їх меж.

Пусть M — замкнутое двумерное многообразие, $f: M \to M$ — диффеоморфизм.

Определение 1. *Неблуждающей точкой f называется точка $x \in M$ такая, что для любой $U(x)$ существует $m \neq 0$ такое, что $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$ ($U(x)$ — окрестность точки x).*

Множество всех неблуждающих точек f обозначим $\Omega(f)$. $\Omega(f)$ замкнуто в M. Если точка $x \in M$ не является неблуждающей точкой, она называется *блуждающей*. Во множестве всех блуждающих точек выделяются подмножества благодаря понятию регулярности, введенному Биркгофом и Смитом [1].

Определение 2. *Блуждающая точка x называется ω-(или α-)регулярной, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(x)$ — δ-окрестность точки x и $N > 0$ такие, что для любого $k > N$ ($k < N$) $f^k(\delta(x)) \subset \varepsilon(\Omega)$, где $\varepsilon(\Omega)$ — ε-окрестность множества Ω, $f^k(\delta(x))$ — образ $\delta(x)$ при отображении f^k.*

Определение 3. *Блуждающая точка $x \in M$ называется регулярной, если она одновременно и ω- и α-регулярна. В противном случае она называется нерегулярной.*

Множества ω-(α-) регулярных и регулярных точек открыты в M. Максимальные связные компоненты этих множеств называются ω-(или α-)регулярными или регулярными компонентами.

Обозначим через S такую компоненту. В силу максимальности она может быть одного из двух типов: *блуждающая компонента*, если $f^k(S) \cap S = \varnothing$, $k \neq 0$; *периодическая компонента порядка* $q \geq 1$, если $f^q(S) = S$, $f^k(S) \cap S = \varnothing$, $k = 1, \ldots, q-1$.

В работах [1 – 3] показано, что любая периодическая регулярная компонента S имеет топологический тип либо односвязной, либо двусвязной области в $\mathbb{R}^2$, причем в случае двусвязной области обе компоненты связности границы S лежат во множестве неблуждающих точек.

Заметим, что периодическая регулярная компонента S всегда линейно связна как открытое подмножество локально линейно связного множества.

Обозначим через $O(x)$ траекторию точки x (множество $\{f^n(x) | x \in \mathbb{Z}\}$), а через $O^+(x)$ и $O^-(x)$ множества $\{f^n(x) | x \in \mathbb{Z}^+\}$ и $\{f^n(x) | x \in \mathbb{Z}^-\}$ соответственно.

Определение 4. *Диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A, если Ω гиперболическое для f и периодические точки f плотны в Ω.*

Если $\dim A = 2$, то из гиперболичности Ω следует, что периодические точки f плотны в Ω. Определение и свойства гиперболических множеств можно найти, например, в [4].

Пусть d — метрика на M, $x \in \Omega$. Определим устойчивое и неустойчивое многообразия точки x:

$$W^s(x) = \{y \in M | d(f(x), f(y)) \to 0,\ n \to +\infty\},$$

$$W^u(x) = \{y \in M | d(f(x), f(y)) \to 0,\ n \to -\infty\}.$$

Под устойчивым (неустойчивым) многообразием множества будем понимать объединение устойчивых (неустойчивых) многообразий составляющих его точек.

Теорема о спектральном разложении [5]. *Пусть f удовлетворяет аксиоме A. Тогда справедливо разложение $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_n$, где Ω_k — попарно не пересекающиеся, замкнутые, инвариантные, топологически транзитивные базисные множества, для которых имеет место локальная структура произведения, т. е. для любых равномерно близких x, $y \in \Omega_k$ пересечение $W^s_{\text{loc}}(x) \cap W^s_{\text{loc}}(y)$ состоит в точности из одной точки, принадлежащей Ω_k. При этом для M справедливо разложение на попарно не пересекающиеся части $M = \bigcup_{k=1}^n W^u(\Omega_k)$.*

Среди базисных множеств вводится отношение $>$. Именно, $\Omega_i > \Omega_j$, если существует $x \in M$ такая, что $\alpha(x) \subset \Omega_i$, $\omega(x) \subset \Omega_j$ (здесь $\alpha(x) = \mathrm{cl}\, O^+(x) \setminus O^+(x)$, $\omega(x) = \mathrm{cl}\, O^-(x) \setminus O^-(x)$). Может случиться, что отношение $>$ не является частичным порядком, т. е. существуют циклы $\Omega_{i_1} > \ldots > \Omega_{i_k} > \Omega_{i_1}$. Если циклов нет, то говорят, что f удовлетворяет *условию ацикличности.*

Определение 5. *Базисное множество Ω называется аттрактором (репеллером), если $W^s(\Omega) = \Omega$ (если $W^u(\Omega) = \Omega$). Если базисное множество не является аттрактором или репеллером, оно называется седловым базисным множеством.*

В двумерном случае имеются следующие классы базисных множеств, не являющихся орбитами периодических точек: одномерные аттракторы, одномерные репеллеры, нульмерные нетривиальные седловые базисные множества. Кроме того, если f — диффеоморфизм Аносова на торе, то тор является двумерным базисным множеством.

Периодические компоненты были впервые изучены в работах [1, 2]. В работе [6] получены результаты, относящиеся к периодическим компонентам диффеоморфизмов Морса – Смейла. Данная работа посвящена периодическим компонентам A-диффеоморфизмов. Наше изложение опирается на работы [7, 3] (во второй собраны все базовые понятия, используемые в данной работе).

Пусть M — замкнутое двумерное многообразие, $f: M \to M$ — диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A. Следующая лемма устанавливает связь между разбиением многообразия на устойчивые и неустойчивые многообразия и разбиением на множества регулярных точек.

Лемма 1. $x \in W^s(\Omega_i)$ *— ω-регулярна $\Leftrightarrow$ Ω_i — аттрактор (соответ-*

ственно, $x \in W^u(\Omega_i)$ — α-регулярна $\Leftrightarrow$ Ω_i — репеллер).

Доказательство. В случае, если Ω_i — периодическая траектория, утверждение леммы легко получить, используя λ-лемму (см. [4]). Пусть Ω_i — нетривиальное базисное множество.

Необходимость. $W^s(\Omega_i)$ является объединением устойчивых многообразий точек Ω_i. Обозначим через $W^s(y)$, $y \in \Omega_i$, устойчивое многообразие, проходящее через точку x. Покажем, что любая окрестность $U(x)$ точки x содержит устойчивое многообразие некоторой периодической точки из Ω_i.

В самом деле, допустим, что существует окрестность $U_0(x)$, не содержащая устойчивых многообразий периодических точек из Ω_i. Тогда образ этой окрестности под действием f^n, где n — такое, что $f^n(x)$ принадлежит $W^s_{\text{loc}}(x)$ из условия теоремы об устойчивых многообразиях (см. [7]), также не содержит устойчивых многообразий периодических точек, что противоречит плотности периодических точек в Ω_i и локальной структуре прямого произведения в окрестности x.

По определению точка x имеет окрестность, целиком состоящую из регулярных точек. Будем искать необходимое условие того, чтобы лежащая в этой окрестности точка x_1, принадлежащая устойчивому многообразию $W^s(p)$ периодической точки $p \in \Omega_i$, была регулярной.

Рассмотрим критерий регулярности точки (см. определение в [3]). Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(x_1)$ и $N > 0$ такие, что для любого $k > N$ $f^k(\delta(x_1)) \subset \varepsilon(\Omega_i)$ (мы можем сразу взять Ω_i вместо $\Omega(f)$, так как $x_1 \in \in W^s(\Omega_i))$.

Поскольку x_1 — блуждающая точка, то можно считать, что окрестности $f^k(\delta(x_1))$ дизъюнктивны, т. е. для любого $k \neq 0$ $f^k(\delta(x_1)) \cap \delta(x_1) = \varnothing$. Кроме того, так как регулярная точка регулярна в окрестности, можно считать, что и граница $\delta(x_1)$ состоит из регулярных точек. При этих условиях легко видеть, что множество $\Delta(x_1) = \partial\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} f^k(\delta(x_1))\right)$ не зависит от N. Вследствие λ-леммы для семейства трансверсальных дисков при достаточно малых $\delta(x_1)$ $\Delta(x_1)$ не зависит от выбора $\delta(x_1)$ и равно $\text{closure}(W^u(x_1))$. Получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ $\Delta(x_1) \subset \varepsilon(\Omega_1)$, и, следовательно, точки Ω_i всюду плотны в $\Delta(x_1) = \text{closure}(W^u(x_1))$. В силу замкнутости Ω_i имеем $W^u(x_1) \in \Omega_i$. В двумерном случае из [7] автоматически следует, что Ω_i — аттрактор, так как $\dim \Omega_i > 0$. Но и в общем случае можно показать, что $W^u(\Omega_i) \subset \Omega_i$, т. е. Ω_i — аттрактор.

Достаточность. Представим Ω_i в виде $\Omega_i = \bigcap_{n \geq 1} f^n\left(W^s(\Omega_i, \varepsilon)\right)$. Последовательность $\{f^n(W^s(\Omega_i, \varepsilon)), n \geq 1\}$ строго монотонно сходится к Ω_i. Поскольку Ω_i — аттрактор, то элементы последовательности являются окрестностями Ω_i. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $x \in f^{k-1}(W^s(\Omega_i, \varepsilon)) \setminus f^k(W^s(\Omega_i, \varepsilon))$. Взяв малую окрестность x, вложенную в $f^{k-1}(W^s(\Omega_i, \varepsilon)) \setminus f^k(W^s(\Omega_i, \varepsilon))$, получим ω-регулярность непосредственно из определения.

Следствие 1. *Из разложения $M = \bigcup_{k=1}^{n} W^u(\Omega_k)$ и приведенной выше леммы следует, что каждая периодическая компонента содержится в пере-*

сечении устойчивого многообразия некоторого аттрактора и неустойчивого многообразия некоторого репеллера.

Топологические свойства периодических компонент. Поскольку задача изучения топологических свойств периодических компонент имеет решение в случае, когда диффеоморфизм рассматривается с точностью до топологической сопряженности, то вся информация о периодической компоненте содержится в ее границе. Граница периодической компоненты в силу ее максимальности содержится в объединении множеств нерегулярных и неблуждающих точек. Рассмотрим сначала двусвязные периодические компоненты.

Следующая лемма непосредственно следует из леммы 3 в [3].

Лемма 2. *Периодическая компонента S двусвязна $\Leftrightarrow$ ее граница ∂S содержится в объединении аттрактора и репеллера.*

Строение аттракторов и репеллеров было изучено в работах [7, 8]. Из них следует, что достижимая граница со стороны каждого нетривиального базисного множества является связкой, а ее замыкание представляет собой ту компоненту базисного множества, которая содержит эту связку. Если же соответствующее базисное множество тривиально, то соответствующая компонента связности границы представляет собой периодическую точку.

Односвязные периодические компоненты. Поскольку аттрактор и репеллер являются замкнутыми отделимыми множествами, то кроме них в границу односвязной и периодической компоненты всегда входят точки седловых базисных множеств и их устойчивых и неустойчивых многообразий.

Рассмотрим, каким образом входят базисные множества в границу односвязной периодической компоненты S.

Граница между односвязной периодической компонентой и аттрактором (репеллером).

Лемма 3. *Пусть в достижимую границу периодической компоненты S входит точка x из многообразия $W^u(p)$ периодической точки p аттрактора Ω_i. Тогда p и хотя бы одна из двух связных компонент многообразия $W^u(p)\setminus\{p\}$ также входят в достижимую границу периодической компоненты S.*

Доказательство. Предположим, не ограничивая общности, что S инвариантна. Поскольку M — компакт, то из открытости и связности S следует ее линейная связность.

Рассмотрим случай, когда x не совпадает с p. Поскольку граница S инвариантна, x и $f(x)$ принадлежат достижимой границе S. Соединим их лежащей в S кривой Ξ. Поскольку S содержится в $W^s(\Omega_i)$, замкнутый контур $\Xi \cup [x, f(x)]^u \subset W^u(p)$ разбивает двусвязную область $W^s(\Omega_i)$ на части.

Можно предполагать, что этот контур ограничивает в $W^s(\Omega_i)$ диск. В противном случае этот контур легко построить. Отнимем от области, ограниченной этим контуром, ее образ под действием f. $W^s(\Omega_i)$ инвариантна, под действием f ее граница перейдет в границу и разность контуров не будет содержать второй компоненты границы $W^s(\Omega_i)$. Выберем связную компоненту разности, содержащую $[x, f(x)]^u$. Ее граница состоит из $[x, f(x)]^u$ и кривой Ξ', вложенной в S, состоящей из отрезков дуг Ξ и $f(\Xi)$, по построению она односвязна.

Рассмотрим диск, ограниченный $[x, f(x)]^u$ и Ξ (или Ξ'). Он содержится в $W^s(\Omega_i)$, следовательно, состоит из ω-регулярных точек. Покажем, что на самом деле все его точки регулярны. Пусть он содержит нерегулярную точку. Из леммы 1 следует, что нерегулярная точка принадлежит неустойчивому многообразию некоторого седлового базисного множества. Но так как это седловое базисное множество не содержится в диске, то это неустойчивое многообразие должно пересечь границу диска. Но оно не может пересечь ее ни в точках $[x, f(x)]^u$, поскольку они принадлежат неустойчивому многообразию, ни в точках Ξ, так как они являются регулярными. Следовательно, все точки диска являются регулярными, а значит, отрезок $[x, f(x)]^u$ и все многообразие $W_i^u(p)$, содержащее x, тоже регулярны. Из открытости S следует, что p так же принадлежит достижимой границе S.

Рассмотрим случай, когда p принадлежит достижимой границе S. Тогда существует открытая дуга, лежащая в S, один из концов которой совпадает с x. Всегда можно считать, что эта дуга γ целиком расположена по одну сторону многообразия $W^s(p)$. Если это не так, возьмем дугу — связную компоненту $\gamma \setminus W^s(p)$, концом которой является p. (Пользуясь открытостью S, мы всегда можем считать, что γ находится в общем положении с $W^s(p)$.) Выберем точку $x \in \gamma$. S линейно связна как открытое подмножество локально линейно связного множества. Соединим x и $f(x)$ дугой δ, не пересекающейся с γ. Контур $\{p\} \cup (p, x] \cup \delta \cup (p, f(x)]$, где $(p, x] \subset \gamma$, $(p, f(x)] \subset f(\gamma)$, ограничивает открытое множество $D_0 \subset S$. D_0 и $f(D_0)$ имеют общую границу $(p, f(x)] \subset f(\gamma)$. Пусть D_1 — множество, ограниченное $\{p\} \cup (p, x] \cup \delta \cup \cup f(\delta) \cup (p, f^2(x)]$. Продолжим этот процесс. Воспользуемся λ-леммой о поведении диска, трансверсального к устойчивому многообразию периодической точки (см. [4], гл. 2, § 7). Согласно λ-лемме, для любых $\varepsilon > 0$ и $N \subset \subset W^u(p)$ существует такое n, что $f^n(D_0)$ ε-близок к $N \cap W_i^u(p)$, где $W_i^u(p)$ — подмногообразие, расположенное с той же стороны, что и x. Взяв объединение $\bigcup_{n \geq 0} D_n$, получим открытое множество, лежащее в S, в достижимую границу которого входит $W_i^u(p)$.

Следствие 2. *Если периодической компоненте S принадлежит многообразие $W^s(p)$ граничной точки p аттрактора Ω_i, то в достижимую границу периодической компоненты S входит все многообразие $W^u(p)$.*

Здесь имеют место условия второй части доказательства леммы: p — достижима, мы можем получить дугу γ, лежащую как выше, так и ниже $W^s(p)$, пользуясь открытостью S.

Лемма 4. *Достижимая граница аттрактора (репеллера) в S является связным множеством во внутренней топологии S, или, что эквивалентно, не существует дуги, лежащей в S, такой, что ее граница принадлежит аттрактору и она разбивает S на части так, что в каждой из получившихся частей кроме точек из достижимой границы аттрактора в S имеются и другие точки из границы S.*

Доказательство. Предположим, что указанная дуга существует. Эта дуга отсекает от устойчивого многообразия аттрактора (в котором и содержится S) некоторую область, целиком в нем содержащуюся и, следовательно, состоящую из ω-регулярных точек. Согласно предположению, в границе этой области содержится α-нерегулярная точка. Согласно лемме 1, она принадлежит неустойчивому многообразию некоторого седла или седлового базисного множества. Это неустойчивое многообразие не может целиком содержаться в рассматриваемой области, так как и седло, и седловое базисное множество не являются ω-регулярными точками. Не может оно и пересечь границу этой области, так как она состоит из точек аттрактора и регулярных точек кривой. Получили противоречие.

Граница между односвязной периодической компонентой и седловым базисным множеством.

Лемма 5 (лемма о седлообразном базисном множестве). *Пусть S — периодическая регулярная компонента f, Ω_i — седлообразное базисное множество. Тогда граница ∂S содержит конечное число периодических точек $\{p_1, \ldots, p_n\}$ из Ω_i, а непериодические точки из $\partial S \cap \Omega_i$ являются гетероклиническими точками пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий периодических точек из $\partial S \cap \Omega_i$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\partial S \cap \mathrm{Per}(f) \cap \Omega_i$ конечно.

Докажем от противного. Пусть $\partial S \cap \mathrm{Per}(f) \cap \Omega_i$ бесконечно. Поскольку M — компакт, то это множество имеет граничные точки, принадлежащие Ω_i в силу его замкнутости. Пусть z — такая граничная точка. Поскольку периодические точки всюду плотные в Ω_i, выберем в $\partial S \cap \mathrm{Per}(f) \cap \Omega_i$ последовательность периодических точек $(p_n, n \geq 1)$, сходящуюся к z. Заметим, что $z \in \partial S$, так как для любого $n \geq 1$ $p_n \in \partial S$.

Рассмотрим $\varepsilon(z)$ — ε-окрестность точки z со структурой прямого произведения. Крест из многообразий $W^u_{\mathrm{loc}}(z)$ и $W^s_{\mathrm{loc}}(p_n)$ разбивает эту окрестность на 4 четверти. Рассмотрим ту четверть, в которой лежит бесконечно много точек последовательности (p_n). Пусть p_k — точка, лежащая в этой четверти. Из структуры прямого произведения $\varepsilon(z) W^u_{\mathrm{loc}}(z)$ и $W^s_{\mathrm{loc}}(p_k)$ пересекаются в единственной точке α, соответственно $W^u_{\mathrm{loc}}(z)$ и $W^s_{\mathrm{loc}}(p_k)$ пересекаются в единственной точке β. Тогда стороны четырехугольника (z, α, p_k, β), состоящие из дуг указанных многообразий, состоят из нерегулярных точек, следовательно, не лежат в S. Но так как, по предположению, и внутри, и вовне этого четырехугольника лежат точки, принадлежащие S, он разбивает S на части, что противоречит связности S.

Изучим теперь непериодические точки из $\partial S \cap \Omega_i$. Если многообразие (устойчивое или неустойчивое) точки $q \in \Omega_i$ содержит периодическую точку p, то, как легко видеть из определения, p — единственная периодическая точка на этом многообразии. Обычно говорят, что q принадлежит соответствующему многообразию точки p. Разобьем непериодические точки из Ω_i на 3 класса: будем говорить, что точка x принадлежит

классу A, если оба ее многообразия (устойчивое и неустойчивое) содержат периодическую точку;

классу B, если только одно из ее многообразий содержит периодическую точку;

классу C, если оба ее многообразия (устойчивое и неустойчивое) не содержат периодических точек.

Докажем от противного, что точки из классов B и C не могут лежать на ∂S. Рассмотрим точку из класса C, лежащую на ∂S. Согласно следствию из теоремы 1.2 в [8] $W^u(x) \cap W^u(f^n(x)) = \varnothing$, $W^s(x) \cap W^s(f^n(x)) = \varnothing$ при $n \neq 0$ (в противном случае они бы содержали периодическую точку). Поскольку x лежит на ∂S, то и ее орбита лежит на ∂S, и доказательство в случае бесконечного числа точек орбиты с непересекающимися соответствующими многообразиями, лежащих на ∂S, как и в случае бесконечного числа периодических точек, приводит к противоречию со связностью S.

Рассмотрим точку x из класса B, лежащую на ∂S. Положим, для определенности, что x лежит на неустойчивом многообразии $W^u(x)$ точки $p \in$

$\in \mathrm{Per}(f)$, а $W^s(x)$ не содержит периодических точек. Тогда согласно следствию из теоремы 1.2 в [8] $W^s(x) \cap W^s(f^n(x)) = \varnothing$, $n \neq 0$. $O^+(x)$ лежит на ∂S. Поскольку M — компакт, а Ω_i — замкнуто, $O^+(x)$ имеет граничные точки в Ω_i. Пусть z — такая граничная точка. Рассмотрим малую ε-окрестность $\varepsilon(z)$ точки z со структурой прямого произведения. Пусть $W^u_{\mathrm{loc}}(x, \varepsilon)$ — связная компонента множества $W^u(x) \cap \varepsilon(x)$, содержащая точку x. Поскольку $W^s(x) \cap$ $\cap W^s(f^n(x)) = \varnothing$, $n \neq 0$, то, взяв малое ε, можно считать, что $W^s_{\mathrm{loc}}(z, \varepsilon)$ не содержит точек из $O^+(x)$.

Пусть $y \in O^+(x)$. Поскольку единственной граничной точкой $O(x)$ на многообразии $W^u(x)$ в его внутренней топологии является точка p, взяв малую окрестность $\varepsilon(z)$, не содержащую p, получим, что $W^u_{\mathrm{loc}}(y, \varepsilon)$ (и $W^u_{\mathrm{loc}}(z, \varepsilon)$) содержат не более конечного числа точек из $O^+(x)$. Взяв из каждого многообразия $\left\{W^u_{\mathrm{loc}}(y, \varepsilon) \mid y \in O^+(x)\right\}$ по одной точке из $O^+(x)$, построим подпоследовательность точек из $O^+(x)$, сходящуюся к точке z, у которых локальные устойчивые (неустойчивые) многообразия не пересекаются. Используя локальную структуру произведения, аналогично изложенному выше получаем противоречие со связностью S.

Рассмотрим точку из класса A, лежащую на ∂S. Если такая точка принадлежит ∂S, то и вся орбита, и обе граничные периодические точки (которые, может быть, совпадают) этой точки принадлежат ∂S.

Лемма доказана.

Следствие 3. *Части границы периодической компоненты S, состоящие почти всюду из нерегулярных точек, являются кусочно-гладкими кривыми, содержащимися в объединении устойчивых и неустойчивых многообразий конечного числа периодических точек седловых базисных множеств.*

Строение дополнения границы односвязной периодической компоненты к аттрактору и репеллеру. Обозначим через Q дополнение границы односвязной периодической компоненты к аттрактору и репеллеру. Как следует из изложенного выше, Q содержит только конечное число орбит неблуждающих точек, и, следовательно, описывается утверждением следствия 3. Исследуем подробное строение этого множества.

Заметим сначала, что Q естественным образом делится на две части: Q_1 и Q_2. В самом деле, возьмем произвольную точку $x \in S$ и, пользуясь линейной связностью S, соединим ее кривой μ с точкой $f^m(x) \in S$. Кривая $\nu =$ $= \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} f^{km}(\mu)$ имеет своими граничными множествами аттрактор и репеллер и разбивает S на две части. Разделим точки Q на два множества в зависимости от того, замыканию какой части S они принадлежат. При этом разложение Q на Q_1 и Q_2 не зависит от выбора x, так как в противном случае, взяв две кривые для различных разбиений x и соединив их дугой, мы сможем вложить в них кривую, запрещенную леммой 4.

Q_1 и Q_2 содержат конечное число периодических точек, являющихся седловыми. Обойдем Q_1 и Q_2 по направлению от репеллера к аттрактору, нумеруя встречающиеся по пути периодические точки. При этом может возникнуть ситуация, когда одна и та же периодическая точка встретится несколько раз, так же, как и в предыдущем случае могла возникнуть ситуация, когда точка из Q принадлежит и Q_1, и Q_2.

Эта неоднозначность возникает потому, что многообразия периодических точек могут входить в границу S как одной, так и другой стороной, а S может лежать по отношению к периодическим точкам сразу в нескольких четвертях, на которые разбивается окрестность периодической точки ее устойчивым и неустойчивым многообразиями.

Для общности результатов будем формально рассматривать каждую такую периодическую точку как несколько слившихся различных периодических точек с разными номерами, а общие для Q_1 и Q_2 точки как принадлежащие различным слившимся устойчивым и неустойчивым многообразиям. При таком подходе множество обобщенных периодических точек становится упорядоченным, при этом все обобщенные устойчивые и неустойчивые многообразия входят в Q только одной своей стороной и только одной связной компонентой дополнения к своей периодической точке.

Для возврата к конкретной ситуации нужно указать, что некоторые периодические точки и их многообразия могут совпадать между собой.

Лемма 6. *Пусть S — односвязна. Тогда в каждом из множеств Q_i, $i = 1, 2$, существует единственная (обобщенная) периодическая точка p такая, что ее устойчивое подмногообразие $W_j^s(p)$, входящее в границу S, не имеет точек пересечения с устойчивыми многообразиями тривиальных и нетривиальных седловых базисных множеств, и эта точка имеет номер* 1.

Доказательство. Легко видеть, что точка с номером 1 имеет указанные свойства. В самом деле, если такая точка пересечения принадлежит ∂S, то ∂S принадлежит и периодическая точка соответствующего неустойчивого многообразия, что невозможно, так как номер 1 имела бы она.

Покажем, что других таких точек в Q_i нет. Заметим, что у точки с указанным свойством граничным множеством ее устойчивого многообразия является аттрактор. Предположим от противного, что такая точка существует. Это значит, что, начав обход от аттрактора, мы снова вернулись к аттрактору и в малой окрестности этого контура в S можем построить кривую, запрещенную леммой 4.

Следствие 4. *В каждом из множеств Q_i, $i = 1, 2$, существует единственная (обобщенная) периодическая точка p такая, что $W_i^u(p)$ не имеет точек пересечения с устойчивыми многообразиями седловых базисных множеств, и эта точка имеет максимальный номер.*

Следствие 5. *У каждой периодической точки ее устойчивое многообразие пересекается с неустойчивым многообразием точки с предыдущим номером, а ее неустойчивое многообразие — с устойчивым многообразием точки со следующим номером.*

Рассмотрим подробнее строение множества Q_i, $i \in 1, 2$. Пусть x и y — две периодические точки, принадлежащие ∂S и $W_1^u(x) \cap W_1^s(y) \neq \varnothing$. Их пересечение может быть одного из трех типов:

A) $W_1^u(x) = W_1^s(y)$ и $\partial W_1^u(x) = y$;

B) $W_1^u(x) \neq W_1^s(y)$, но подмногообразие $W_i^u(y)$, входящее в ∂S, не входит в $\partial W_1^u(x)$;

C) $W_1^u(x) \neq W_1^s(y)$, но подмногообразие $W_j^u(y)$, которое не входит в ∂S, не входит в $\partial W_1^u(x)$;

D) $W_1^u(x) \neq W_1^s(y)$ и все многообразие $W^u(y)$ входит в $\partial W_1^u(x)$.

Если диффеоморфизм структурно устойчивый, строгое условие трансверсальности допускает только частный случай пересечения типа D — трансверсальное пересечение.

При обходе Q_i от репеллера к аттрактору различные типы пересечений чередуются между собой. Рассмотрим возможные сочетания этих типов. Легко видеть, что тип A пересечения возможен в сочетании с любым типом; так же реализуются сочетания BB, BC, CC, DC и BD.

Рассмотрим сочетание пересечения типа C, образованного точками x и y, с пересечением типа B, образованным точками y и y_1. Имеем $W_1^u(x) \neq W_1^s(y)$, и подмногообразие $W_1^u(y)$, которое входит в ∂S, входит в $\partial W_1^u(x)$, $W_1^u(y) \neq \neq W_1^s(y_1)$, и $W_1^u(y_1)$, входящее в ∂S, не входит в $\partial W_1^u(y)$, а следовательно, $W_1^s(y)$ входит в $\partial W_1^s(y_1)$. Тогда в малой окрестности точки y $W_1^u(y)$ и $W_1^s(y_1)$ пересекутся и точка y окажется отрезанной от S. Таким образом, сочетание CB не реализуется. Из тех же соображений не реализуются сочетания CD и DB и, тем более, DD.

Более того, аналогично можно показать, что не реализуются сочетания C … B, C … D, D … B и D … D, где X … Y — последовательность попарно допустимых переходов, начинающаяся на X и заканчивающаяся на Y. Все остальные последовательности реализуются.

Обозначим через 0 случай из леммы 6 и следствия 4, когда соответствующее многообразие не имеет точек пересечения с седловыми базисными множествами. Тогда множества Q_i, $i \in 1, 2$, можно описать в виде 0 { WAB } { D } { WAC } 0, где { D } — слово, состоящее из одной буквы D либо пустое, { WAB } и { WAC } — произвольные (в том числе пустые) слова, состоящие из наборов двух букв A и B и A и C соответственно.

Заметим, что если f — структурно устойчивый диффеоморфизм, то для Q_i реализуются только 2 слова: 00 и 0D0.

Обозначим через ΔQ_i пересечение достижимой границы S с Q_i.

Рассмотрим часть Q_i, описывающуюся словом вида A … A. Мы видим, что для нее соответствующие половины устойчивых и неустойчивых многообразий точек совпадают между собой и входят сразу и в Q_i, и в ΔQ_i. Назовем такую часть Q_i *кривой типа* J.

Рассмотрим часть Q_i, описывающуюся словом вида 0{ WAB }, где { WAB } — произвольная комбинация букв A и B. Заметим, что, вообще говоря, в Q_i входят теперь только соответствующие половины устойчивых многообразий точек, а точки неустойчивых многообразий включаются только в том случае, если они одновременно принадлежат устойчивым.

Пройдем ее в обратном направлении. До первого вхождения справа буквы B соответствующая часть Q_i имеет вид A … A и общие многообразия соответствующих точек входят в Q_i и в ΔQ_i полностью. Уже при первом вхождении буквы B в слово устойчивое многообразие соответствующей точки, согласно определению и лемме 1, содержит α-регулярные точки и имеет своим граничным множеством аттрактор. Это приводит к тому, что оно экранирует остальные многообразия и оказывается последним в этом направлении многообразием, входящим в достижимую границу S.

Таким образом, соответствующая часть Q_i является объединением устойчивых многообразий входящих в нее точек, а соответствующая часть ΔQ_i — объединением устойчивых многообразий точек начиная с крайней вплоть до точки, образующей первое пересечение типа B. Назовем такую часть Q_i *кривой типа* V_α, а соответствующую часть ΔQ_i *кривой типа* ΔV_α.

При замене f на f^{-1} слово вида 0 { WAB } перейдет в слово { WAC } 0. Получаем, что часть Q_i, соответствующая слову вида {WAC} 0, является объединением неустойчивых многообразий входящих в нее точек, а соответствующая часть ΔQ_i — объединением неустойчивых многообразий точек начиная с крайней вплоть до точки, образующей первое пересечение типа C. Назовем такую часть Q_i *кривой типа* V_ω, а соответствующую часть ΔQ_i *кривой типа* ΔV_ω.

При появлении в слове буквы D ни одно из соответствующих устойчивого и неустойчивого многообразий, образующих пересечение типа D, не входит в Q_i полностью. Соответствующая часть Q_i состоит из кривой, образованной чередующимися отрезками соответствующих D устойчивого и неустойчивого многообразий. Назовем такую часть Q_i *кривой типа* L.

Поскольку сочетания вида C…D и D…B запрещены, кривая L всегда экранирует слова $\{WAB\}$ и $\{WAC\}$ и $\Delta Q_i = L$.

Слившиеся точки в границе периодической компоненты. Уточним теперь, какие периодические точки и их многообразия могут совпадать между собой. Легко видеть, что каждая периодическая точка встретится в Q не более чем трижды, так как если бы периодическая точка встретилась в Q четырежды, она принадлежала бы второй компоненте связности ∂S, что невозможно в силу односвязности S. Тем более периодическая точка встретится в Q_1 или Q_2 не более чем трижды. Можно построить пример периодической компоненты на неориентируемом многообразии, для которой точка p_1 входит в Q_1 трижды с номерами 1, 2, 3.

Таким образом, множество Q можно получить при отождествлении периодических точек и их многообразий из множества некоторой периодической компоненты, в границе которой все точки не слившиеся, при условии, что у полученного множества возникающие циклы не становятся неблуждающими множествами. (Можно построить примеры, когда это условие нарушается. При этом теряется гиперболичность f.)

***Замечание* 1.** Если f удовлетворяет свойству отсутствия циклов, то каждая периодическая точка встретится в Q не более чем дважды, а в каждом из Q_1 или Q_2 — не более чем один раз, за исключением случая, когда периодическая точка принадлежит нетривиальному базисному множеству, образуя гомоклиническое пересечение (тип D).

В самом деле, повторное вхождение точки в одну из компонент множества Q создает цикл.

Характеризация границы односвязных периодических компонент. Обобщим результаты этого пункта в одной теореме.

Теорема 1 (об односвязных периодических компонентах).

1. *В границу инвариантной компоненты S диффеоморфизма входит в точности по одной компоненте связности аттрактора и репеллера. При этом если аттрактор или репеллер нетривиальный, то соответствующая часть достижимой границы S со стороны аттрактора (репеллера) связна и имеет вид*

$$\left[W_j^\sigma(p_0)\cup\right]\bigcup_{k=0}^{k=n-1}\left(W_i^\sigma(p_k)\cup W_j^\sigma(p_{k+1})\right)\left[\cup W_j^\sigma(p_0)\right],$$

где для каждых $W_i^\sigma(p_k)$ и $W_j^\sigma(p_{k+1})$ найдется соединяющая их дуга связки Θ, лежащая в S, для точек $p_1,\ldots,p_{n-1}$ в соответствующую часть достижимой границы S входит все многообразие $W^\sigma(p_k)=W_i^\sigma(p_k)\cup W_j^\sigma(p_k)$, а для точек p_0 и p_n может входить как все многообразие, так и его половина.

2. *Каждая из двух компонент связности, на которые распадается дополнение границы S к аттрактору и репеллеру, вложена в объединение устой-*

чивых и неустойчивых многообразий конечного числа седловых периодических точек.

3. *Если в этой компоненте границы найдутся седловые периодические точки* x_α *и* x_ω *(может быть, совпадающие между собой), образующие пересечение типа* D, *то соответствующая часть достижимой границы* S *является кривой* $L(x_\alpha, x_\omega)$, *а соответствующая часть* ∂S *имеет вид* $V_\alpha(x_\alpha) \cup \cup L(x_\alpha, x_\omega) \cup V_\omega(x_\omega)$.

4. *В противном случае найдутся седловые периодические точки* x_α *и* x_ω *(может быть, совпадающие между собой) такие, что соответствующая часть* ∂S *имеет вид* $V_\alpha(x_\alpha) \cup J(x_\alpha, x_\omega) \cup V_\omega(x_\omega)$, *а* $V_\alpha(x_\alpha)$ *и* $V_\omega(x_\omega)$ *не содержат в своем начале кривой вида* J. *При этом допускается случай, когда* $J(x_\alpha, x_\omega) = \varnothing$.

Здесь $\sigma = u$ *для аттрактора и* $\sigma = s$ *для репеллера.*

1. *Birkhoff G., Smith P.* Structure analysis of surface transformations // J. Math. – 1928. – **7**. – P. 357 – 369.
2. *Smith P.* The regular components of surface transformations // Amer. J. Math. – 1930. – **52**, № 2. – P. 357 – 369.
3. *Арансон С. Х., Медведев В. С.* Регулярные компоненты гомеоморфизмов n-мерной сферы // Мат. сб. – 1971. – **85**, № 1. – С. 3 – 17.
4. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
5. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – **73**. – P. 747 – 792.
6. *Bezen A.* On the topological properties and the topological conjugacy of two-dimensional Morse – Smale diffeomorphisms // Random and Comput. Dynamic. – 1994. – **2**, № 2. – P. 183 – 203.
7. *Плыкин Р. В.* О геометрии гиперболических аттракторов // Мат. заметки. – 1984. – **39**, № 6. – С. 75 – 113.
8. *Плыкин Р. В.* Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей // Мат. сб. – 1974. – **94**, № 2. – С. 243 – 264.

Получено 16.03.99