УДК 512.542

А. Ф. Васильев (Гомел. ун-т, Беларусь)

ОБ АБНОРМАЛЬНО ФАКТОРИЗУЕМЫХ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ

We study hereditary formations closed with respect to taking products of abnormal subgroups of finite soluble groups. We obtain a constructive description of soluble local hereditary formations of finite groups with a given property.

Вивчаються спадкові формації, замкнені відносно взяття добутків абнормальних підгруп скінченних розв'язних груп. Отримано опис розв'язних локальних спадкових формацій скінченних груп із даною властивістю.

Б. Амберг, Л. С. Казарин и Б. Хефлинг [1] изучали наследственные формации $\mathfrak{F}$ конечных групп, замкнутые относительно групп, представимых в виде произведения своих попарно перестановочных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Ранее Т. Хоукс [2] и Р. Брайс, Д. Косси [3] исследовали наследственные формации конечных разрешимых групп, замкнутые относительно произведений нормальных подгрупп.

Полярной к понятию нормальности в теории групп является абнормальность. Подгруппа H группы G называется *абнормальной* в G, если для любого $g \in G$ имеет место $g \in \langle H, H^g \rangle$. Обозначается $H \operatorname{abn} G$.

В настоящей работе изучаются наследственные формации конечных разрешимых групп, замкнутые относительно взятия произведений абнормальных подгрупп. В дальнейшем рассматриваются только конечные разрешимые группы. Для удобства изложения и сокращения записей введем следующее определение.

Определение. *Класс $\mathfrak{X}$ назовем R_{an}-замкнутым (слабо R_{an}-замкнутым), если $\mathfrak{X}$ содержит любую группу $G = AB$, где A, B — абнормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы группы G (соответственно, $\mathfrak{X}$ содержит любую группу G, имеющую абнормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы A и B такие, что $(|G:A|, |G:B|) = 1$).*

Цель настоящей статьи — доказать следующий результат.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ является R_{an}-замкнутой формацией;*

2) *$\mathfrak{F}$ является слабо R_{an}-замкнутой формацией;*

3) *$\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$, где $\bigcup_{i \in I} \pi_i = \pi(\mathfrak{F})$ и $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для всех $l \neq k$ из I.*

***Замечание* 1.** Выделенное в п. 3 теоремы семейство формаций в точности совпадает с семейством насыщенных наследственных формаций, имеющих решеточное свойство. Напомним [4], что формация $\mathfrak{F}$ имеет решеточное свойство, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в каждой конечной группе. Формации с таким свойством изучались в работах [4, 5].

***Замечание* 2.** Требование насыщенности формации $\mathfrak{F}$ в теореме является существенным. Примеры ненасыщенных R_{an}-замкнутых наследственных формаций дает следующее предложение.

Предложение. *Любая подформация формации всех нильпотентных групп является R_{an}-замкнутой, в частности, формация всех абелевых групп R_{an}-замкнута.*

Предполагается, что читатель знаком с теорией формаций. Используются обозначения и терминология из [6, 7]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе. Формация $\mathfrak{F}$ называется наследственной (S-замкнутой), если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, тогда $D_0\mathfrak{X}$ обозначает класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times \ldots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для $i = 1, \ldots, t$; $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ — класс всех минимальных не $\mathfrak{X}$-групп, т. е. групп, у которых данному классу $\mathfrak{X}$ принадлежат все собственные подгруппы и только они; $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех различных простых делителей порядков групп, которые принадлежат $\mathfrak{X}$. Для специальных классов групп и некоторого множества простых чисел π применяются обозначения: $\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех разрешимых π-групп; $\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π-групп; $\mathfrak{N}^2$ — класс всех метанильпотентных групп. Отдельно отметим, что группа называется монолитической, если ее цоколь является минимальной нормальной подгруппой. В статье используется понятие регулярного сплетения и применяется обозначение $A \wr B$. Через $G = [K]M$ обозначается полупрямое произведение подгрупп K и M группы G с $K \lhd G$ и $K \cap M = 1$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть H — подгруппа группы G и $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $H \subseteq W \subseteq G$ и $H \operatorname{abn} W$, то $HN/N \operatorname{abn} WN/N$*;

2) *если $N \subseteq H$ и $H/N \operatorname{abn} G/N$, то $H \operatorname{abn} G$.*

Доказательство осуществляется проверкой соответствующих определений.

Лемма 2. *Если $H \operatorname{abn} G$, то $U = N_G(U)$ для любой подгруппы $U \supseteq H$.*

Доказательство. Пусть $x \in N_G(U)$. Тогда $x \in \langle H^x, H \rangle \subseteq \langle U^x, U \rangle = U$. Лемма доказана.

Напомним [6], если $\mathfrak{X}$ — формация, а $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то класс $\mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X}$ определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$-проектор группы G принадлежит $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то $\mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X} = \varnothing$. Известно [6], что $\mathfrak{F} \downarrow \mathfrak{X}$ — формация.

Если $\mathfrak{F}$ — формация, то $\mathfrak{F}^S$ обозначает максимальный наследственный подкласс из $\mathfrak{F}$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{F}^S$ — формация.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация, h — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный наследственный локальный экран φ, причем $\varphi(p) = (\mathfrak{F} \downarrow h(p))^S$ и $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p\varphi(p)$ для любого простого p*;

2) *$\mathcal{M}(\varphi(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}$ для любого простого p.*

Доказательство. Согласно теореме 3.3 из [7] следует, что $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран h. Пусть φ — такой локальный экран, что $\varphi(p) = (\mathfrak{F} \downarrow h(p))^S$ для любого простого p. Поскольку $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, по теореме 4.7 из [7] $h(p)$ — наследственная формация для любого простого p. Поэтому $h(p) \subseteq \varphi(p)$ для любого простого p, а значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF(\varphi)$.

Докажем, что $LF(\varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что множество $LF(\varphi) \setminus \mathfrak{F}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, совпадающую с $G^{\mathfrak{F}}$. Согласно выбору G имеем $G/C_G(N) \in \varphi(r) \cap \mathfrak{F} = h(r)$, где r делит $|N|$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{F} = LF(\varphi)$.

Пусть f — произвольный наследственный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Пусть f_1 — такой локальный экран формации $\mathfrak{F}$, что $f_1(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ для любого простого p. Тогда $f_1 \le h$. Учитывая, что $\mathfrak{F}$-проекторы группы принадлежат $\mathfrak{F}$, получаем $f(p) \subseteq (\mathfrak{F} \downarrow f(p))^S = (\mathfrak{F} \downarrow f_1(p))^S \subseteq (\mathfrak{F} \downarrow h(p))^S = \varphi(p)$ для любого простого p. Значит, $f \le \varphi$.

Покажем, что φ — полный экран. Определим новую функцию φ_1 следующим образом: $\varphi_1(p) = \mathfrak{N}_p\varphi(p)$ для любого простого p. Покажем, что φ_1 — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq LF(\varphi_1)$. Установим, что $LF(\varphi_1) \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что множество $LF(\varphi_1)\setminus\mathfrak{F}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем $N = G^{\mathfrak{F}}$ и N — r-группа для некоторого простого числа r. Поскольку $G \in LF(\varphi_1)$, то $G/C_G(N) \in \varphi_1(r)$. Ввиду леммы 3.9 из [7] $O_r(G/C_G(N)) = 1$. Следовательно, $G/C_G(N) \in \varphi(r)$, откуда получаем $G \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $LF(\varphi_1) = \mathfrak{F}$. Нетрудно видеть, что φ_1 — наследственный локальный экран. Из максимальности φ следует $\varphi = \varphi_1$. Утверждение 1 леммы доказано.

Установим справедливость утверждения 2. Пусть $G \in \mathcal{M}(\varphi(p))$. Сначала докажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Допустим противное. Пусть H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Так как G не принадлежит $\mathfrak{F}$, H является собственной подгруппой группы G. Из $H \in \varphi(p) = (\mathfrak{F} \downarrow h(p))^S$ следует, что $H \in \mathfrak{F} \downarrow h(p)$. Ввиду того, что H — $\mathfrak{F}$-проектор в H, имеем $H \in h(p)$. Но тогда $G \in \mathfrak{F} \downarrow h(p)$, а значит, $G \in \varphi(p)$. Получили противоречие. Итак, $G \in \mathfrak{F}$. Учитывая наследственность формаций $\mathfrak{F}$ и $h(p)$ и то, что $\varphi(p) \cap \mathfrak{F} = h(p)$, получаем $G \in \mathcal{M}(h(p))$. Следовательно, $\mathcal{M}(\varphi(p)) \subseteq \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Группу G назовем *критической минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой неединичной нормальной подгруппы N из G. Ясно, что любая критическая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является монолитической.

Лемма 4. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и любая критическая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является группой простого порядка, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Возьмем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{S}_\pi\setminus\mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{S}_\pi$ — наследственная формация, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Более того, G является критической минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Тогда $|G| = p$. Так как $p \in \pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если любая максимальная подгруппа M группы G такая, что $MF(G) = G$, нормальна в G, то G нильпотентна.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Тогда $F(G) \ne G$. Если $\Phi(G) \ne 1$, то для фактор-группы $G/\Phi(G)$ все условия леммы выполняются. Поэтому $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}$. Из насыщенности формации $\mathfrak{N}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}$. Противоречие с выбором G.

Пусть $\Phi(G) = 1$. Обозначим $D = \bigcap M$, где M пробегает все максимальные подгруппы группы G с условием $MF(G) = G$. Вначале предположим, что $D \ne 1$. Заметим, что $D \cap F(G) \subseteq \Phi(G)$. Из $\Phi(G) = 1$ следует $D \cap F(G) = 1$. Тогда из $D \lhd G$ вытекает $D \subseteq C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Поскольку $F(G) \ne 1$, получаем противоречие.

Следовательно, $D = 1$. С другой стороны, если $M \lhd G$ и $MF(G) = G$, то

$G/M = F(G)M/M \simeq F(G)/F(G) \cap M \in \mathfrak{N}$. Тогда $G/\bigcap M = G/D \simeq G \in R_0\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$. Противоречие с выбором G. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть в группе G имеется ненильпотентная максимальная подгруппа M с $M_G = 1$. Тогда в G найдутся по крайней мере две максимальные подгруппы H_1 и H_2 такие, что $H_i \operatorname{abn} G$, $i = 1, 2$, и $(|G : H_1|, |G : H_2|) = 1$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что G ненильпотентна и имеет ненильпотентную максимальную подгруппу M с $M_G = 1$. Тогда согласно п. 1 теоремы 5.12 из [6] группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N)$, $|N| = p^{\alpha}$, p — простое число и $G = [N]M$. Рассмотрим $F(M)$. Из $N = C_G(N)$ ввиду леммы 3.9 из [7] следует, что $F(M)$ является p'-группой. Так как M ненильпотентна, то $F(M) \neq M$.

Пусть R — произвольная максимальная подгруппа из M такая, что $RF(M) = M$. Если любая максимальная подгруппа R с таким свойством нормальна в M, то по лемме 5 M нильпотентна. Противоречие. Следовательно, в M имеется максимальная подгруппа R такая, что $RF(M) = M$ и $R = N_M(R)$. Заметим, что $|M : R|$ — p'-число. Рассмотрим подгруппы $H_1 = M$ и $H_2 = NR$. Нетрудно видеть, что $H_i \operatorname{abn} G$, $i = 1, 2$, и $(|G : H_1|, |G : H_2|) = 1$. Итак, H_1 и H_2 — искомые максимальные подгруппы. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $\mathfrak{X}_i$ — локальные наследственные формации и $\pi(\mathfrak{X}_i) \cap \pi(\mathfrak{X}_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$ из I, то $D_0(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{X}_i)$ — локальная наследственная формация.*

Доказательство проводится непосредственной проверкой соответствующих определений.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация и f — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *f — такой локальный экран, что для всех p и q из $\pi(\mathfrak{F})$ либо $f(p) = f(q)$, либо $f(p) \cap f(q) = 1$;*

2) $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{p\in\pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{N}_{\pi(f(p))} f(p))$.

Доказательство. Установим, что из утверждения 1 следует утверждение 2. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$ и для него справедливо утверждение 1 теоремы. Обозначим

$$\mathfrak{F}^* = D_0(\textstyle\bigcup_{p\in\pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{N}_{\pi(f(p))} f(p)).$$

Заметим, что $\mathfrak{N}_{\pi(f(p))} f(p)$ — локальная наследственная формация. Тогда по лемме 7 $\mathfrak{F}^*$ также является наследственной формацией.

Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Предположим, что множество $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^*$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Поскольку $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^*$ — локальные формации, то в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N = G^{\mathfrak{F}^*}$ и $\Phi(G) = 1$. В этом случае $C_G(N) = N$ и $|N| = p^{\alpha}$ для некоторого простого числа p. Из $G \in \mathfrak{F}$ следует $G/C_G(N) = G/N \in f(p)$. Так как $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$, то $p \in \pi(f(p))$. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}_{\pi(f(p))} f(p) \subseteq \mathfrak{F}^*$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Установим обратное включение $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^* \setminus \mathfrak{F}$. Тогда в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $K = G^{\mathfrak{F}}$, $C_G(K) = K$ и K — p-группа для некоторого простого числа p. Поскольку $G = H_1 \times \ldots \times H_s$, где $H_i \in \mathfrak{N}_{\pi(f(p_i))} f(p_i)$, $p_i \in \pi(\mathfrak{F})$, $i = 1, \ldots, s$, и K — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то $G = H_j \in \mathfrak{N}_{\pi(f(p_j))} f(p_j)$, где $1 \leq j \leq s$. Из $p \in \pi(f(p_j))$ и $f(p) = f(p_j)$ следует $G \in \mathfrak{N}_{\pi(f(p))} f(p)$. Но тогда $G/C_G(K) = G/K \in f(p)$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Итак, $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}$, а значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Установим, что из утверждения 2 следует утверждение 1. Рассмотрим максимальный внутренний локальный экран f формации $\mathfrak{F}$. Если $|\pi(\mathfrak{F})| = 1$, то нетрудно видеть, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p$. В этом случае утверждение 1 леммы выполняется.

Пусть $|\pi(\mathfrak{F})| > 1$ и p, q — различные простые числа из $\pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что если $q \in \pi(f(p))$, то $f(p)) \subseteq f(q)$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то из теоремы 4.7 из [7] следует, что $f(p)$ — наследственная формация для любого простого p. Поэтому $C_q \in f(p)$, где C_q — группа простого порядка q. Пусть G — произвольная группа из $f(p)$. Рассмотрим $E = C_q \wr G = [L]G$, где L — база сплетения. Поскольку $C_E(L) = L$ и L — q-группа, то $O_q(E) = 1$. Поэтому $F_q(E)$ — q-группа. Заметим, что $E \in \mathfrak{N}_{\pi(f(p))} f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Но тогда по лемме 4.5 из [7] $E/F_q(E) \in f(q)$. Отсюда и из $f(q) = \mathfrak{N}_q f(q)$ следует, что $E \in f(q)$, и, значит, $E/L \simeq G \in Qf(q) = f(q)$. Следовательно, если $q \in \pi(f(p))$, то $f(p) \subseteq f(q)$. Так как $p \in \pi(f(p))$, то $p \in \pi(f(q))$. Повторяя рассуждения, получаем $f(q) \subseteq f(p)$. Отсюда $f(p) = f(q)$. Предположим, что $f(p) \cap f(q) \neq (1)$. Тогда найдется простое число $r \in \pi(f(p)) \cap \pi(q)$. По доказанному выше имеем $f(p) = f(r)$ и $f(q) = f(r)$, т. е. $f(p) = f(q)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация и φ — ее максимальный наследственный локальный экран. Если $\mathfrak{F}$ является слабо R_{an}-замкнутой, то из $q \in \pi(\varphi(p))$ следует, что $p \in \pi(\varphi(q))$ для любых p и q из $\pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Пусть p и q принадлежат $\pi(\mathfrak{F})$ и $q \in \pi(\varphi(p))$. Допустим, что $p \notin \pi(\varphi(q))$. Пусть C_q — группа порядка q. Возьмем точный неприводимый F_pC_q-модуль U над полем F_p, который существует по лемме 18.8 из [8]. Рассмотрим группу $E = [U]C_q$. Нетрудно видеть, что $E \in \mathfrak{F}$. Так как $O_q(E) = 1$ и E — монолитическая группа с цоколем U, то существует точный неприводимый F_qE-модуль W над полем F_q.

Рассмотрим группу $F = [W]E = [W]([U]C_q)$. Поскольку W — минимальная нормальная подгруппа в F и $W \cap E = 1$, то E — максимальная подгруппа группы F. Из $E_F \subseteq C_F(W) = W$ следует, что $E_F = 1$, а значит, $E \operatorname{abn} F$. Заметим, что $S = WC_q$ — силовская q-подгруппа группы F. Так как C_q — максимальная подгруппа в E, то S — максимальная подгруппа в F. Из $C_q \operatorname{abn} E$ следует, что $S \operatorname{abn} F$. Ввиду того, что $q \in \pi(\mathfrak{F})$, имеем $S \in \mathfrak{F}$. Заметим, что $(|F:E|, |F:S|) = 1$. Из слабой R_{an}-замкнутости $\mathfrak{F}$ следует, что $F \in \mathfrak{F}$. Но тогда $F/F_q(F) = F/W \simeq E \in \varphi(q)$. Из наследственности $\varphi(q)$ получаем $p \in \pi(\varphi(q))$. Противоречие. Таким образом, из $q \in \pi(\varphi(p))$ следует, что $p \in \pi(\varphi(q))$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Известно, что если A и B — подгруппы группы G и $(|G:A|,|G:B|)=1$, то $G=AB$. Поэтому из утверждения 1 следует утверждение 2.

Установим, что из утверждения 2 следует утверждение 3. Если $|\pi(\mathfrak{F})|=1$, то из локальности $\mathfrak{F}$ вытекает, что $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_p$, где $p\in\pi(\mathfrak{F})$, а значит, в этом случае утверждение 3 теоремы выполняется.

Будем считать, что $|\pi(\mathfrak{F})|>1$. Пусть $p\in\pi(\mathfrak{F})$ и φ — максимальный наследственный экран формации $\mathfrak{F}$, который существует и единствен по утверждению 1 леммы 3. Рассмотрим произвольную критическую минимальную не $\varphi(p)$-группу H. Тогда из утверждения 2 леммы 3 следует, что $H\in\mathfrak{F}$. Поскольку $\varphi(p)=\mathfrak{N}_p\varphi(p)$, то $O_p(H)=1$. Кроме того, группа H является монолитической. Тогда по лемме 18.8 из [8] существует точный неприводимый F_pH-модуль U, где F_p — поле из p элементов.

Рассмотрим группу $G=[U]H$. Так как $F_p(G)=U$ и $G/F_p(G)\simeq H\notin\varphi(p)$, то группа G не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Пусть R — максимальная подгруппа группы G. Если R сопряжена с подгруппой H, то $R\in\mathfrak{F}$. Пусть R не сопряжена с H. Тогда $U\subseteq R$ и $R=R\cap G=R\cap[U]H=[U](R\cap H)$. Так как $O_{p'}(R)\subseteq C_R(U)=C_G(U)=U$, то $O_{p'}(R)=1$, а значит, $F_p(R)$ — p-группа. Заметим, что $R\cap H$ — собственная подгруппа в H. Из $H\in\mathcal{M}(\varphi(p))$ следует, что $R\cap H\in\varphi(p)$. Отсюда и из $U\subseteq F_p(R)$ получаем $R/F_p(R)\in$ $\in\varphi(p)$. Поскольку $R/U\simeq R\cap H\in\mathfrak{F}$, то $R\in\mathfrak{F}$. Следовательно, любая максимальная подгруппа группы G принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Продолжим изучение строения группы H. Если H ненильпотентна, то из $H_G=1$ по лемме 6 следует, что в G найдутся по крайней мере две максимальные подгруппы H_1 и H_2 такие, что $H_i \operatorname{abn} G$, $i=1,2$, и $(|G:H_1|,|G:H_2|)=$ $=1$. По доказанному выше $H_i\in\mathfrak{F}$, $i=1,2$. Из слабой R_{an}-замкнутости $\mathfrak{F}$ следует, что $G\in\mathfrak{F}$. Тогда $G/F_p(G)=G/U\simeq H\in\varphi(p)$. Получили противоречие с тем, что $H\in\mathcal{M}(\varphi(p))$. Следовательно, H нильпотентна. Так как H — монолитическая группа и $\mathfrak{N}_p\subseteq\varphi(p)$, H является q-группой для некоторого простого числа $q\neq p$.

Предположим, что $|H|=q^k$, $k>1$. Тогда $q\in\pi(\varphi(p))$. Установим, что этот случай невозможен. Для этого докажем индукцией по натуральному числу n, что все q-группы, порядок которых $\leq q^n$, принадлежат формации $\varphi(p)$. Поскольку $H\in\mathcal{M}(\varphi(p))$ и $|H|=q^k$, $k>1$, при $n=1$ данное утверждение выполняется. Будем считать, что утверждение справедливо для всех q-групп, порядок которых $\leq q^n$. Установим, что все q-группы, порядок которых $\leq q^{n+1}$, принадлежат формации $\varphi(p)$. Пусть Q — q-группа и $|Q|=q^{n+1}$. В Q имеется нормальная подгруппа N порядка q. Так как $|Q/N|=q^n$, по предположению индукции $Q/N\in\varphi(p)$.

Обозначим $Q^*=Q/N$. Пусть L — точный неприводимый F_qC_p-модуль над полем F_q. Рассмотрим группу $P=[L]C_p$. Возьмем сплетение

$$G=([L]C_p)\wr Q^*=[B]Q^*,$$

где B — база сплетения. По теореме 18.9 из [6] группа Q вкладывается в качестве подгруппы в G. Поскольку P — примитивная группа, по теореме 18.5 из [6] G — примитивная группа, причем $\operatorname{soc}G=\operatorname{soc}B$ и совпадает с силовской q-подгруппой из B. Так как G примитивна, в ней найдется максимальная подгруппа R такая, что $R_G = 1$. Тогда $G = [\operatorname{soc} G]R$, а R является p-замкнутой группой. Ясно, что нормальная силовская p-подгруппа из R является элементарной абелевой группой, а порядок силовской q-подгруппы из R равен q^n. Поскольку R — q-нильпотентна, то $R = F_q(R)$ и $R/F_q(R) \simeq 1 \in \varphi(q)$. Из отмеченных выше свойств группы R следует, что $R/F_p(R)$ — q-группа и $|R/F_p(R)| \leq \leq q^n$, а значит, по предположению индукции $R/F_p(R) \in \varphi(p)$. Тогда по лемме 4.5 из [7] $R \in \widetilde{\mathfrak{F}}$. Так как G — примитивная группа, то $R \operatorname{abn} G$.

Пусть R_q — силовская q-подгруппа из R. Возьмем $S = N_R(R_q)$. Тогда $S \operatorname{abn} R$. Рассмотрим подгруппу $X = \operatorname{soc} G \cdot S$.

По лемме 1 $X \operatorname{abn} G$. Заметим, что X — q-замкнутая группа и силовская p-подгруппа из X является либо единичной, либо элементарной абелевой p-группой. Так как $F_p(X) = X$, то $X/F_p(X) \in \varphi(p)$. Поскольку $q \in \pi(\varphi(p))$, по лемме 9 $p \in \pi(\varphi(q))$. Тогда из $C_p \in \varphi(q)$ и того, что $\varphi(q)$ — формация, следует, что $X/F_q(X) \in \varphi(q)$. Следовательно, $X \in \widetilde{\mathfrak{F}}$. Остается заметить, что $(|G:R|, |G:X|) = 1$. Из слабой R_{an}-замкнутости $\widetilde{\mathfrak{F}}$ следует, что $G \in \widetilde{\mathfrak{F}}$.

Так как G — примитивная группа, то G — монолитическая группа. Кроме того, $O_p(G) = 1$. Поэтому существует точный неприводимый F_pG-модуль W над полем F_p. Рассмотрим группу $\Gamma = [W]G = [W]([\operatorname{soc} G]R)$. Возьмем в Γ подгруппы G и WR. Ясно, что $G \operatorname{abn} \Gamma$, $WR \operatorname{abn} \Gamma$ и $(|\Gamma : G|, |\Gamma : WR|) = 1$. Группа WR является p-замкнутой. Нетрудно видеть, что $WR/F_q(WR) \simeq \simeq 1 \in \varphi(q)$ и $|WR/F_p(WR)| \leq q^n$, а значит, $WR/F_p(WR) \in \varphi(p)$. Поэтому $WR \in \widetilde{\mathfrak{F}}$. Из слабой R_{an}-замкнутости $\widetilde{\mathfrak{F}}$ следует, что $\Gamma \in \widetilde{\mathfrak{F}}$. Но тогда $\Gamma/C_\Gamma(W) \simeq G \in \varphi(p)$. Ранее было отмечено, что группа Q, порядок которой $|Q| = q^{n+1}$, вкладывается в качестве подгруппы в G. Поэтому из наследственности $\varphi(p)$ следует, что $Q \in \varphi(p)$. Таким образом, доказали, что для любого натурального числа n все q-группы, порядок которых $\leq q^n$, принадлежат $\varphi(p)$. Тогда $\mathfrak{N}_q \subseteq \varphi(p)$. Поэтому $H \in \varphi(p)$. Получили противоречие с тем, что $H \in \mathcal{M}(\varphi(p))$. Остается принять, что $|H| = q$. Тогда по лемме 4 $\varphi(p) = = \mathfrak{S}_{\pi(\varphi(p))}$. Следовательно, φ — такой локальный экран $\widetilde{\mathfrak{F}}$, что $\varphi(p) = \mathfrak{S}_{\pi(\varphi(p))}$, если $p \in \pi(\widetilde{\mathfrak{F}})$, и $\varphi(p) = \varnothing$, если $p \in \pi'(\widetilde{\mathfrak{F}})$.

Пусть p и q — некоторые простые числа из $\pi(\widetilde{\mathfrak{F}})$. Предположим, что $q \in \in \pi(\varphi(p))$. Покажем, что в этом случае $\pi(\varphi(p)) = \pi(\varphi(q))$. Согласно лемме 9 из $q \in \pi(\varphi(p))$ вытекает, что $p \in \pi(\varphi(q))$. Пусть $r \neq q$ и $r \in \pi(\varphi(p)) \setminus \pi(\varphi(q))$. Рассмотрим точный неприводимый F_rC_p-модуль U над полем F_r. Возьмем группу $X = [U]C_p$. Так как $r \in \pi(\varphi(p))$, то $r \in \pi(\widetilde{\mathfrak{F}})$ и по лемме 9 $p \in \pi(\varphi(r))$. Отсюда нетрудно видеть, что $X \in \widetilde{\mathfrak{F}}$. Пусть L — точный неприводимый F_qX-модуль над полем F_q. Рассмотрим группу $G = [L]([U]C_p)$. Группа G не принадлежит формации $\widetilde{\mathfrak{F}}$, так как $G/F_q(G) \simeq [U]C_p \notin \varphi(q)$. С другой стороны, рассмотрим подгруппы $H_1 = X = [U]C_p$ и $H_2 = [L]C_p$. Нетрудно видеть, что $H_i \operatorname{abn} G$ и $H_i \in \widetilde{\mathfrak{F}}$ для $i = 1, 2$. Кроме того, $(|G:H_1|, |G:H_2|) = 1$. Значит, из слабой R_{an}-замкнутости $\widetilde{\mathfrak{F}}$ следует, что $G \in \widetilde{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие. Поэтому $\pi(\varphi(p)) \subseteq \pi(\varphi(q))$. Аналогично доказывается, что $\pi(\varphi(q)) \subseteq \pi(\varphi(p))$. Таким образом, если $q \in \pi(\varphi(p))$, то $\pi(\varphi(p)) = = \pi(\varphi(q))$. Отсюда и из установленного выше строения экрана φ следует $\varphi(p) =$

$= \varphi(q)$. Более того, если найдется число $r \in \pi(\varphi(p)) \cap \pi(\varphi(q))$, то $\varphi(r) = \varphi(p)$ и $\varphi(r) = \varphi(q)$, а значит, $\varphi(p) = \varphi(q)$. Следовательно, если $\varphi(p) \cap \varphi(q) \neq (1)$, то $\varphi(p) = \varphi(q)$. Нетрудно заметить, что φ является максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 8 получаем $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{N}_{\pi(\varphi(p))}\varphi(p))$. Так как $\varphi(p) = \mathfrak{S}_{\pi(\varphi(p))}$, то $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{S}_{\pi(\varphi(p))})$. Множество $\pi(\mathfrak{F})$ можно разбить в объединение непересекающихся подмножеств, т. е. представить в виде $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{i \in I} \pi_i$, где $\pi_l \cap \pi_k = \varnothing$ для любых $l \neq k$ из I, причем $p, q \in \pi_i$ тогда и только тогда, когда $\varphi(p) = \varphi(q)$. Поэтому $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$. Итак, установлено, что из утверждения 2 следует утверждение 3.

Докажем, что из утверждения 3 следует утверждение 1. Для этого достаточно доказать, что $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где $A \operatorname{abn} G$, $B \operatorname{abn} G$ и $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Предположим, что данное утверждение неверно, и группа G — контрпример минимального порядка.

Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то для G/N все условия выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Если в G имеется отличная от N минимальная нормальная подгруппа K, то из $G/K \in \mathfrak{F}$ следует $G/(K \cap N) \simeq G \in R_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Следовательно, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Из локальности $\mathfrak{F}$ следует $\Phi(G) = 1$. В этом случае $G = [N]M$, где $N = C_G(N) = F(G)$, $|N| = p^{\alpha}$, p — простое число, а M — некоторая максимальная подгруппа группы G и $M \in \mathfrak{F}$.

Поскольку $G = AB$ и $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда и из $\mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$ следует, что $p \in \sigma = \pi_j$ для некоторого $j \in I$. Далее из $M \in \mathfrak{F}$, $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$ следует $M = M_\sigma \times M_{\sigma'}$, $A = A_\sigma \times A_{\sigma'}$ и $B = B_\sigma \times B_{\sigma'}$, где M_σ, A_σ, B_σ — σ-холловские, а $M_{\sigma'}$, $A_{\sigma'}$, $B_{\sigma'}$ — σ'-холловские подгруппы из M, A, B соответственно.

Пусть G_σ — σ-холловская подгруппа группы G. Тогда согласно утверждению 3.2.5 из [9] можно считать, что $G_\sigma = A_\sigma B_\sigma$. Так как $p \in \sigma$, то $N \subseteq G_\sigma$. Из $G/N \in \mathfrak{F} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$ следует $G_\sigma/N \lhd G/N$.

Если $A_{\sigma'} = 1$, то $A = A_\sigma = G_\sigma \lhd G$, что противоречит абнормальности A в G. Поэтому можно считать, что $A_{\sigma'} \neq 1$ и $B_{\sigma'} \neq 1$. Далее из $[A_{\sigma'} \cap B_{\sigma'}, A_\sigma B_\sigma] = 1$ следует $A_{\sigma'} \cap B_{\sigma'} \subseteq C_G(A_\sigma B_\sigma) \subseteq C_G(N) = N$. Поэтому $A_{\sigma'} \cap B_{\sigma'} = 1$. Из σ'-замкнутости подгрупп A и B ввиду утверждения 3.2.7 из [9] получаем $[O_{\sigma'}(A), O_{\sigma'}(B)] = [A_{\sigma'}, B_{\sigma'}] \subseteq O_{\sigma'}(G) = 1$. Следовательно, если $G_{\sigma'}$ — σ'-холловская подгруппа группы G такая, что $G_{\sigma'} = A_{\sigma'}B_{\sigma'}$, то $G_{\sigma'} = A_{\sigma'} \times B_{\sigma'}$. Рассмотрим подгруппу $X = G_\sigma A_{\sigma'}$. Ясно, что $A \subseteq X$. Заметим, что $X \lhd G$. Но согласно лемме 2 $N_G(X) = X$. Противоречие. Следовательно, принятое допущение неверно. Теорема доказана.

Доказательство предложения. Зафиксируем подформацию $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{N}$. Предположим, что существуют группы $G = AB$, где A и B — абнормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы группы G, но сами G не принадлежат $\mathfrak{X}$. Выберем среди них группу G наименьшего порядка.

Если N — минимальная нормальная подгруппа из G, то для G/N ввиду леммы 1 все условия предложения выполняются. Поскольку $\mathfrak{X}$ — формация, G является монолитической группой с цоколем N.

Предположим, что $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда из $G/N \in \mathfrak{X} \subsetneq \mathfrak{N}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}$. Отсюда и из $G = AB$, где $A \operatorname{abn} G$ и $B \operatorname{abn} G$, получаем $A = B = G$. Но тогда $G \in \mathfrak{X}$. Это противоречит выбору G.

Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда по теореме 15.2 из [6] (гл. А) группа $G = [N]M$, где $N = G^{\mathfrak{X}}$, подгруппа M дополняет N и все такие дополнения сопряжены в G. Из $A \operatorname{abn} G$ по лемме 1 следует, что $AN/N \operatorname{abn} G/N$. Отсюда и из нильпотентности G/N получаем $AN = G$. Заметим, что $A \cap N \triangleleft G$. Из минимальности N следует $A \cap N = 1$. Следовательно, A является дополнением к N в G. Аналогично, B дополняет N в G. Тогда в G найдется такой элемент x, что $B = A^x$, а значит, $G = AA^x$. По теореме Оре это возможно, если $A = G$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

1. *Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б.* Конечные группы с кратными факторизациями // Фундам. и прикл. математика. – 1998. – **4**, № 4. – С. 1251–1263.
2. *Hawkes T. O.* Skeletal classes of soluble groups // Arch. Math. – 1971. – **12**. – P. 557–589.
3. *Bryce R. A., Cossey J.* Fitting formations of finite soluble groups // Math. Z. – 1972. – **127**, № 3. – S. 217–223.
4. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 27–54.
5. *Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M. D.* On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. – 1992. – **148**, № 1. – P. 42–52.
6. *Doerk K., Hawkes T. O.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992. – 889 p.
7. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
8. *Шеметков Л. А , Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
9. *Казарин Л. С.* Группы с факторизацией. – Ярославль, 1981. – 80 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 3900-81.

Получено 18.02.2002