УДК 517.95

С. П. Лавренюк (Краків. політехніка, Польща),
М. О. Оліскевич (Львів. нац. ун-т)

МЕТОД ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ДВОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

We investigate a mixed problem for weakly nonlinear hyperbolic system of the first order with two independent variables in bounded and unbounded domains. Under the assumption of monotonicity of nonlinearities, we obtain conditions for the existence and uniqueness of the generalized solution that do not depend on the behavior of this solution as $x \to +\infty$.

Досліджено мішану задачу для слабконелінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними в обмеженій та необмеженій областях. За припущення монотонності нелінійностей отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку незалежно від його поведінки при $x \to +\infty$.

Дослідженню різноманітних задач для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними присвячено низку праць [1 – 21]. Здебільшого при цьому використано метод характеристик, який загалом накладає певні обмеження на нелінійності (наприклад, виконання умови Ліпшиця) [1 – 14]. Іншими підходами до вивчення гіперболічних систем є використання максимальних монотонних розширень [15 – 18], методу Фур'є [19], чисельних методів [20], методу Гальоркіна [21].

У цій праці автори дослідили мішану задачу для гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними у випадку слабкої монотонної нелінійності методом Гальоркіна. Зазначимо, що вказаний підхід дозволив отримати розв'язність мішаної задачі і в необмеженій (за змінною x) області без жодних обмежень на поведінку розв'язку при $x \to +\infty$.

1. Задача в обмеженій області. Розглянемо в прямокутнику $Q_{a,T} = \{(x, t): 0 < x < a,\ 0 < t < T\}$ систему диференціальних рівнянь вигляду

$$u_t - \Lambda(x,t)u_x + C(x,t)u + g(x,t,u) = f(x,t), \tag{1}$$

де $u(x,t) = \operatorname{colon}(u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t))$ є шуканою функцією, Λ, C — квадратні матриці порядку n, причому

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1(x,t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(x,t), \ldots, \lambda_k(x,t)\},$$

$$\Lambda_2(x,t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{k+1}(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t)\}, \qquad k \in \{1, \ldots, n\},$$

$$g(x,t,u) = \operatorname{colon}(g_1(x,t,u), \ldots, g_n(x,t,u)),$$

$$f(x,t) = \operatorname{colon}(f_1(x,t), \ldots, f_n(x,t)).$$

Зокрема, одного з блоків Λ_1 або Λ_2 матриці Λ може не бути.

Надалі через $(\cdot,\cdot)$ позначатимемо скалярний добуток в евклідовому просторі $\mathbb{R}^m$, а через $|\cdot|$ — норму у цьому просторі.

Припускатимемо, що в області $Q_{a,T}$ коефіцієнти системи (1) задовольняють такі умови:

Λ_1) $\lambda_i, \lambda_{ix} \in C(\overline{Q}_{a,T})$, $i = 1, \ldots, n$; $\lambda_i(x,t) < 0$, $i = 1, \ldots, k$; $\lambda_i(x,t) > 0$, $i = k+1, \ldots, n$;

C_1) $C(x,t) = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$, $c_{ij} \in L^{\infty}(Q_{a,T})$, $i, j = 1, \ldots, n$;

G_1) функція $g(x,t,\xi)$ є вимірною за змінними (x,t) в області $Q_{a,T}$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і неперервною за змінною ξ майже для всіх $(x,t) \in Q_{a,T}$;

існують сталі $g_0 > 0$, $g^0 > 0$ і число $p > 2$ такі, що майже для всіх $(x, t) \in Q_{a,T}$ і всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ виконуються нерівності

$$\left(g(x,t,\xi) - g(x,t,\eta), \xi - \eta\right) \ge g_0 |\xi - \eta|^p,$$

$$|g_i(x,t,\xi)| \le g^0 \sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j\right|^{p-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Вектор-стовпець $u(x,t)$ іноді записуватимемо у вигляді $u(x,t) = \operatorname{colon}(v(x,t), w(x,t))$, де $v(x,t) = \operatorname{colon}(u_1(x,t), \ldots, u_k(x,t))$, $w(x,t) = \operatorname{colon}(u_{k+1}(x,t), \ldots \ldots, u_n(x,t))$.

Для системи (1) задамо крайові

$$v(0,t) = 0, \quad w(a,t) = 0 \tag{2}$$

і початкові

$$u(x,0) = u^0(x) \tag{3}$$

умови, де $u^0(x) = \operatorname{colon}(u_1^0(x), \ldots, u_n^0(x))$.

Позначатимемо через $L_n^r(B)$, $1 \le r \le \infty$ $\left(C_n^m(\overline{B})\right)$, простір вектор-функцій $z = (z_1, \ldots, z_n)$, визначених на множині B, для яких $z_i \in L^r(B)$ $(z_i \in C^m(\overline{B}))$, $i = 1, \ldots, n$.

Означення 1. *Функцію* $u \in L_n^p(Q_{a,T})$ *таку, що* $u(\cdot, T) \in L_n^2(0,a)$, $w(0, \cdot) \in L_{n-k}^2(0,T)$, $v(a,\cdot) \in L_k^2(0,T)$, *називатимемо узагальненим розв'язком задачі* (1) – (3), *якщо вона задовольняє рівність*

$$\int_0^a (u(x,T), \varphi(x,T))\,dx \; +$$

$$+ \int_{Q_{a,T}} \Big[-(u(x,t), \varphi_t(x,t)) + (\Lambda(x,t)u(x,t), \varphi_x(x,t)) + (\Lambda_x(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) \; +$$

$$+ \; (C(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) + (g(x,t,u(x,t)), \varphi(x,t)) \Big] dx\,dt \; +$$

$$+ \int_0^T \left(\Lambda_2(0,t)w(0,t), \varphi^2(0,t)\right) dt - \int_0^T \left(\Lambda_1(a,t)v(a,t), \varphi^1(a,t)\right) dt \; =$$

$$= \int_0^a \left(u^0(x), \varphi(x,0)\right) dx + \int_{Q_{a,T}} (f(x,t), \varphi(x,t))\,dx\,dt \tag{4}$$

для довільної функції $\varphi \in C_n^1\left(\overline{Q}_{a,T} Q_{a,T}\right)$, $\varphi^1(x,t) = (\varphi_1(x,t), \ldots, \varphi_k(x,t))$, $\varphi^2(x,t) = (\varphi_{k+1}(x,t), \ldots, \varphi_n(x,t))$, $\varphi^1(0,t) = 0$, $\varphi^2(a,t) = 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* Λ_1), C_1), G_1) *і, крім того,* $f \in L_n^q(Q_{a,T})$, $1/p + 1/q = 1$, $u^0 \in L_n^2(0,a)$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1) – (3).

Доведення. Спочатку доведемо існування узагальненого розв'язку. Розглянемо послідовності функцій

$$u_i^N(x,t) = \sum_{s=1}^{N} N z_{si}^N(t)\omega_s^i(x), \quad i = 1,\ldots,n, \quad N = 1,2,\ldots,$$

де $\omega_j^i = \sin\dfrac{\pi(2j-1)}{2a}x$, $i = 1,\ldots,k$, $\omega_j^i = \cos\dfrac{\pi(2j-1)}{2a}x$, $i = k+1,\ldots,n$, z_{ji}^N, $j = 1,\ldots,N$, $i = 1,\ldots,n$, — розв'язок такої задачі Коші:

$$\int_0^a \Bigg[u_{it}^N(x,t)\omega_j^i(x) - \lambda_i(x,t)u_{ix}^N(x,t)\omega_j^i(x) + \sum_{s=1}^{N} c_{is}(x,t)u_s^N(x,t)\omega_j^i(x) +$$

$$+ g_i\big(x,t,u_1^N,\ldots,u_n^N\big)\omega_j^i(x) - f_i(x,t)\omega_j^i(x)\Bigg]dx = 0, \tag{5}$$

$$z_{ij}^N(0) = \alpha_{ij}^N, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,N, \tag{6}$$

а

$$u_i^{0,N}(x) = \sum_{s=1}^{N} \alpha_{is}^N \omega_s^i(x), \quad i = 1,\ldots,n,$$

$$\left\| u^{0,N} - u^0 \right\|_{L_n^2(0,a)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

На підставі умов теореми задача (5), (6) має розв'язок, визначений і абсолютно неперервний на деякому проміжку $[0, t_0]$ (оскільки виконуються всі умови теореми Каратеодорі [22]), а з апріорних оцінок, отриманих нижче, буде випливати існування розв'язку на всьому проміжку $[0, T]$.

Помножимо кожне рівняння системи (5) відповідно на функцію $z_{ij}^N(t)$, підсумуємо їх по j від 1 до N та по i від 1 до n і проінтегруємо на проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int_{Q_{a,\tau}} \Big[\big(u_t^N(x,t), u^N(x,t)\big) - \big(\Lambda(x,t)u_x^N(x,t), u^N(x,t)\big) + \big(C(x,t)u^N(x,t), u^N(x,t)\big) +$$

$$+ \big(g\big(x,t,u^N\big), u^N(x,t)\big) - \big(f(x,t), u^N(x,t)\big)\Big]dx\,dt = 0. \tag{7}$$

Зазначимо, що на підставі умов Λ_1), C_1) існують такі сталі λ_0^1, λ_0^2, λ^0, c_0, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^k$, $\nu \in \mathbb{R}^{n-k}$, майже всіх $(x,t) \in Q_{a,T}$ і всіх $t \in [0,T]$ виконуються нерівності

$$-(\Lambda_1(a,t)\nu,\nu) \ge \lambda_0^1|\nu|^2, \quad \lambda_0^1 > 0,$$

$$(\Lambda_2(0,t)\mu,\mu) \ge \lambda_0^2|\mu|^2, \quad \lambda_0^2 > 0,$$

$$(\Lambda_x(x,t)\xi,\xi) \ge \lambda^0|\xi|^2,$$

$$(C(x,t)\xi,\xi) \ge c_0|\xi|^2.$$

Тоді згідно з умовами теореми після елементарних перетворень доданків рівності (7) матимемо нерівність

$$\int_0^a \left|u^N(x,\tau)\right|^2 dx + \lambda_0^2 \int_0^\tau \left|w^N(0,t)\right|^2 dt + \lambda_0^1 \int_0^\tau \left|v^N(a,t)\right|^2 dt +$$

$$+\; g_0 \int\limits_{Q_{a,\tau}} \left|u^N(x,t)\right|^p dx\,dt + (2c_0 + \lambda^0) \int\limits_{Q_{a,\tau}} \left|u^N(x,t)\right|^2 dx\,dt \le$$

$$\le \int\limits_0^a \left|u^{0,N}(x)\right|^2 dx + \frac{1}{q}\left(\frac{2n}{pg_0}\right)^{q/p} \int\limits_{Q_{a,\tau}} \sum_{i=1}^n |f_i(x,t)|^q\,dx\,dt. \qquad (8)$$

На підставі леми Гронуолла – Беллмана з нерівності (8) отримуємо оцінки

$$\int\limits_0^a \left|u^N(x,\tau)\right|^2 dx \le M_1(U_0 + F_0), \qquad \tau \in (0, T], \qquad (9)$$

$$\int\limits_{Q_{a,T}} \left|u^N(x,t)\right|^p dx\,dt + \int\limits_0^T \left|v^N(a,t)\right|^2 dt + \int\limits_0^T \left|w^N(0,t)\right|^2 dt \le M_1(U_0 + F_0), \qquad (10)$$

де

$$U_0 = \int\limits_0^a \left|u^0(x)\right|^2 dx, \qquad F_0 = \int\limits_{Q_{a,T}} \sum_{i=1}^n |f_i(x,t)|^q\,dx\,dt,$$

причому стала M_1 не залежить від N.

Крім того, з умови G_1) та оцінки (10) матимемо

$$\int\limits_{Q_{a,T}} \sum_{i=1}^n \left|g_i\left(x,t,u^N(x,t)\right)\right|^q dx\,dt \le M_2(U_0 + F_0), \qquad (11)$$

де стала M_2 не залежить від N.

Отже, з послідовності $\{u^N(x,t)\}$ можна виділити підпослідовність $\{u^m(x,t)\}$ з такими властивостями:

$$u_i^m \to u_i \;\; *\text{-слабко в } L^\infty((0,T); L^2(0,a)), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$u_i^m \to u_i \;\; \text{слабко в } L^p(Q_{a,T}), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$u_i^m(\cdot, T) \to \eta_i(\cdot) \;\; \text{слабко в } L^2(0,a), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$u_i^m(0,\cdot) \to \sigma_i(\cdot) \;\; \text{слабко в } L^2(0,T), \qquad i = k+1, \ldots, n,$$

$$u_i^m(a,\cdot) \to \zeta_i(\cdot) \;\; \text{слабко в } L^2(0,T), \qquad i = 1, \ldots, k,$$

$$g_i\left(\cdot,\cdot,u^m(\cdot,\cdot)\right) \to \theta_i(\cdot,\cdot) \quad \text{слабко в } L^q(Q_{a,T}), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

при $m \to \infty$.

Використовуючи систему (5), отримуємо, що для довільної функції $\varphi \in C_n^1\left(\overline{Q}_{a,T}\right)$, $\varphi^1(0,t) \equiv 0$, $\varphi^2(a,t) \equiv 0$, виконується рівність

$$\int\limits_0^a (\eta(x), \varphi(x,T))\,dx \; +$$

$$+ \int\limits_{Q_{a,T}} \left[-(u(x,t), \varphi_t(x,t)) + (\Lambda(x,t)u(x,t), \varphi_x(x,t)) + (\Lambda_x(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) \; + \right.$$

$$\left. +\; (C(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) + (\theta(x,t), \varphi(x,t)) - (f(x,t), \varphi(x,t)) \right] dx\,dt \; -$$

$$- \int\limits_0^T \left(\Lambda_1(a,t)\zeta(t), \varphi^1(a,t)\right) dt + \int\limits_0^T \left(\Lambda_2(0,t)\sigma(t), \varphi^2(0,t)\right) dt =$$

$$= \int_0^a \big(u^0(x), \varphi(x,0)\big)\,dx. \tag{12}$$

Нехай $x = \rho_i(x, \xi, \tau)$ є рівнянням i-ї характеристики системи (5), тобто розв'язком задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_i(x,t), \qquad x(\tau) = \xi.$$

Виберемо в (12) функції φ_i з простору $C_0^1\big(\overline{Q}_{a,T}\big)$. Тоді отримаємо рівності

$$\int\limits_{Q_{a,T}} (\varphi_{it}(x,t) - \lambda_i(x,t)\varphi_{ix}(x,t))u_i(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{a,T}} F_i(x,t)\varphi_i(x,t)\,dx\,dt, \tag{13}$$
$$i = 1, \dots, n,$$

де

$$F_i(x,t) = \lambda_i(x,t)u_i(x,t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}(x,t)u_j(x,t) + \theta_i(x,t) - f_i(x,t).$$

Очевидно, що $F_i \in L^2(Q_{a,T}) + L^p(Q_{a,T})$, $i = 1, \dots, n$.

В i-й рівності (13) виконаємо заміну змінних

$$x = \rho_i(\tau, \xi, 0), \qquad t = \tau. \tag{14}$$

Тоді якобіан відображення (14) матиме вигляд

$$J_i(\xi,\tau) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial t}{\partial \xi} & \dfrac{\partial t}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} = \exp\left(-\int_0^\tau \lambda_{ix}\,d\eta\right)$$

і

$$J_{i\tau}(\xi,\tau) = -\lambda_{ix}(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau)J_i(\xi,\tau), \qquad i = 1, \dots, n,$$

є неперервною функцією обох змінних.

Нехай область $Q_{a,T}$ при відображенні (14) отримується з області D_i. Тоді з (13) матимемо

$$\int\limits_{D_i} u_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau)(\varphi_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau)J_i(\xi,\tau))_\tau\,d\xi\,d\tau =$$
$$= \int\limits_{D_i} \left[F_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau) + J_{i\tau}(\xi,\tau)\frac{u_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau)}{J_i(\xi,\tau)} \right] J_i(\xi,\tau)\varphi_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{15}$$
$$i = 1, \dots, n.$$

Отже, з (15) випливає

$$\frac{d}{d\tau}u_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau) = -F_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau) +$$
$$+ \lambda_{ix}(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau)u_i(\rho_i(\tau,\xi,0),\tau), \qquad (\xi,\tau) \in D_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Тому u_i є неперервною функцією вздовж відповідної характеристики. Крім того, звідси випливає, що майже у кожній точці області $Q_{a,T}$ має сенс вираз $u_{it} - \lambda_i(x,t)u_{ix}$ та функції $u_1(x,t), \dots, u_n(x,t)$ задовольняють систему (16). Тепер, вибравши у формулі (12) $\varphi(x,T) \equiv 0$, $\varphi(0,t) \equiv 0$, $\varphi_1(a,t) \equiv 0$ для $i \neq s$, де $s \in \{k+1, \dots, n\}$, отримаємо рівність

$$\int_0^T \lambda_s(a,t)u_s(a,t)\varphi_s(a,t)\,dt = 0,$$

звідки випливає $u_1(a,t)=\sigma_1(t)$. Оскільки s — довільне, то $w(a,t)=\sigma(t)$.

Аналогічно доводимо, що $v(0,t)=\zeta(t)$, $\eta(x)=u(x,T)$. Таким чином, правильна рівність

$$\int_0^a (u(x,T)\varphi(x,T))dx \;+$$

$$+\int_{Q_{a,T}} \big[-(u(x,t),\varphi_t(x,t)) + (\Lambda(x,t)u(x,t),\varphi_x(x,t)) + (\Lambda_x(x,t)u(x,t),\varphi(x,t)) \;+$$

$$+\;(C(x,t)u(x,t),\varphi(x,t)) + (\theta(x,t),\varphi(x,t)) - (f(x,t),\varphi(x,t))\big]dx\,dt \;-$$

$$-\int_0^T \Big(\Lambda_1(a,t)v(a,t),\varphi^1(a,t)\Big)dt + \int_0^T \Big(\Lambda_2(0,t)w(0,t),\varphi^2(0,t)\Big)dt \;=$$

$$= \int_0^a \Big(u^0(x),\varphi(x,0)\Big)dx \tag{17}$$

для довільної функції $\varphi\in C^1_n(\overline{Q}_{a,T})$, $\varphi^1(0,t)\equiv 0$, $\varphi^2(a,t)\equiv 0$. Зокрема, рівність (17) має сенс і для функції $\varphi(x,t)=u(x,t)$.

Розглянемо числову послідовність

$$y_m = \int_{Q_{a,T}} e^{-\alpha t}\Big(g(x,t,u^m(x,t)-g(x,t,\psi(x,t)),u^m(x,t)-\psi(x,t)\Big)dx\,dt,$$

де $\psi\in L^p_n\big(Q_{a,T}\big)$, $\alpha+2c_0+\lambda^0>0$. Згідно з умовою G_1) елементи цієї послідовності невід'ємні. Отже, використавши (7), матимемо

$$0 \le \int_{Q_{a,T}} e^{-\alpha t}\Big(g(x,t,u^m(x,t)),u^m(x,t)\Big)dx\,dt \;-$$

$$-\int_{Q_{a,T}} e^{-\alpha t}\Big[\Big(g\big(x,t,u^m(x,t)\big),\psi(x,t)\Big) + \Big(g\big(x,t,u^m(x,t)\big),u^m(x,t)-\psi(x,t)\Big)\Big]dx\,dt \;=$$

$$= \int_{Q_{a,T}} \Big[\Big(f(x,t),u^m(x,t)\Big) - \frac{\alpha}{2}\big|u^m(x,t)\big|^2 - \frac{1}{2}\Big(\Lambda_x(x,t)u^m(x,t),u^m(x,t)\Big) \;-$$

$$-\Big(C(x,t)u^m(x,t),u^m(x,t)\Big)\Big]dx\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T e^{-\alpha t}\Big(\Lambda_2(0,t)w^m(0,t),w^m(0,t)\Big)dt \;+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T e^{-\alpha t}\Big(\Lambda_1(a,t)v^m(a,t),v^m(a,t)\Big)dt - \frac{1}{2}e^{-\alpha T}\int_0^a \big|u^m(x,T)\big|^2dx + \frac{1}{2}\int_0^a \big|u^{0,m}(x)\big|^2dx \;-$$

$$-\int_{Q_{a,T}} e^{\alpha t}\Big[\Big(g\big(x,t,u^m(x,t)\big),\psi(x,t)\Big) + \Big(g\big(x,t,\psi(x,t)\big),u^m(x,t)-\psi(x,t)\Big)\Big]dx\,dt.$$

Звідси отримаємо нерівність

$$\int_{Q_{a,T}} \Big[(f(x,t),u(x,t)) - \frac{\alpha}{2}|u(x,t)|^2 - \frac{1}{2}(\Lambda_x(x,t)u(x,t),u(x,t)) \;-$$

$$- \big(C(x,t)u(x,t), u(x,t)\big) - \big(\theta(x,t), \psi(x,t)\big) -$$

$$- \big(g(x,t,\psi(x,t)), u(x,t) - \psi(x,t)\big)\Big] e^{-\alpha t}\, dx\, dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T e^{-\alpha t}\big[\big(\Lambda_2(0,t)w(0,t), w(0,t)\big) - \big(\Lambda_1(a,t)v(a,t), v(a,t)\big)\big]dt -$$

$$- \frac{1}{2}e^{-\alpha T}\int_0^a |u(x,T)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^a \left|u^0(x)\right|^2 dx \geq 0.$$

Покладемо в (17) $\varphi(x,t) = u(x,t)e^{-\alpha t}$ і додамо її до останньої нерівності. Отримаємо

$$\int_{Q_{a,T}} e^{-\alpha t}\big(\theta(x,t) - g(x,t,\psi(x,t)), u(x,t) - \psi(x,t)\big)dx\,dt \geq 0. \tag{18}$$

Якщо в оцінці (18) покласти $\psi(x,t) = u(x,t) - \beta\varphi(x,t)$, $\beta > 0$, $\varphi \in L^p_n(Q_{a,T})$ і перейти до границі при $\beta \to +0$, то матимемо рівність

$$\theta(x,t) = g(x,t,u(x,t))$$

майже скрізь в $Q_{a,T}$.

Тим самим існування узагальненого розв'язку задачі (1) – (3) доведено.

Доведемо тепер єдиність узагальненого розв'язку цієї задачі. Нехай існують два узагальнені розв'язки $u^1(x,t)$ і $u^2(x,t)$. Тоді для функції $u(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$ виконується рівність

$$\int_0^a \big(u(x,T), \varphi(x,T)\big)dx +$$

$$+ \int_{Q_{a,T}} \big[-\big(u(x,t), \varphi_t(x,t)\big) + \big(\Lambda(x,t)u(x,t), \varphi_x(x,t)\big) + \big(\Lambda_x(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)\big) +$$

$$+ \big(C(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)\big) + \Big(g\big(x,t,u^1(x,t)\big) - g\big(x,t,u^2(x,t)\big), u(x,t)\Big)\Big]dx\,dt +$$

$$+ \int_0^T \Big(\Lambda_2(0,t)w(0,t), \varphi^2(0,t)\Big)dt - \int_0^T \Big(\Lambda_1(a,t)v(a,t), \varphi^1(a,t)\Big)dt = 0 \tag{19}$$

для довільної функції $\varphi \in C^1_n\big(\overline{Q}_{a,T}\big)$, $\varphi^1(0,t) \equiv 0$, $\varphi^2(a,t) \equiv 0$.

Зауважимо, що згідно з доведеним вище рівність (19) виконується і для функції $\varphi(x,t) = u(x,t)$. Тому, поклавши в (19) $\varphi(x,t) = u(x,t)e^{-\alpha t}$ та використавши умови теореми, отримаємо оцінку

$$\int_{Q_{a,T}} |u(x,t)|^p\,dx\,dt \leq 0$$

при $\alpha + 2c_0 + \lambda^0 > 0$. Отже, $u(x,t) = 0$ майже скрізь в $Q_{a,T}$. Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Зазначимо, що через кожну точку області $Q_{a,T}$ проходять n характеристик системи (1). Тому система рівнянь (16) є не чим іншим як системою (1), записаною вздовж відповідних характеристик. Отже, можна стверджувати, що функція $u(x,t)$, знайдена методом Гальоркіна, задовольняє систему (1) майже у всіх точках області $Q_{a,T}$. Крім того, з (4) легко отримати, що ця функція майже скрізь задовольняє крайові (2) і початкову (3) умови.

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови теореми і, крім того,* $\lambda_i = \lambda_i(x)$, $g_i = g_i(x, u)$, $i = 1, \ldots, n$, $c_{ij} \in C([0, T]; L^2(0, a))$, $i, j = 1, \ldots, n$, $f \in C_n([0, T]; L^q(0, a))$, $u^0 \in H_n^1(0, a)$, u^0 *задовольняє крайові умови* (2), *то узагальнений розв'язок* $u(x, t)$ *задачі* (1) – (3) *належить до класу* $C_n([0, T]; L^2(0, a))$.

Доведення. Нехай $\delta > 0$ є довільним малим числом. Покладемо $\hat{u}^m(x, t) = u^m(x, t) - u^m(x, 0)$. Тоді, використавши систему рівнянь (5), отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{a,\delta}} \Big[\big(\hat{u}_t^m(x, t), \hat{u}^m(x, t)\big) - \big(\Lambda(x)\hat{u}_x^m(x, t), \hat{u}^m(x, t)\big) + \big(C(x, t)\hat{u}^m(x, t), \hat{u}^m(x, t)\big) +$$

$$+ \big(g\big(x, t, \hat{u}^m(x, t)\big) - g\big(x, t, \hat{u}^m(x, 0)\big), \hat{u}^m(x, t)\big) - \big(f(x, t), \hat{u}^m(x, t)\big) \Big] dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{a,\delta}} \Big[-\big(\Lambda(x)\hat{u}_x^m(x, 0), \hat{u}^m(x, t)\big) + \big(C(x, t)\hat{u}^m(x, 0), \hat{u}^m(x, t)\big) +$$

$$+ \big(g\big(x, t, \hat{u}^m(x, 0)\big), \hat{u}^m(x, t)\big) \Big] dx\,dt = 0. \tag{20}$$

На підставі умов наслідку та оцінок (10) з (20) матимемо

$$\int\limits_0^a \left|\hat{u}^m(x, \delta)\right|^2 dx < M_3\delta, \tag{21}$$

де стала M_3 не залежить від m і δ.

Нехай тепер

$$\tilde{u}^m(x, t) = u^m(x, t+\delta) - u^m(x, t).$$

Тоді аналогічно до рівності (20) з системи (5) легко отримати рівність

$$\int\limits_{Q_{a,\tau}} \Big[\big(\tilde{u}_t^m(x, t), \tilde{u}^m(x, t)\big) - \big(\Lambda(x)\tilde{u}_x^m(x, t), \tilde{u}^m(x, t)\big) +$$

$$+ \big(C(x, t+\delta)\tilde{u}^m(x, t), \tilde{u}^m(x, t)\big) + \big((C(x, t+\delta) - C(x, t))\tilde{u}^m(x, t), \tilde{u}^m(x, t)\big) +$$

$$+ \big(g\big(x, t, u^m(x, t+\delta)\big) - g\big(x, t, u^m(x, t)\big), \tilde{u}^m(x, t)\big) -$$

$$- \big(f(x, t+\delta) - f(x, t), \hat{u}^m(x, t)\big) \Big] dx\,dt = 0. \tag{22}$$

Нехай ε є довільним фіксованим додатним числом. Оскільки $\tilde{u}^m(x, 0) = \hat{u}^m(x, \delta)$, на підставі умов наслідку та нерівностей (9), (10), (21) існує таке δ, $0 < \delta < \varepsilon$, що з (22) випливає оцінка

$$\int\limits_0^a \left|\tilde{u}^m(x, \tau)\right|^2 dx < \varepsilon, \qquad \tau \in (0, T].$$

Отже, послідовність $\left\{u^m(x, t)\right\}$ є, крім того, одностайно неперервною і обмеженою в просторі $C_n([0, T]; L^2(0, a))$. Тому існує послідовність (збережемо за нею те саме позначення) така, що

$$\int\limits_0^a \big(u^m(x, t), \varphi(x, t)\big) dx \to \int\limits_0^a (u(x, t), \varphi(x, t))\, dx$$

при $m \to \infty$ рівномірно на $[0, T]$ для довільної функції $\varphi \in C_n([0, T]; L^2(0, a))$, тобто $u \in C_n([0, T]; L^2(0, a))$, що й потрібно було довести.

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми і, крім того,* $c_{ijx} \in L^\infty(Q_{a,T})$, $i, j = 1, \ldots, n$, $|g_{ix}(x, t, \xi)| \leq g^1 \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p-1}$, $g^1 = \mathrm{const}$, $i, j = 1, \ldots, n$, *для майже всіх* $(x, t) \in Q_{a,T}$ *і для всіх* $\xi \in \mathbb{R}^n$, *функції* $g_i(x, t, \xi)$ *є диференційовними за змінними* ξ *для майже всіх* $(x, t) \in Q_{a,T}$, *матриця* $\left(\dfrac{\partial g_i(x, t, \xi)}{\partial \xi_j}\right)_{i,j=1}^n$ *є невід'ємно визначеною для майже всіх* $(x, t) \in Q_{a,T}$, $g_i(0, t, 0, \ldots, 0, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, $g_i(a, t, \xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = k+1, \ldots, n$, $f_x \in L^q_n(Q_{a,T})$, $u^0 \in H^1_n(0, a)$, u^0 *задовольняє крайові умови* (2).

Тоді узагальнений розв'язок $u(x, t)$ *задачі* (1) – (3) *є неперервною функцією за обома змінними в* $\overline{Q}_{a,T}$.

Доведення. Покладемо $a_j = \dfrac{\pi(2j-1)}{2a}$, $j = 1, 2, \ldots$. Тоді

$$\frac{d^2\omega^i_j(x)}{dx^2} = -a_j^2\omega^i_j(x)$$

для всіх $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots$. Враховуючи це, з рівнянь (5) легко отримати рівність

$$\int\limits_{Q_{a,\tau}} \Big[\big(u_t^N(x, t), u_{xx}^N(x, t)\big) - \big(\Lambda(x, t)u_x^N(x, t), u_{xx}^N(x, t)\big) + \big(C(x, t)u^N(x, t), u_{xx}^N(x, t)\big) +$$

$$+ \big(g(x, t, u^N), u_{xx}^N(x, t)\big) - \big(f(x, t), u_{xx}^N(x, t)\big)\Big] dx\,dt = 0, \qquad \tau \in (0, T].$$

Звідси після нескладних перетворень, враховуючи умови наслідку, приходимо до рівності

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^a \big|u_x^N(x, \tau)\big|^2 dx \; -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \Big[\big(\Lambda_1(0, t)v_x^N(0, t), v_x^N(0, t)\big) - \big(\Lambda_2(a, t)w_x^N(a, t), w_x^N(a, t)\big)\Big] dt \; +$$

$$+ \int\limits_{Q_{a,\tau}} \Big[-\frac{1}{2}\big(\Lambda_x(x, t)u_x^N(x, t), u_x^N(x, t)\big) + \big(C(x, t)u_x^N(x, t), u_x^N(x, t)\big) \; +$$

$$+ \big(C_x(x, t)u^N(x, t), u_x^N(x, t)\big) + \big(g_x\big(x, t, u^N(x, t)\big), u_x^N(x, t)\big) \; +$$

$$+ \big(G\big(x, t, u^N(x, t)\big)u_x^N(x, t), u_x^N(x, t)\big) + \big(f_x(x, t), u_x^N(x, t)\big)\Big] dx\,dt \; +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \Big[\big(C_{12}(0, t)w^N(0, t), v_x^N(0, t)\big) - \big(C_{21}(a, t)v^N(a, t), w_x^N(a, t)\big)\Big] dt \; =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a \big|u_x^{0,N}(x)\big|^2 dx, \tag{23}$$

де елементами матриці G є похідні $\dfrac{\partial g_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $C_{12} = (c_{ij})_{i=1,\ldots,k}^{j=k+1,\ldots,k}$, $C_{21} = (c_{ij})_{i=k+1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,k}$. На підставі умов наслідку та оцінок (9) – (11) з рівності (23) матимемо

$$\int_0^a \left|u_x^N(x,\tau)\right|^2 dx < M_3$$

для всіх $\tau \in (0, T]$, де стала M_3 не залежить від N. Тому підпослідовність $\left\{u^m(x,t)\right\}$ можемо вибрати ще й такою, що

$$u_x^m \to u_x \ \text{*-слабко в} \ L_n^\infty\big((0,T); L^2(0,a)\big)$$

при $m \to \infty$.

На підставі рівності (17) легко довести, що $u_t \in L_n^2(Q_{a,T}) + L_n^q(Q_{a,T})$. Отже, функція $u(x,t)$ є неперервною за кожною змінною в області $\overline{Q}_{a,T}$. Наслідок доведено.

***Зауваження* 2.** Прикладом функцій $g_i(x,t,u)$, які задовольняють умови теореми та її наслідків, є функції $g_i = |u|^{p-2}u_i$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Задача в необмеженій області. Розглянемо в області $Q_T = \{(x,t)\colon 0 < x < +\infty,\ 0 < t < T\}$ систему диференціальних рівнянь

$$u_t - \Lambda(x,t)u_x + C(x,t)u + g(x,t,u) = f(x,t). \tag{24}$$

Через $L_{\mathrm{loc}}^r(Q_T)$, $1 \le r \le \infty$ $\left(C_{\mathrm{loc}}^m(\overline{Q}_T)\right)$, позначатимемо простір функцій, які належать простору $L^r(Q_{a,T})$ $\left(C^m(\overline{Q}_{a,T})\right)$ для довільного числа $a > 0$.

Припускатимемо, що в області Q_T коефіцієнти системи (24) задовольняють такі умови:

Λ_2) $\lambda_i, \lambda_{ix} \in C_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $\quad i = 1, \ldots, n, \quad \lambda_i(x,t) < 0, \quad i = 1, \ldots, k,$

$$\lambda_j(x,t) > 0, \quad j = k+1, \ldots, n, \quad (\Lambda(x,t)\xi, \xi) \ge \lambda_0 |\xi|^2, \quad \lambda_0 = \mathrm{const},$$

$$(\Lambda_x(x,t)\xi, \xi) \ge \lambda^0 |\xi|^2, \quad \lambda^0 = \mathrm{const},$$

$$(\Lambda_2(0,t)\eta, \eta) \ge \overline{\lambda}|\eta|^2, \quad \overline{\lambda} = \mathrm{const}, \ \text{для всіх} \ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^{n-k};$$

C_2) $C(x,t) = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, $\quad c_{ij} \in L_{\mathrm{loc}}^\infty(Q_T)$, $\quad i, j = 1, \ldots, n,$

$$(C(x,t)\xi, \xi) \ge c_0|\xi|^2, \quad c_0 = \mathrm{const}, \quad \text{для всіх} \ \xi \in \mathbb{R}^n;$$

G_2) функції $g_i(x,t,\xi)$, $i = 1, \ldots, n$, належать простору $L_{\mathrm{loc}}^\infty(Q_T)$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і є неперервними за змінними ξ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

існують таке число $p > 2$ і сталі $g_0 > 0$, $g^0 > 0$, що для всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ і майже всіх $(x,t) \in Q_T$ виконуються нерівності

$$(g(x,t,\xi) - g(x,t,\eta), \xi - \eta) \ge g_0 |\xi - \eta|^p,$$

$$|g_i(x,t,\xi)| \le g^0 \sum_{j=1}^n \left|\xi_j\right|^{p-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для системи (24) задамо крайові

$$v(0,t) = 0 \tag{25}$$

і початкові

$$u(x,0) = u^0(x) \tag{26}$$

умови, де $u^0(x) = \operatorname{colon}\left(u_1^0(x), \ldots, u_n^0(x)\right)$.

Означення 2. *Функцію* $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_i \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q_T)$, $u_i(\cdot, T) \in L^2_{\mathrm{loc}}(0, \infty)$, $i = 1, \ldots, n$, $u_j(0, \cdot) \in L^2(0,T)$, $j = k+1, \ldots, n$, *називатимемо узагальненим розв'язком задачі* (24) – (26), *якщо вона задовольняє рівність*

$$\int_0^\infty (u(x,T), \varphi(x,T))\,dx \; +$$

$$+ \int_{Q_{a,T}} \Big[-(u(x,t), \varphi_t(x,t)) + (\Lambda(x,t)u(x,t), \varphi_x(x,t)) + (\Lambda_x(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) \; +$$

$$+ \; (C(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) + (g(x,t,u), \varphi(x,t)) \Big]\,dx\,dt \; +$$

$$+ \int_0^T \left(\Lambda_2(0,t)w(0,t), \varphi^2(0,t)\right)dt = \int_0^\infty \left(u^0(x), \varphi(x,0)\right)dx \; +$$

$$+ \int_{Q_{a,T}} (f(x,t), \varphi(x,t))\,dx\,dt \tag{27}$$

для довільної функції $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$, $\varphi^1 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\varphi^2 = (\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i \in C^1(\overline{Q}_T)$ *і мають обмежені носії в* $\overline{Q}_T$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi^1(0,t) \equiv 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\Lambda_2)$, $C_2)$, $G_2)$ *і, крім того,* $f_i \in L^q_{\mathrm{loc}}(Q_T)$, $u_i^0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$, $1/p + 1/q = 1$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (24) – (26).

Доведення. Нехай a — довільне фіксоване число, $a > 1$. Розглянемо в області $Q_{a,T}$ задачу

$$u_t - \Lambda(x,t)u_x + C(x,t)u + g(x,t,u) = f^a(x,t), \tag{28}$$

$$v(0,t) = 0, \quad w(a,t) = 0, \tag{29}$$

$$u(x,0) = u^{0,a}(x), \tag{30}$$

де

$$f^a(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & \text{якщо } (x,t) \in Q_{a,T}; \\ 0, & \text{якщо } (x,t) \in Q_T \setminus Q_{a,T}, \end{cases}$$

$$u^{0,a}(x) = \begin{cases} u^0(x), & \text{якщо } x \in (0,a); \\ 0, & \text{якщо } x \in (a, +\infty). \end{cases}$$

Тоді для задачі (28) – (30) виконуються умови теореми 1. Отже, існує узагальнений розв'язок $u^a(x,t)$ цієї задачі, тобто виконується рівність

$$\int_0^a \left(u^a(x,T), \varphi(x,T)\right)dx \; +$$

$$+ \int_{Q_{a,T}} \Big[-\left(u^a(x,t), \varphi_t(x,t)\right) + \left(\Lambda(x,t)u^a(x,t), \varphi_x(x,t)\right) + \left(\Lambda_x(x,t)u^a(x,t), \varphi(x,t)\right) \; +$$

$$+ \left(C(x,t)u^a(x,t), \varphi(x,t)\right) + \left(g(x,t,u^a), \varphi(x,t)\right)\Big]dx\,dt \; +$$

$$+ \int_0^T \left(\Lambda_2(0,t)w^a(0,t), \varphi^2(0,t)\right)dt - \int_0^T \left(\Lambda_1(a,t)v^a(a,t), \varphi^1(a,t)\right)dt \; =$$

$$= \int_0^a \left(u^{0,a}(x), \varphi(x,0)\right)dx + \int_{Q_{a,T}} \left(f^a(x,t), \varphi(x,t)\right)dx\,dt \tag{31}$$

для довільної функції $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$, $\varphi^1 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\varphi^2 = (\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i \in C^1\left(\overline{Q}_{a,T}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi^1(0,t) \equiv 0$, $\varphi^2(a,t) \equiv 0$. Зокрема, рівність (31) має сенс і у випадку, коли $\varphi(x,t) = u^a(x,t)$.

Продовжимо функцію u^a на область $Q_T \setminus Q_{a,T}$ і збережемо за нею те саме позначення. Тоді ця функція задовольнятиме (27) (відповідно з функціями f^a і $u^{0,a}$). Надавши a значень 2, 3, 4, …, отримаємо послідовність функцій $\{u^s(x, t)\}$, визначених в Q_T. Нехай $b > 2$ є довільним числом. Розглянемо різницю

$$u^{m,s}(x,t) = u^m(x,t) - u^s(x,t),$$

де $m > b$ і $s > b$.

Покладемо $\varphi(x,t) = u^{m,s}(x,t)\psi^\alpha(x)$, де

$$\psi(x) = \begin{cases} (b^2 - x^2)/b, & \text{якщо } x \in [0, b]; \\ 0, & \text{якщо } x \in (b, +\infty), \end{cases}$$

$$\alpha > \max\{1; 2/(p-2)\}.$$

Тоді, віднявши рівності (27), записані для $u^m(x,t)$ і $u^s(x,t)$, отримаємо рівність

$$\int_0^b \left(u^{m,s}(x,T), \varphi(x,T)\right)dx \; +$$

$$+ \int_{Q_{b,T}} \Big[-\left(u^{m,s}(x,t), \varphi_t(x,t)\right) + \left(\Lambda(x,t)u^{m,s}(x,t), \varphi_x(x,t)\right) \; +$$

$$+ \left(\Lambda_x(x,t)u^{m,s}(x,t), \varphi(x,t)\right) \; +$$

$$+ \left(C(x,t)u^{m,s}(x,t), \varphi(x,t)\right) + \left(g(x,t,u^m) - g(x,t,u^s), \varphi(x,t)\right)\Big]dx\,dt \; +$$

$$+ \int_0^T \left(\Lambda_2(0,t)w^{m,s}(0,t), \varphi^2(0,t)\right)dt - \int_0^T \left(\Lambda_1(b,t)v^{m,s}(b,t), \varphi^1(b,t)\right)dt = 0. \tag{32}$$

Врахувавши вигляд функції φ, після елементарних перетворень у рівності (32) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_0^b \left|u^{m,s}(x,T)\right|^2 \psi^\alpha(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^T \left(\Lambda_2(0,t)w^{m,s}(0,t), w^{m,s}(0,t)\right)dt \; +$$

$$+ \int_{Q_{b,T}} \Big[\Big(\frac{1}{2}\left(\Lambda_x(x,t)u^{m,s}(x,t), u^{m,s}(x,t)\right) + \left(C(x,t)u^{m,s}(x,t), u^{m,s}(x,t)\right) \; +$$

$$+ \left(g(x,t,u^m) - g(x,t,u^s), u^{m,s}(x,t)\right)\Big)\psi^{\alpha}(x) -$$

$$- \alpha\left(\Lambda(x,t)u^{m,s}(x,t), u^{m,s}(x,t)\right)\psi^{\alpha-1}(x)\psi'(x)\Big]dx\,dt = 0. \tag{33}$$

Очевидно, $-\psi'(x) = 2x/b \le 2$. Тому з (33) на підставі умов $\Lambda_2)$, $C_2)$, $G_2)$ випливає нерівність

$$\int_0^b \left|u^{m,s}(x,T)\right|^2 \psi^{\alpha}(x)\,dx + \bar{\lambda}b^{\alpha}\int_0^T \left|w^{m,s}(0,t)\right|^2 dt +$$

$$+ (\lambda^0 + 2c_0)\int_{Q_{b,T}} \left|u^{m,s}(x,t)\right|^2 \psi^{\alpha}(x)\,dx\,dt + 2g_0\int_{Q_{b,T}} \left|u^{m,s}(x,t)\right|^p dx\,dt -$$

$$- 2\alpha\lambda_0\int_{Q_{b,T}} \left|u^{m,s}(x,t)\right|^2 \psi^{\alpha-1}(x)\psi'(x)\,dx\,dt \le 0. \tag{34}$$

Оскільки

$$\left|\int_{Q_{b,T}} \left|u^{m,s}(x,t)\right|^2 \psi^{\alpha-1}(x)\psi'(x)\,dx\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{g_0}{2}\int_{Q_{b,T}} \left|u^{m,s}(x,t)\right|^p \psi^{\alpha}(x)\,dx\,dt + M_1 b^{\alpha+1-p/(p-2)},$$

де

$$M_1 = \frac{2^{\alpha+1}(p-2)^2 T}{p^{p/(p-2)} g_0^{2/(p-2)}[\alpha(p-2)-2]},$$

то з (34), застосувавши лему Гронуолла – Беллмана, отримаємо оцінку

$$\int_0^b \left|u^{m,s}(x,T)\right|^2 \psi^{\alpha}(x)\,dx + b^{\alpha}\int_0^T \left|w^{m,s}(0,t)\right|^2 dt +$$

$$+ \int_{Q_{b,T}} \left|u^{m,s}(x,t)\right|^p \psi^{\alpha}(x)\,dx\,dt \le M_2 b^{\alpha+1-p/(p-2)}, \tag{35}$$

причому стала M_2 не залежить від m, s і b. Нехай b_0, $0 < b_0 < b$, є фіксованим числом. Тоді $\psi(x) \ge b - b_0$ для $x \in [0, b_0]$ і з (35) випливають оцінки

$$\int_0^{b_0} \left|u^{m,s}(x,T)\right|^2 dx \le M_3\left(\frac{b}{b-b_0}\right)^{\alpha} b^{1-p/(p-2)},$$

$$\int_0^T \left|w^{m,s}(0,t)\right|^2 dt \le M_3 b^{1-p/(p-2)},$$

$$\int_{Q_{b_0,T}} \left|u^{m,s}(x,t)\right|^p dx\,dt \le M_3\left(\frac{b}{b-b_0}\right)^{\alpha} b^{1-p/(p-2)},$$

де стала M_3 не залежить від m, s і b. Оскільки $\left(\dfrac{b}{b-b_0}\right)^{\alpha} \to 1$ при $b \to \infty$, а $p > p-2$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $b^0 > 0$, що

$$M_3\left(\frac{b}{b-b_0}\right)^{\alpha}(b^0)^{1-p/(p-2)} < \varepsilon$$

для $b > b_0$. Отже, на підставі критерію Коші

$$u_i^s(\cdot, T) \to z_i(\cdot) \quad \text{в} \quad L^2(0, b_0), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$u_i^s \to u_i \quad \text{в} \quad L^p\left(Q_{b_0, T}\right), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$w_i^s(0, \cdot) \to \zeta_i(\cdot) \quad \text{в} \quad L^2(0, T), \qquad i = k+1, \ldots, n,$$

при $s \to \infty$. З огляду на те, що b_0 є довільним числом, $u_i \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q_T)$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$.

Покладемо тепер у рівності (31) $a = s$. Перейшовши в ній до границі при $s \to 0$, отримаємо рівність

$$\int_0^\infty (z(x), \varphi(x, T))\,dx \;+$$

$$+ \int_{Q_{a,T}} \Big[-(u(x,t), \varphi_t(x,t)) + (\Lambda(x,t)u(x,t), \varphi_x(x,t)) + (\Lambda_x(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) \;+$$

$$+\; (C(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) + (g(x,t,u(x,t)), \varphi(x,t))\Big]\,dx\,dt \;+$$

$$+ \int_0^T \left(\Lambda_2(0,t)\zeta(t), \varphi^2(0,t)\right)dt = \int_0^\infty \left(u^0(x), \varphi(x,0)\right)dx + \int_{Q_{a,T}} (f(x,t), \varphi(x,t))\,dx\,dt$$

за умови, що $\operatorname{supp}\varphi$ є обмеженим. Тепер, як і при доведенні теореми 1, доводимо, що $z(x) = u(x, T)$, $\zeta(t) = w(0, t)$, тобто функція $u(x, t)$ є узагальненим розв'язком задачі (24) – (26).

Доведемо єдиність розв'язку цієї задачі. Нехай існують два узагальнені розв'язки $u^1(x, t)$ і $u^2(x, t)$ задачі (24) – (26).

Покладемо $u(x, t) = u^1(x, t) - u^2(x, t)$. Тоді функція u задовольняє рівність

$$\int_0^\infty (u(x,T), \varphi(x,T))\,dx \;+$$

$$+ \int_{Q_{a,T}} \Big[-(u(x,t), \varphi_t(x,t)) + (\Lambda(x,t)u(x,t), \varphi_x(x,t)) + (\Lambda_x(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) \;+$$

$$+\; (C(x,t)u(x,t), \varphi(x,t)) + \left(g\left(x,t,u^1\right) - g\left(x,t,u^2\right), \varphi(x,t)\right)\Big]\,dx\,dt \;+$$

$$+ \int_0^T \left(\Lambda_2(0,t)w(0,t), \varphi^2(0,t)\right)dt = 0 \tag{36}$$

для довільної функції $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$, $\varphi^1 = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\varphi^2 = (\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n)$, $\varphi_i \in C^1\left(\overline{Q}_T\right)$ і мають обмежені носії в $\overline{Q}_T$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi^1(0, t) \equiv 0$.

Неважко переконатись (див. доведення теореми 1), що рівність (36) має сенс для функції $\varphi = u(x, t)\psi^{\alpha}(x)$, де b є довільним фіксованим числом. Далі, як і для різниці $u^{m,s}(x, t)$, отримуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_{b_0,T}} |u(x,t)|^p \, dx\, dt \le \varepsilon, \tag{37}$$

вибравши число b достатньо великим. Оскільки ε є довільним додатним числом, то з (37) випливає, що $u(x,t) = 0$ майже скрізь в $Q_{b_0,T}$. З огляду на довільність числа b_0 отримаємо єдиність узагальненого розв'язку задачі (24) – (26). Теорему доведено.

1. *Аболиня В. Е., Мышкис А. Д.* Теорема о единственности решений смешанной задачи для обобщенных решений телеграфных уравнений // Уч. зап. Латв. ун-та. Сер. физ.-мат. – 1952. – **6**, вып. 1. – С. 75 – 78.
2. *Аболиня В. Е., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Там же. – 1958. – **20**, вып. 3. – С. 87 – 104.
3. *Аболиня В. Е., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. – 1960. – **50**, № 4. – С. 423 – 442.
4. *Вагабов А. И.* Решение одномерных смешанных для гиперболической системы первого порядка // Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. – 1963. – № 4. – С. 11 – 17.
5. *Вагабов А. И.* Условия корректности одномерных смешанных задач для гиперболических систем // Докл. АН СССР. – 1964. – **155**, № 6. – С. 1247 – 1249.
6. *Кузнецов Н. Н.* О гиперболических системах линейных уравнений с разрывными коэффициентами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1963. – **3**, № 2. – С. 299 – 313.
7. *Кузнецов Н. Н.* О единственности решения гиперболической системы линейных уравнений с разрывными коэффициентами // Там же. – 1964. – **4**, № 3. – С. 571 – 576.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
9. *Мельник З. О.* Об одном способе решения смешанной задачи для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 4. – С. 560 – 570.
10. *Мельник З. О.* Общие смешанные задачи для двухмерных гиперболических систем // Там же. – 1966. – **2**, № 7. – С. 958 – 966.
11. *Мельник З. О., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для двухмерной гиперболической системы первого порядка с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1965. – **68**, № 4. – С. 632 – 638.
12. *Мельник З. О.* О гиперболических уравнениях с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 8. – С. 1530 – 1532.
13. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
14. *Потапов М. М.* Обобщенное решение смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы первого порядка // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 10. – С. 1826 – 1828.
15. *Агранович М. С.* К теории граничных задач для симметризуемых систем первого порядка // Мат. сб. – 1967. – **73**, № 2. – С. 161 – 197.
16. *Friedrichs K. O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1954. – **7**. – P. 345 – 392.
17. *Friedrichs K. O., Lax P.* Boundary value problems for first order operators // Ibid. – 1965. – **18**. – P. 355 – 388.
18. *Lax P. D., Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Ibid. – 1960. – **13**. – P. 427 – 455.
19. *Жданович В. Ф.* Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. – 1959. – **47**, № 3. – С. 307 – 354.
20. *Лепин А. Я.* Применение метода сеток к гиперболической системе квазилинейных уравнений на плоскости // Докл. АН СССР. – 1963. – **149**, № 3. – С. 516 – 517.
21. *Кучеренко Е. И.* О сходимости метода Галеркина для задачи Коши систем нелинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 3. – С. 553 – 555.
22. *Коддингтон Е. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.

Одержано 29.12.2000