УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

We obtain an amplified version of the Kolmogorov comparison theorem. In particular, this enables us to obtain an amplified Kolmogorov inequality

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} M(x)^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{k/r}$$

for the functions $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$, where

$$M(x) := \frac{1}{2} \sup_{\alpha, \beta} \left\{ | x(\beta) - x(\alpha) | : \; x'(t) \ne 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \right\},$$

$k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, φ_r is the Euler perfect spline of order r. By using this inequality, we amplify the Bernstein inequality for trigonometric polynomials and the Tikhomirov inequality for splines.

We present some other applications of the inequality obtained.

Одержано посилений варіант теореми порівняння Колмогорова. Це дозволило, зокрема, отримати підсилену нерівність Колмогорова

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} M(x)^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{k/r}$$

для функцій $x \in L_\infty^r(\mathbf{R})$, де

$$M(x) := \frac{1}{2} \sup_{\alpha, \beta} \left\{ | x(\beta) - x(\alpha) | : \; x'(t) \ne 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \right\},$$

$k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, φ_r — ідеальний сплайн Ейлера порядку r, за допомогою якої підсилено нерівність Бернштейна для тригонометричних поліномів і нерівність Тихомирова для сплайнів.

Наведено інші застосування цієї нерівності.

1. Введение. Символом G будем обозначать вещественную ось $\mathbf{R}$ или единичную окружность $\mathbf{T}$, реализованную в виде промежутка $[-\pi, \pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$ таких, что $\| x \|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\| x \|_{L_p(G)} := \left\{ \int_G | x(t) |^p dt \right\}^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

и

$$\| x \|_{L_\infty(G)} := \operatorname*{sup\,vrai}_{t \in G} | x(t) |.$$

Для краткости вместо $\| x \|_{L_p(\mathbf{T})}$ будем писать $\| x \|_p$.

Для $r \in \mathbf{N}$ через $L_\infty^r(G)$ обозначим пространство функций $x \in L_\infty(G)$ таких, что $x^{(r-1)}$ ($x^{(0)} := x$) локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Символом $\varphi_r(t)$, $t \in \mathbf{R}$, обозначим r-й периодический интеграл от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$ со средним значением на периоде, равным нулю. Для $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$, положим $\varphi_{\lambda, r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$.

А. Н. Колмогоров [1] доказал следующую теорему.

Теорема A. *Пусть* $k, r \in \boldsymbol{N}$, $k < r$. *Тогда для любой функции* $x \in L_\infty^r(\boldsymbol{R})$ *справедливо неравенство*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_\infty}{\left\| \varphi_r \right\|_\infty^{1-k/r}} \left\| x \right\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}^{k/r}. \qquad (1)$$

Неравенство (1) *обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_{\lambda,r}(t+b)$, $\lambda, a, b \in \boldsymbol{R}$, $\lambda > 0$.

Доказательство теоремы A в [1] основано на так называемой теореме сравнения. Ввиду важности этой теоремы для дальнейшего изложения приведем ее формулировку.

Теорема B. *Пусть* $r \in \boldsymbol{N}$, $x \in L_\infty^r(\boldsymbol{R})$. *Пусть, далее, число* $\lambda > 0$ *выбрано из условия*

$$\| x \|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le \left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_\infty, \qquad (2)$$

а числа $t, y \in \boldsymbol{R}$ *удовлетворяют условию*

$$x(t) = \varphi_{\lambda,r}(y).$$

Тогда

$$| x'(t) | \le \left| \varphi_{\lambda,r-1}(y) \right|.$$

В настоящей работе получено усиление теоремы сравнения Колмогорова (см. теорему 1), в котором $\| x \|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}$ в соотношении (2) заменена характеристикой $M(x)$, где для дифференцируемой функции $x\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ положено

$$M(x) := \frac{1}{2} \sup_{\alpha,\beta} \left\{ | x(\beta) - x(\alpha) | \colon x'(t) \ne 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \right\}. \qquad (3)$$

Ясно, что $M(x) \le \| x \|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}$.

С помощью теоремы 1 получено (см. теорему 2) усиленное неравенство Колмогорова (1), в котором $\| x \|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}$ заменена величиной $M(x)$.

В качестве приложения усиленного неравенства Колмогорова усилены (см. п. 3) известные неравенства Бернштейна для тригонометрических полиномов и Тихомирова для сплайнов.

Приведены другие приложения усиленной теоремы сравнения Колмогорова (см. замечание 2).

2. Усиление теоремы сравнения и неравенства Колмогорова. Для $r \in \boldsymbol{N}$ положим

$$W_\infty^r(\boldsymbol{R}) := \left\{ x \in L_\infty^r(\boldsymbol{R}) \colon \left\| x^{(r)} \right\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le 1 \right\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $r \in \boldsymbol{N}$, $x \in W_\infty^r(\boldsymbol{R})$ *и число* λ *выбрано из условия*

$$\| x' \|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le \left\| \varphi_{\lambda,r-1} \right\|_\infty. \qquad (4)$$

Пусть, далее, $[\alpha, \beta]$ — *промежуток монотонности функции* x, *причем* $x'(\alpha) = x'(\beta) = 0$, *а* $[\xi, \eta]$ — *промежуток монотонности функции* $\varphi_{\lambda,r}$, *причем* $\varphi_{\lambda,r-1}(\xi) = \varphi_{\lambda,r-1}(\eta) = 0$.

Если t — *произвольная точка отрезка* $[\alpha, \beta]$, *для которой существует точка* $y \dot{\in} \left[(\xi + \eta)/2, \eta \right]$ *такая, что*

$$| x(\beta) - x(t) | = \left| \varphi_{\lambda,r}(\eta) - \varphi_{\lambda,r}(y) \right|, \qquad (5)$$

или же точка $y \in [\xi, (\xi+\eta)/2]$ *такая, что*

$$|x(t) - x(\alpha)| = |\varphi_{\lambda,r}(y) - \varphi_{\lambda,r}(\xi)|, \tag{6}$$

то

$$|x'(t)| \le |\varphi_{\lambda,r-1}(y)|. \tag{7}$$

Доказательство. Для $r = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем предполагать, что $r \ge 2$.

Не ограничивая общности, можно считать, что функция x не убывает на отрезке $[\alpha, \beta]$, а функция $\varphi_{\lambda,r}$ возрастает на отрезке $[\xi, \eta]$.

Докажем (7) в предположении (5).

Предположим, что неравенство (7) не выполняется, т. е.

$$|x'(t)| > |\varphi_{\lambda,r-1}(y)|.$$

Тогда $t < \beta$ и, следовательно, $y < \eta$. Используя условие (4) и применяя теорему сравнения Колмогорова (теорема В) к производной x', получаем

$$x'(t+u) > \varphi_{\lambda,r-1}(y+u), \qquad u \in (0, \eta - y),$$

при этом $\beta - t \ge \eta - y$. Но тогда

$$x(\beta) - x(t) = \int_t^\beta x'(u)du = \int_0^{\beta-t} x'(t+u)du > \int_0^{\eta-y} \varphi_{\lambda,r-1}(y+u)du =$$

$$= \int_y^\eta \varphi_{\lambda,r-1}(u)du = \varphi_{\lambda,r}(\eta) - \varphi_{\lambda,r}(y),$$

что противоречит условию (5).

Аналогично доказывается неравенство (7) в предположении (6).

Лемма 1 доказана.

Следующая теорема усиливает теорему сравнения Колмогорова.

Теорема 1. *Пусть* $r \in \boldsymbol{N}$, $x \in W^r_\infty(\boldsymbol{R})$ *и число* λ *выбрано из условия*

$$M(x) = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty, \tag{8}$$

где величина $M(x)$ *определена равенством* (3). *Пусть, далее,* $[\alpha, \beta]$ — *промежуток монотонности функции* x *такой, что* $x'(t) \ne 0$ $\forall t \in (\alpha, \beta)$; $x'(\alpha) = 0$, *если* $\alpha \ne -\infty$, $x'(\beta) = 0$, *если* $\beta \ne +\infty$, *а* $[\xi, \eta]$ — *промежуток монотонности функции* $\varphi_{\lambda,r}$, *причем* $\varphi_{\lambda,r-1}(\xi) = \varphi_{\lambda,r-1}(\eta) = 0$.

Тогда если для точки $t \in [\alpha, \beta]$ *точка* $y \in [\xi, \eta]$ *выбрана так, что*

$$|x(\beta) - x(t)| = |\varphi_{\lambda,r}(\eta) - \varphi_{\lambda,r}(y)|, \tag{9}$$

или же так, что

$$|x(t) - x(\alpha)| = |\varphi_{\lambda,r}(y) - \varphi_{\lambda,r}(\xi)|, \tag{10}$$

то

$$|x'(t)| \le |\varphi_{\lambda,r-1}(y)|. \tag{11}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что ввиду (8) для произвольной точки $t \in [\alpha, \beta]$ существуют точка $y = y_1 \in [\xi, \eta]$, удовлетворяющая равенству (9), и точка $y = y_2 \in [\xi, \eta]$, удовлетворяющая равенству (10).

Докажем, теперь, что из условия (8) вытекает неравенство

$$\|x'\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le \|\varphi_{\lambda,r-1}\|_\infty, \tag{12}$$

т. е. выполнено условие (4) леммы 1.

Предположим противное, т. е.

$$\|x'\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} > \|\varphi_{\lambda,r-1}\|_\infty. \tag{13}$$

Тогда, принимая во внимание очевидное равенство $\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty$, заключаем, что существует число $\gamma \in (0, \lambda)$ такое, что

$$\|x'\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} = \|\varphi_{\gamma,r-1}\|_\infty. \tag{14}$$

Кроме того, из условия (8) и неравенства $\gamma < \lambda$ следует

$$M(x) < \|\varphi_{\gamma,r}\|_\infty. \tag{15}$$

Выберем точку $t_0 \in \boldsymbol{R}$ так, чтобы

$$\|x'\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} = |x'(t_0)|.$$

Переходя, если нужно, к функции $-x$, можно считать, что $x'(t_0) > 0$. Таким образом,

$$\|x'\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} = x'(t_0). \tag{16}$$

Выберем далее число $a \in \boldsymbol{R}$ так, чтобы

$$\|\varphi_{\gamma,r-1}\|_\infty = \varphi_{\gamma,r-1}(t_0 + a). \tag{17}$$

Обозначим через t_1 и t_2 ближайшие слева и справа от точки t_0 нули функции $\varphi_{\gamma,r-1}(\cdot + a)$. Учитывая (14), (16), (17) и применяя теорему сравнения Колмогорова к функции x', получаем

$$x'(t) \ge \varphi_{\gamma,r-1}(t + a), \qquad t \in (t_1, t_2).$$

Отсюда заключаем, что

$$x'(t) > 0, \qquad t \in (t_1, t_2),$$

и

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt \ge \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{\gamma,r-1}(t + a)\,dt =$$

$$= \varphi_{\gamma,r}(t_2 + a) - \varphi_{\gamma,r}(t_1 + a) = 2\|\varphi_{\gamma,r}\|_\infty.$$

Таким образом,

$$M(x) \ge \frac{1}{2}|x(t_2) - x(t_1)| \ge \|\varphi_{\gamma,r}\|_\infty,$$

что противоречит неравенству (15). Тем самым (12) доказано.

Докажем теперь (11) в предположении (9).

Не ограничивая общности, по-прежнему, будем считать, что функция x возрастает на промежутке $[\alpha, \beta]$, а функция $\varphi_{\lambda,r}$ — на промежутке $[\xi, \eta]$.

Если точка y, выбранная из условия (9), такова, что $y \in [(\xi + \eta)/2, \eta]$, то, применяя лемму 1, получаем (11).

Пусть теперь $y \in [\xi, (\xi + \eta)/2]$. Из(8) и (9) следует

$$x(t) - x(\alpha) \le \varphi_{\lambda,r}(y) - \varphi_{\lambda,r}(\xi).$$

Поэтому существует точка $y_1 \in [\xi, (\xi+\eta)/2]$, $y_1 \le y$, такая, что

$$x(t) - x(\alpha) = \varphi_{\lambda,r}(y_1) - \varphi_{\lambda,r}(\xi).$$

Принимая во внимание неравенство (12) и применяя лемму 1, имеем

$$|x'(t)| \le |\varphi_{\lambda,r-1}(y_1)| \le |\varphi_{\lambda,r-1}(y)|. \tag{18}$$

Тем самым (11) в предположении (9) доказано.

Аналогично доказывается (11) в предположении (10).

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема усиливает неравенство Колмогорова.

Теорема 2. *Пусть* $k, r \in \boldsymbol{N}$, $k < r$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(\boldsymbol{R})$ *справедливо неравенство*

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M(x)^{1-k/r} \|x^{(r)}\|^{k/r}_{L_\infty(\boldsymbol{R})}, \tag{19}$$

где величина $M(x)$ *определена равенством* (3). *В частности,*

$$M(x^{(k)}) \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M(x)^{1-k/r} \|x^{(r)}\|^{k/r}_{L_\infty(\boldsymbol{R})}. \tag{20}$$

Неравенства (19) *и* (20) *обращаются в равенства для функций вида* $x(t) = a\varphi_{\lambda,r}(t+b)$, $\lambda, a, b \in \boldsymbol{R}$, $\lambda > 0$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in L^r_\infty(\boldsymbol{R})$. Ввиду однородности неравенства (19) можно считать, что

$$\|x^{(r)}\| = 1. \tag{21}$$

Тогда $x \in W^r_\infty(\boldsymbol{R})$ и к ней применима теорема 1. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$M(x) = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{22}$$

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что из условия (22) вытекает (см. (12)) неравенство

$$\|x'\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le \|\varphi_{\lambda,r-1}\|_\infty. \tag{23}$$

Из (23) в силу теоремы сравнения Колмогорова следует

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})} \le \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty. \tag{24}$$

Из (22) и (24) получаем

$$\frac{\|x^{(k)}\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}}{M(x)^{1-k/r}} \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty}{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty^{1-k/r}} = \frac{\lambda^{-(r-k)}\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\left(\lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty\right)^{1-k/r}} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}}. \tag{25}$$

Из (25) и (21) следует (19).

Неравенство (20), очевидно, следует из (19).

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Для любого $r \in \boldsymbol{N}$ нетрудно привести примеры функций $x \in L^r_\infty(\boldsymbol{R})$ (и даже бесконечно дифференцируемых функций), для которых отношение

$$\frac{\|x\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}}{M(x)}$$

больше любого наперед заданного положительного числа. Для таких функций оценка для $\left\|x^{(k)}\right\|_{L_\infty(\boldsymbol{R})}$ (19) намного лучше оценки, которую можно получить из неравенства (1) Колмогорова.

3. Усиление неравенств Бернштейна и Тихомирова. Через $\mathcal{T}_n$ обозначим пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Следующая теорема усиливает известное неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов (см., например, [2, с. 20]).

Теорема 3. *Пусть* $k, n \in \boldsymbol{N}$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $\tau \in \mathcal{T}_n$ *имеет место неравенство*

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_\infty \leq n^k M(\tau), \tag{26}$$

где величина $M(x)$ *определена равенством* (3). *В частности,*

$$M(\tau^{(k)}) \leq n^k M(\tau). \tag{27}$$

Неравенства (26) *и* (27) *обращаются в равенства для полиномов вида* $\tau(t) = a\cos(nt+u)$, $a, t, u \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. Зафиксируем $\tau \in \mathcal{T}_n$ и $r \in \boldsymbol{N}$, $r > k$. В силу теоремы 2

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M(\tau)^{1-k/r} \left\|\tau^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{28}$$

Оценивая $\left\|\tau^{(r)}\right\|_\infty$ с помощью неравенства Бернштейна (см., например, [2, с. 20])

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_\infty \leq n^r \|\tau\|_\infty,$$

из (28) имеем

$$\left\|\tau^{(k)}\right\|_\infty \leq n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M(\tau)^{1-k/r} \|\tau\|_\infty^{k/r}. \tag{29}$$

Устремляя $r \to \infty$ и учитывая соотношение

$$\|\varphi_r\|_\infty \to \frac{4}{\pi},$$

из (29) получаем (26).

Неравенство (27), очевидно, следует из (26).

Теорема доказана.

Через $S_{n,r}$, $n, r \in \boldsymbol{N}$, обозначим множество 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $\nu\pi/n$, $\nu \in \boldsymbol{Z}$. Очевидно, $\varphi_{n,r} \in S_{n,r}$. Для сплайнов $s \in S_{n,r}$ выполняется (см., например, [3], предложение 3.4.1) неравенство

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \leq \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} \|s\|_\infty.$$

Нам потребуется следующее усиление этого неравенства.

Лемма 2. *Пусть* $n, r \in \boldsymbol{N}$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *имеет место неравенство*

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{n^r}{\|\varphi_r\|_\infty} M(s), \tag{30}$$

где величина $M(x)$ *определена соотношением* (3).

Доказательство. Принимая во внимание равенство $\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty$, перепишем (30) в виде

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{M(s)}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}. \tag{31}$$

Для $r=1$ неравенство (31) очевидно. Пусть $r \ge 2$. Применяя теорему 2 при $k=r-1$ к функции $x=s$, получаем

$$\left\|s^{(r-1)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1/r}} M(s)^{1/r}\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{(r-1)/r}. \tag{32}$$

Поскольку $s^{(r-1)} \in S_{n,1}$, то, применяя к $s^{(r-1)}$ неравенство (31) при $r=1$, находим

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{M\left(s^{(r-1)}\right)}{\|\varphi_{n,1}\|_\infty} \le \frac{\left\|s^{(r-1)}\right\|_\infty}{\|\varphi_{n,1}\|_\infty}. \tag{33}$$

Из (32) и (33) имеем

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{M(s)^{1/r}}{\left(n^{-r}\|\varphi_r\|_\infty\right)^{1/r}}\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{(r-1)/r}$$

или

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{1/r} \le \frac{M(s)^{1/r}}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty^{1/r}},$$

что равносильно неравенству (31).

Лемма 2 доказана.

Следующая теорема усиливает неравенство Тихомирова для сплайнов [4].

Теорема 4. *Пусть* $n,k,r \in \boldsymbol{N}$, $k \le r$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} M(s). \tag{34}$$

В частности,

$$M\left(s^{(k)}\right) \le n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} M(s). \tag{35}$$

Неравенства (34) *и* (35) *обращаются в равенства для сплайнов вида* $s(t) = a\varphi_{n,r}(t)$, $a \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. В случае $k=r$ неравенство (34) доказано в лемме 2 (неравенство (30)). Пусть теперь $k<r$. Тогда, применяя теорему 2, получаем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M(s)^{1-k/r}\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{36}$$

Оценивая $\left\| s^{(r)} \right\|_\infty$ с помощью неравенства (30) леммы 2, из (36) получаем (34). Неравенство (35) непосредственно следует из (34).

Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Дословно повторяя рассуждения из работы [5], но применяя вместо теоремы сравнения Колмогорова теорему 1, получаем следующее усиление результата Лигуна [5]: для $r, k \in \boldsymbol{N}$, $k < r$, $q \in [1, \infty)$ и $x \in L^r_\infty(\boldsymbol{T})$ справедливо неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \;\le\; \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} M(x)^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r},$$

где величина $M(x)$ определена равенством (3).

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теорем 3 и 4, получаем следующие утверждения: для любых $k, n \in \boldsymbol{N}$, $q \in [1, \infty)$ имеют место неравенства

$$\left\| \tau^{(k)} \right\|_q \;\le\; n^k \, \|\cos(\cdot)\|_q \, M(\tau) \tag{37}$$

(для любого тригонометрического полинома $\tau \in \mathcal{T}_n$) и

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \;\le\; n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty} M(s) \tag{38}$$

(для любого сплайна $s \in S_{n,r}$).

Неравенство (37) является усилением неравенства Тайкова [6], а неравенство (38) — усилением неравенства Лигуна [7].

1. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 616 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
4. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
5. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Analysis Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
6. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 43 – 47.
7. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.

Получено 24.01.2001