УДК 517.9

А. А. Давиденко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДИН МЕТОД ВВЕДЕННЯ ЛОКАЛЬНИХ КООРДИНАТ В ОКОЛІ ІНВАРІАНТНОЇ ТОРОЇДАЛЬНОЇ МНОЖИНИ

We consider a problem of the introduction of local coordinates in a neighborhood of m-dimensional invariant torus of a dynamic system of differential equations in the Euclidean space $\mathbf{R}^n$ in the dimensions satisfying the inequality $m+1<n\le 2m$.

Розглянуто один метод введення локальних координат в околі m-вимірного інваріантного тора динамічної системи диференціальних рівнянь в евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$ у розмірностях, пов'язаних співвідношенням $m+1<n\le 2m$.

1. Побудова локальних координат для динамічної системи з інваріантним тором. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \qquad x\in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

де $X\in C^r(\mathbf{R}^n)$, $r\ge 1$, $C^r(D)$ — простір r разів неперервно диференційовних функцій в області $D\subseteq \mathbf{R}^n$. Нехай система (1) має інваріантний многовид [1]

$$M:\ x = f(\varphi), \tag{2}$$

де $f(\varphi)\in C^r(\mathcal{T}_m)$, $C^r(\mathcal{T}_m)$ — простір r разів неперервно диференційовних функцій на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$,

$$\operatorname{rank}\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi} = m \qquad \forall\,\varphi\in\mathcal{T}_m.$$

Досліджується можливість введення локальних координат в околі інваріантного тора M у випадку, коли система векторів $\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}$ не доповнюється до періодичного базису простору $\mathbf{R}^n$. При цьому, відповідно, не виконуються достатні умови доповнюваності до періодичного базису, виражені у розмірностях, а саме, коли

$$m+1 < n < 2m+1.$$

У цьому випадку пропонується систему (1) доповнити p рівняннями вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \tag{3}$$

де $y\in\mathbf{R}^p$, число p визначається кількістю $m-p$ векторів у максимальній підсистемі системи векторів $\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}$, яку можна доповнити до періодичного базису простору $\mathbf{R}^n$ ($p\le p_0 = 2m+1-n$), λ — довільна дійсна стала, відмінна від нуля. У роботах [2 – 4] показано оптимальність такого вигляду додаткової системи. Зауважимо, що ця система має єдину інваріантну множину: $y=0$.

Тоді система (1), (3) має m-вимірний інваріантний тор

$$M_0:\ x = f(\varphi), \qquad y = 0,$$

в околі якого можна ввести локальні координати $\varphi\in\mathcal{T}_m$, $h\in\mathbf{R}^{n+p-m}$, де $\|h\| = \left(\sum_{i=1}^{n+p-m} h_i^2\right)^{1/2} < \delta$ (δ — мале додатне число), за допомогою заміни

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h, \quad y = b(\varphi)h, \tag{4}$$

де матриці $B(\varphi)$, $b(\varphi)$ вибрано з простору $C^r(\mathcal{T}_m)$ таким чином.

Лема 1. *Нехай у системі векторів* $\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$, *де* $f(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m)$, $\operatorname{rank} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = m$, $m + 1 < n < 2m + 1$, *максимальна підсистема, яку можна доповнити до періодичного базису простору* $\mathbf{R}^n$, *складається з* $m - p$ *векторів. Тоді в просторі* $\mathbf{R}^{n+p}$ *існує періодичний базис*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} & B(\varphi) \\ 0 & b(\varphi) \end{bmatrix}$$

з такими властивостями:

$$b \cdot b^* = E_p, \tag{5}$$

$$B \cdot b^* = 0, \tag{6}$$

$$B^* B + b^* b = E_{n-m+p}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f(\varphi)^*}{\partial \varphi} B = 0, \tag{8}$$

де $B(\varphi)$, $b(\varphi) \in C^{r-1}(\mathcal{T}_m)$.

Для доведення леми ортонормуємо за Шмідтом систему векторів $\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}$:

$$\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = U(\varphi)T(\varphi), \quad U^* U = E_m,$$

де $T(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m)$ — верхня трикутна матриця. Не порушуючи загальності вважатимемо, що перші $m - p$ стовпців матриці U є максимальною підсистемою векторів, яку можна доповнити до періодичного базису в просторі $\mathbf{R}^n$, тобто

$$U = [D_1, D_2], \quad D_1^* D_1 = E_{m-p}$$

та

$$\exists V_1(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m), \quad V_1^* V_1 = E_{n-m+p}: \hat{U}^{-1} = \hat{U}^*, \quad \hat{U} = [D_1, V_1].$$

Тоді візьмемо $b = D_2^* V_1$ та $B = V_1(E_{n-m+p} - b^* b)$, для яких виконуватимуться такі властивості:

$$b \cdot b^* = D_2^* V_1 V_1^* D_2 = D_2^*(E_n - D_1 D_1^*) D_2 = E_p,$$

$$B \cdot b^* = V_1(E_{n-m+p} - b^* b) b^* = 0,$$

$$B^* B + b^* b = (E_{n-m+p} - b^* b) V_1^* V_1 (E_{n-m+p} - b^* b) + b^* b =$$
$$= E_{n-m+p} - b^* b + b^* b = E_{n-m+p},$$

$$\frac{\partial f(\varphi)^*}{\partial \varphi} B = T^*(\varphi) U^*(\varphi) V_1 (E_{n-m+p} - b^* b) =$$
$$= T^*(\varphi) \begin{pmatrix} D_1^* V_1 (E_{n-m+p} - b^* b) \\ D_2^* V_1 (E_{n-m+p} - b^* b) \end{pmatrix} = T^*(\varphi) 0 = 0,$$

звідки

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi} & B(\varphi) \\ 0 & b(\varphi) \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \forall\,\varphi \in \mathcal{T}_m,$$

причому жоден рядок матриці $b(\varphi)$ не доповнюється до періодичного базису [3, 4]. Лему доведено.

Виконаємо заміну змінних (4), використавши методологію робіт А. М. Самойленка [1, 2] та взявши матриці $B(\varphi)$ і $b(\varphi)$ з попередньої леми. Тоді в нових координатах система (1), (3) набере вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi, h),$$
$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi, h)h, \tag{9}$$

а рівняння многовиду M_0 в координатах φ, h буде таким:

$$h = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Для знаходження матриць коефіцієнтів $F(\varphi, h)$ і $P(\varphi, h)h$ продиференціюємо по t формулу заміни змінних (4):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{\partial Bh}{\partial\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} + B\frac{dh}{dt} = X(f + Bh), \tag{10}$$

$$\frac{\partial bh}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + b\frac{dh}{dt} = \lambda bh. \tag{11}$$

Помножимо рівняння (10) на матрицю $\dfrac{\partial f^*}{\partial\varphi}$ з лівого боку та врахуємо властивість (8):

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial\varphi}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{\partial f^*}{\partial\varphi}\frac{\partial Bh}{\partial\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f^*}{\partial\varphi}X(f + Bh).$$

Звідси знаходимо

$$F(\varphi, h) = L_1(\varphi, h)X(f(\varphi) + B(\varphi)h), \tag{12}$$

$$L_1(\varphi, h) = \left(E + \Gamma^{-1}\frac{\partial f^*}{\partial\varphi}\frac{\partial Bh}{\partial\varphi}\right)^{-1}\Gamma^{-1}\frac{\partial f^*}{\partial\varphi}, \tag{13}$$

де $\Gamma = \dfrac{\partial f^*}{\partial\varphi}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$, матриця $L_1(\varphi, h)$ існуватиме внаслідок „мализни" h, тобто існуватиме обернена матриця

$$\left(E + \Gamma^{-1}\frac{\partial f^*}{\partial\varphi}\frac{\partial Bh}{\partial\varphi}\right)^{-1} = E - \Gamma^{-1}\frac{\partial f^*}{\partial\varphi}\frac{\partial Bh}{\partial\varphi} + \left(\Gamma^{-1}\frac{\partial f^*}{\partial\varphi}\frac{\partial Bh}{\partial\varphi}\right)^2 - \ldots .$$

Зауважимо, що вектор-функція $F(\varphi, h)$ не залежить від вигляду системи (3) (а саме, від λ) та матриці $b(\varphi)$, що досягнуто завдяки вдалій заміні змінної.

Тепер помножимо з лівого боку рівняння (10) на B^*, а рівняння (11) на b^* та додамо їх, враховуючи властивості (7), (8):

$$\left(B^* \frac{\partial Bh}{\partial \varphi} + b^* \frac{\partial bh}{\partial \varphi}\right)\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dh}{dt} = B^* X(f + Bh) + \lambda b^* bh.$$

Оскільки [1, с. 99] тривіальний тор повинен бути інваріантним для системи (9), то з останньої рівності отримуємо умову інваріантності:

$$B^*(\varphi) X(f(\varphi)) \equiv 0, \qquad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

що не залежить від вигляду системи (3) та матриці $b(\varphi)$ і подібна до умови інваріантності для випадку, який повністю описано у роботах А. М. Самойленка, коли не потрібна додаткова система (3). Запишемо рівняння для визначення $P(\varphi, h)$:

$$P(\varphi, h)h = B^*(X(f + Bh) - X(f)) + \lambda b^* bh - \left(B^* \frac{\partial Bh}{\partial \varphi} + b^* \frac{\partial bh}{\partial \varphi}\right) F(\varphi, h).$$

Оскільки ми знаємо розв'язок доповнюючої системи (3), то можна навести деякі властивості розв'язків отриманої системи (9).

Система (9), записана в локальних координатах, має локально-інваріантну множину

$$b(\varphi)h = 0. \tag{14}$$

Дійсно, для довільного розв'язку $(\varphi_t(\varphi_0, h_0), h_t(\varphi_0, h_0))$ системи (9), використовуючи формули заміни змінних, отримуємо

$$b(\varphi_t)h_t = e^{\lambda t} b(\varphi_0) h_0.$$

Звідси видно, що система в локальних координатах (9) має інваріантну множину (14). Крім того, нехай система (9) має інваріантний тор $h = u(\varphi)$, відмінний від тривіального. Тоді система (3) матиме інваріантну множину $y = b(\varphi)u(\varphi)$, але ж ця система має інваріантною лише площину $y = 0$, отже, кожен інваріантний тор системи (9) повинен належати цій гіперплощині:

$$b(\varphi)u(\varphi) = 0.$$

Тоді для цього тора, враховуючи вигляд виконаної заміни змінних, отримуємо формулу для знаходження інваріантного тора системи (1) в околі тора M:

$$x = f(\varphi) + V_1(\varphi)u(\varphi),$$

тобто він будується за допомогою лише матриці V_1, що доповнює до періодичного базису лише частину векторів системи $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$.

Отже, тепер можна розглядати систему (9), враховуючи (14).

2. Варіації розв'язків на многовиді M_0. Дослідимо рівняння у варіаціях многовиду M_0

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h, \tag{15}$$

де $a(\varphi)$, $P(\varphi)$ виражаються через праві частини (9):

$$a(\varphi) = L_1(\varphi, 0)X(f) = \Gamma^{-1} \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} X(f),$$

$$P(\varphi) = P(\varphi, 0) = B^* \frac{\partial X(f)}{\partial x} B + \lambda b^* b - B^* \frac{\partial B}{\partial \varphi} a(\varphi) - b^* \frac{\partial b}{\partial \varphi} a(\varphi),$$

де $\frac{\partial}{\partial\varphi}a(\varphi) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\varphi_i}a_i(\varphi)$. Враховуючи вигляд $P(\varphi)$, продиференціюємо по t добуток $b(\varphi)h$ вздовж розв'язків системи (15):

$$\frac{dbh}{dt} = \left(\frac{\partial b}{\partial\varphi}a(\varphi) + bP(\varphi)\right)h = \lambda bh,$$

звідки можна отримати такі властивості.

1. Нехай $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ — розв'язок першого рівняння в (15) і $\Omega_0^t(P)$ — матрицант лінійної системи

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))h, \tag{16}$$

нормований у точці $t = 0$: $\Omega_0^0(P) = E_{n+p-m}$. Тоді

$$b(\varphi_t(\varphi))\Omega_0^t(P)h = e^{\lambda t}b(\varphi)h.$$

2. З попередньої властивості випливає, що система (15) має локально-інваріантною множиною гіперплощину (14).

3. Використовуючи властивості (5) – (7) та враховуючи вигляд $P(\varphi)$, отримуємо тотожність

$$Pb^*b - b^*bP = \frac{\partial b^*b}{\partial\varphi}a = \frac{db^*b}{dt},$$

що означатиме згідно з [5, с. 108], що матрицант системи (16) задовольняє тотожність

$$b^*(\varphi_t(\varphi))b(\varphi_t(\varphi))\Omega_0^t(P) \equiv \Omega_0^t(P)b^*(\varphi)b(\varphi).$$

Для отримання інших властивостей застосуємо метод варіацій згідно з [2], де цей метод використано для дослідження аналогічної системи у випадку, коли не потрібна додаткова система рівнянь (3). Для систем (1), (3) та (9) запишемо рівняння у варіаціях відповідно вздовж розв'язків

$$x = x(t, f(\varphi)) = f(\varphi_t), \qquad y = y(t, 0) = 0, \tag{17}$$

$$\varphi = \varphi_t = \varphi_t(\varphi), \qquad h = h_t = 0. \tag{18}$$

Вважатимемо і далі, що матриці введення локальних координат задовольняють умови леми 1. Для розв'язків (17) маємо

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X(f(\varphi_t))}{\partial x} & 0 \\ 0 & \lambda E_p \end{pmatrix} z, \tag{19}$$

а для розв'язків (18) —

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial\varphi}\psi + Q(\varphi_t)g, \qquad \frac{dg}{dt} = P(\varphi_t)g, \tag{20}$$

де

$$Q(\varphi) = L_1(\varphi, 0)\left(\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}B(\varphi) - \frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi)\right) \tag{21}$$

та $L_1(\varphi, 0) = \Gamma^{-1}(\varphi)\frac{\partial f(\varphi)^*}{\partial\varphi}$ отримано за допомогою (12). Згідно з формулами введення локальних координат (4) знаходимо зв'язок між варіаціями:

$$z = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial B(\varphi)h}{\partial \varphi} \\ 0 + \dfrac{\partial b(\varphi)h}{\partial \varphi} \end{bmatrix}_{\substack{\varphi=\varphi_t \\ h=0}} \delta\varphi + \begin{bmatrix} B(\varphi) \\ b(\varphi) \end{bmatrix}_{\substack{\varphi=\varphi_t \\ h=0}} \delta h =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(\varphi_t)}{\partial \varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \psi + \begin{pmatrix} B(\varphi) \\ b(\varphi) \end{pmatrix} g = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\varphi_t)}{\partial \varphi} & B(\varphi_t) \\ 0 & b(\varphi_t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ g \end{pmatrix}.$$

Звідси можна одержати таку тотожність:

$$\frac{dA(\varphi_t)}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X(f(\varphi_t))}{\partial x} & 0 \\ 0 & \lambda E_p \end{pmatrix} A(\varphi_t) - A(\varphi_t) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a(\varphi_t)}{\partial \varphi} & Q(\varphi_t) \\ 0 & P(\varphi_t) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

де

$$A(\varphi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} & B(\varphi) \\ 0 & b(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Матриціанти систем (19) та (20) пов'язані рівністю

$$\begin{pmatrix} \Omega_0^t \left(\dfrac{\partial X(f)}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} E_p \end{pmatrix} A(\varphi) = A(\varphi_t) \begin{pmatrix} \Omega_0^t \left(\dfrac{\partial a}{\partial \varphi} \right) & R_t(\varphi) \\ 0 & \Omega_0^t(P) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

де $R_t(\varphi) = \int_0^t \Omega_s^t \left(\dfrac{\partial a}{\partial \varphi} \right) Q(\varphi_s) \Omega_0^s(P)\, ds$, звідки

$$\Omega_0^t \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial f(\varphi_t)}{\partial \varphi} \Omega_0^t \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi} \right),$$

$$\Omega_0^t \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) B(\varphi) = \frac{\partial f(\varphi_t)}{\partial \varphi} R_t(\varphi) + B(\varphi_t) \Omega_0^t(P),$$

$$e^{\lambda t} b(\varphi) = b(\varphi_t) \Omega_0^t(P).$$

Легко отримати такі властивості.

Матриціант $\Omega_0^t \left(\dfrac{\partial a}{\partial \varphi} \right)$, що відіграє важливу роль при дослідженні питання грубості та гладкості функції Гріна, не залежить від введення локальних координат та додаткової системи рівнянь (3):

$$\Omega_0^t \left(\frac{\partial a}{\partial \varphi} \right) = \Gamma^{-1}(\varphi_t) \frac{\partial f(\varphi_t)^*}{\partial \varphi} \Omega_0^t \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}.$$

Для матриціанта системи (16) отримуємо

$$\Omega_0^t(P) = B^*(\varphi_t) \Omega_0^t \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) B(\varphi) + e^{\lambda t} b^*(\varphi_t) b(\varphi), \tag{24}$$

що відповідає властивостям, які встановлено на початку цього пункту. Тобто розв'язки, що починаються на площині $bh = 0$, залишаються на ній, і їхню поведінку визначає лише вихідна система (1), а решта розв'язків лежать поза площиною та експоненціально затухають згідно з методом введення локальних координат та виглядом додаткової системи рівнянь (3).

Розглянемо функцію

$$R_t(\varphi) = \Gamma^{-1}(\varphi_t)\frac{\partial f(\varphi_t)^*}{\partial\varphi}\,\Omega_0^t\left(\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}\right)B(\varphi). \tag{25}$$

Згідно з доведеним раніше [2], ця функція тотожно дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $Q(\varphi)\equiv 0$. Можна встановити просту умову виконання цього в розглядуваному випадку.

Лема 2. *Для довільних матриць* $B(\varphi)$, $b(\varphi)\in C^r(\mathcal{T}_m)$, *що мають властивості, описані в лемі* 1, *тотожність* $Q(\varphi)\equiv 0$ *виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли має місце тотожність*

$$K(\varphi)\left(\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}+\frac{\partial X^*(f(\varphi))}{\partial x}\right)(E_n-K(\varphi))\equiv 0, \tag{26}$$

де $K(\varphi)=F(\varphi)\Gamma^{-1}(\varphi)F^*(\varphi)$, $F(\varphi)=\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}$.

Доведення. Легко переконатись у справедливості таких властивостей:

1) $\dfrac{df(\varphi_t)}{dt} = F(\varphi_t)a(\varphi_t) = X(f(\varphi_t))$;

2) $\dfrac{dF(\varphi_t)}{dt} = \dfrac{\partial X(f(\varphi_t))}{\partial x}F(\varphi_t) - F(\varphi_t)\dfrac{\partial a(\varphi_t)}{\partial\varphi}$, що випливає з тотожності

$$\frac{\partial X(f)}{\partial\varphi} = \frac{\partial(F(\varphi)a(\varphi))}{\partial\varphi} = F(\varphi)\frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}+\sum_{i=1}^{m}a_i(\varphi)\frac{\partial F(\varphi)}{\partial\varphi_i};$$

3) $\dfrac{dX(f(\varphi_t))}{dt} = \dfrac{\partial X(f(\varphi_t))}{\partial x}X(f(\varphi_t))$, тобто $w=X(f(\varphi))$ — інваріантний тор першого діагонального блоку системи (19);

4) для матриць $B(\varphi)$, $b(\varphi)$ з леми 1 $K(\varphi)+B(\varphi)B^*(\varphi)\equiv E_n$;

5) для довільної матриці $B(\varphi)\in C^r(\mathcal{T}_m)$, що задовольняє (8), завжди виконується тотожність $B^*X(f)\equiv B^*KX(f)\equiv 0$.

Зауважимо, що перші три властивості не залежать від методу введення локальних координат.

За допомогою цих властивостей матрицю $Q(\varphi)$ можна записати у вигляді

$$Q(\varphi) = \Gamma^{-1}(\varphi)F^*(\varphi)\left(\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}+\frac{\partial X^*(f(\varphi))}{\partial x}\right)B(\varphi),$$

що випливає з тотожності

$$\frac{\partial f(\varphi)^*}{\partial\varphi}\frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi) = F^*(\varphi)\frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi) =$$

$$= -\frac{\partial F^*(\varphi)}{\partial\varphi}a(\varphi)B(\varphi) = -\frac{\partial X^*(f)}{\partial\varphi}B(\varphi)+\frac{\partial a^*(f)}{\partial\varphi}F^*(\varphi)B(\varphi) = -\frac{\partial X^*(f)}{\partial\varphi}B(\varphi).$$

Матрицю $Q(\varphi)$ можна отримати іншим шляхом, за допомогою тотожності (22).

Тепер якщо $Q=0$, то

$$K(\varphi)\left(\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}+\frac{\partial X^*(f(\varphi))}{\partial x}\right)(E_n-K(\varphi)) =$$

$$= F(\varphi)\Gamma^{-1}(\varphi)F^*(\varphi)\left(\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}+\frac{\partial X^*(f(\varphi))}{\partial x}\right)B(\varphi)B^*(\varphi) = 0.$$

Навпаки, якщо виконується (26), то

$$Q(\varphi) = F^*(\varphi)K(\varphi)\left(\frac{\partial X(f(\varphi))}{\partial x}+\frac{\partial X^*(f(\varphi))}{\partial x}\right)(E_n-K(\varphi))B(\varphi) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Очевидно, що це твердження узагальнюється на випадок, коли не потрібна додаткова система (3). Істотною вимогою є лише ортогональність $F^*(\varphi)B(\varphi) = 0$. Якщо ж додаткова система є необхідною та $b(\varphi)$ вибрано таким, що $b(\varphi)B(\varphi)\neq 0$, то матриця $Q(\varphi)$ залежить як від $b(\varphi)$, так і від параметра λ.

3. Функція Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори неоднорідних систем. Нехай система (15) має функцію Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори, тобто існує $(n+p-m)\times(n+p-m)$-вимірна матриця $C(\varphi)\in C^0(\mathcal{T}_m)$ така, що для функції

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases}\Omega_\tau^0(P)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau\leq 0;\\ \Omega_\tau^0(P)(C(\varphi_\tau(\varphi))-E_{n+p-m}), & \tau>0,\end{cases} \tag{27}$$

виконується рівномірна збіжність по φ інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\tau,\varphi)\|d\tau \leq K<\infty. \tag{28}$$

Існування вказаної вище функції Гріна обумовлює існування інваріантного тора системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),\qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h+l(\varphi)$$

для кожної вектор-функції $l(\varphi)\in C^0(\mathcal{T}_m)$, який можна записати у вигляді

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)l(\varphi_\tau(\varphi))d\tau. \tag{29}$$

Нехай параметр λ є додатним. Тоді розв'язки, що починаються на множині $h\equiv b^*(\varphi)b(\varphi)h$: $\Omega_0^t(P)b^*(\varphi)b(\varphi) = e^{\lambda t}b^*(\varphi_t)b(\varphi)$, зростають на $+\infty$. У той же час з огляду на рівномірну збіжність по φ інтеграла (28) розв'язки, які починаються на множині $h\equiv C(\varphi)h$, не можуть зростати на $+\infty$. Отже, виконуються тотожності $bC\equiv 0$ і $Cb^*\equiv 0$.

Застосуємо зображення (24) для дослідження існування функції Гріна – Самойленка:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\tau,\varphi)\|d\tau = \int_{-\infty}^{0}\left\|B^*(\varphi)\Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)B(\varphi_\tau(\varphi))C(\varphi_\tau(\varphi))\right\|d\tau +$$

$$+\int_0^{\infty}\left\|B^*(\varphi)\Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)B(\varphi_\tau(\varphi))(C(\varphi_\tau(\varphi))-E) - e^{-\lambda\tau}b^*(\varphi)b(\varphi_\tau(\varphi))\right\|d\tau.$$

Звідси отримуємо нерівності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi)\| d\tau \leq \|B^*(\varphi)\| \left(\int_{-\infty}^{0} \left\| \Omega_\tau^0 \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) B'(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} \left\| \Omega_\tau^0 \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) (B'(\varphi_\tau(\varphi)) - B(\varphi_\tau(\varphi))) \right\| d\tau \right) + \frac{1}{\lambda}$$

і

$$\int_{-\infty}^{0} \left\| \Omega_\tau^0 \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) B'(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau + \int_{0}^{\infty} \left\| \Omega_\tau^0 \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) (B'(\varphi_\tau(\varphi)) - B(\varphi_\tau(\varphi))) \right\| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|B^*(\varphi)\|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \varphi)\| d\tau + \frac{1}{\lambda} \right),$$

де $B'(\varphi) = B(\varphi)C(\varphi)$, які доводять наступну теорему існування функції Гріна – Самойленка.

Теорема 1. *Функція Гріна – Самойленка* (27) *з матрицею* $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, *для якої виконується нерівність* (28), *існує тоді і тільки тоді, коли існує прямокутна матриця* $B'(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, *для якої* $B'(\varphi)b^*(\varphi) = 0$, *та виконується нерівність*

$$\int_{-\infty}^{0} \left\| \Omega_\tau^0 \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) B'(\varphi_\tau(\varphi)) \right\| d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \left\| \Omega_\tau^0 \left(\frac{\partial X(f)}{\partial x} \right) (B'(\varphi_\tau(\varphi)) - B(\varphi_\tau(\varphi))) \right\| d\tau \leq K' < \infty,$$

причому $B'(\varphi) = B(\varphi)C(\varphi)$ *і* $C(\varphi) = B^*(\varphi)B'(\varphi)$.

Запишемо тепер функцію Гріна – Самойленка (27) у вигляді суми $G_0(\tau, \varphi) = G_0'(\tau, \varphi) + G_0''(\tau, \varphi)$, де

$$G_0'(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(P)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0; \\ \Omega_\tau^0(P)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - (E_{n+p-m} - b^*(\varphi_\tau(\varphi))b(\varphi_\tau(\varphi))), & \tau > 0, \end{cases} \tag{30}$$

$$G_0''(\tau, \varphi) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0; \\ -\Omega_\tau^0(P)b^*(\varphi_\tau(\varphi))b(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv -e^{-\lambda\tau}b^*(\varphi)b(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau > 0. \end{cases} \tag{31}$$

Очевидно, що для обох функцій виконуватиметься нерівність вигляду (28). Тоді інваріантний тор (29) можна записати у вигляді суми $u(\varphi) = u_1(\varphi) + u_2(\varphi)$, де

$$u_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0'(\tau, \varphi)l_1(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \quad l_1(\varphi) = (E_{n+p-m} - b^*(\varphi)b(\varphi))l(\varphi),$$

$$u_2(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0''(\tau, \varphi)l_2(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \quad l_2(\varphi) = b^*(\varphi)b(\varphi)l(\varphi).$$

Для другої складової маємо

$$u_2(\varphi) = -\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} b^*(\varphi) b(\varphi_\tau(\varphi)) l_2(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau = -b^*(\varphi)\int_0^\infty e^{-\lambda\tau} b(\varphi_\tau(\varphi)) l(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau,$$

звідки отримуємо такі її властивості:

$$u_2(\varphi) \equiv 0 \Leftrightarrow b(\varphi) l(\varphi) \equiv 0,$$

$$(E_{n+p-m} - b^*(\varphi) b(\varphi)) u_2(\varphi) \equiv 0.$$

Тобто складова інваріантного тора, що лежить поза гіперплощиною $bh = 0$, визначатиметься лише складовою l_2 породжуючої неоднорідності, що теж не належить цій гіперплощині.

Для першої складової u_1 інваріантного тора з урахуванням зображень, отриманих у попередньому пункті, маємо

$$u_1(\varphi) = B^*(\varphi)\left(\int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right) B(\varphi_\tau(\varphi)) C(\varphi_\tau(\varphi)) l_1(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right) (B(\varphi_\tau(\varphi)) C(\varphi_\tau(\varphi)) - B(\varphi_\tau(\varphi))) l_1(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau \right).$$

Звідси отримуємо властивість

$$b(\varphi) u_1(\varphi) \equiv 0.$$

Тобто якщо неоднорідність належить інваріантній гіперплощині (14), то і породжений нею інваріантний тор теж належатиме цій площині. Отже, справедливе таке твердження.

Твердження. *Нехай існує функція Гріна – Самойленка* (27). *Тоді функція* $G_0'(\tau, \varphi)$ *вигляду* (30) *для довільної неоднорідності* $l(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ *задає інваріантний тор*

$$u'(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0'(\tau, \varphi) l_1(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau,$$

що належить інваріантній гіперплощині $b(\varphi)h \equiv 0$, *де* $l_1(\varphi) = (E_{n+p-m} - b^*(\varphi) b(\varphi)) l(\varphi)$.

Іншими словами, саме функція $G_0'(\tau, \varphi)$ вигляду (30) будує інваріантні тори в околі інваріантного тора вихідної задачі в силу того, що ця функція визначається коефіцієнтами задачі (1), (2) та не залежить від додаткової системи (3).

Розглянемо детальніше властивості системи

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial X(f(\varphi_t(\varphi)))}{\partial x} w. \tag{32}$$

Нехай виконуються умови теореми 1. Розв'язки цієї системи можна розбити на два класи: ті, що починаються на множині $w = Kw$, та ті, що починаються на ортогональній їй множині $w = (E - K)w$. Згідно з (25), перша частина розв'язків визначає поведінку розв'язків системи

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial a(\varphi_t)}{\partial \varphi} \psi.$$

Для вивчення другої частини розв'язків можна ввести матричну функцію

$$\overline{G}_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0\left(\dfrac{\partial X(f)}{\partial x}\right)\overline{C}(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0; \\ \Omega_\tau^0\left(\dfrac{\partial X(f)}{\partial x}\right)(\overline{C}(\varphi_\tau(\varphi)) - (E_n - K(\varphi_\tau(\varphi))), & \tau > 0, \end{cases} \tag{33}$$

де

$$\overline{C}(\varphi) = B(\varphi)C(\varphi)B^*(\varphi),$$

причому $K(\varphi)\overline{C}(\varphi) = \overline{C}(\varphi)K(\varphi) = 0$, $K^2(\varphi) \equiv K(\varphi)$, $\overline{C}^2(\varphi) = B(\varphi)C^2(\varphi)B^*(\varphi)$. Крім того, виконуються співвідношення

$$\overline{G}_0(\tau,\varphi) = B(\varphi)G_0'(\tau,\varphi)B^*(\varphi_\tau(\varphi)), \qquad G_0'(\tau,\varphi) = B^*(\varphi)\overline{G}_0(\tau,\varphi)B(\varphi_\tau(\varphi)).$$

Отже, для функції $\overline{G}_0(\tau,\varphi)$ виконується нерівність вигляду (28).

Рівністю $h = u(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$ задається інваріантний тор неоднорідної системи

$$\frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))u(\varphi_t(\varphi)) + l(\varphi_t(\varphi))$$

для всіх $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. З огляду на зв'язок між системами (19) та (20) існування останнього тора приведе до існування інваріантного тора $w(\varphi) = B(\varphi)u(\varphi)$ неоднорідної системи, що отримується із першого блоку системи (19):

$$\frac{dw(\varphi_t(\varphi))}{dt} = \frac{\partial X(f(\varphi_t(\varphi)))}{\partial x}w(\varphi_t(\varphi)) + L(\varphi_t(\varphi)),$$

де $L(\varphi) = B(\varphi)l(\varphi) \equiv B(\varphi)l_1(\varphi)$, $B^*(\varphi)L(\varphi) = l_1(\varphi)$. Тоді

$$w(\varphi) = B(\varphi)u(\varphi) \equiv B(\varphi)u_1(\varphi) = B(\varphi)\int_{-\infty}^{\infty} G_0'(\tau,\varphi)l_1(\varphi_\tau(\varphi))d\tau =$$

$$= (E_n - K(\varphi))\left(\int_{-\infty}^{0}\Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)B(\varphi_\tau(\varphi))C(\varphi_\tau(\varphi))B^*(\varphi_\tau(\varphi))L(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty}\Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)(B(\varphi_\tau(\varphi))C(\varphi_\tau(\varphi))B^*(\varphi_\tau(\varphi)) + K(\varphi_\tau(\varphi)) - E_n)L(\varphi_\tau(\varphi))d\tau\right) =$$

$$= (E_n - K(\varphi))\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G}_0(\tau,\varphi)L(\varphi_\tau(\varphi))d\tau.$$

Крім цього, за допомогою (23) можна довести тотожність

$$(E_n - K(\varphi))\,\Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)K(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv 0$$

та у випадку $Q(\varphi) \equiv 0$ (коли виконуються умови леми 2)

$$K(\varphi)\Omega_\tau^0\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)(E_n - K(\varphi_\tau(\varphi))) \equiv 0,$$

звідки

$$K(\varphi_t(\varphi))\Omega_\tau^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right) \equiv \Omega_\tau^t\left(\frac{\partial X(f)}{\partial x}\right)K(\varphi_\tau(\varphi)).$$

Тоді для функції $\overline{G}_0(\tau, \varphi)$ отримуємо тотожність

$$K(\varphi)\overline{G}_0(\tau, \varphi) \equiv \overline{G}_0(\tau, \varphi)K(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv 0. \tag{34}$$

Тепер можна сформулювати таку теорему.

Теорема 2. *Функція Гріна – Самойленка* (27) *існує тоді і тільки тоді, коли система* (32) *має функцію* $\overline{G}_0(\tau, \varphi)$ *вигляду* (33), *яка для довільної неоднорідності* $L(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $K(\varphi)L(\varphi) \equiv 0$, *задає інваріантний тор*

$$w(\varphi) = (E_n - K(\varphi)) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_0(\tau, \varphi)L(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \tag{35}$$

а якщо ще й виконуються умови леми 2, *то мають місце рівності* (34) *і тор* (35) *можна записати у вигляді*

$$w(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_0(\tau, \varphi)L(\varphi_\tau(\varphi))d\tau.$$

Важливість дослідження системи (32) полягає в тому, що за її допомогою можна оцінювати матриціанти $\Omega_0^t\left(\dfrac{\partial a}{\partial \varphi}\right)$ та $\Omega_0^t(P)$, що дуже важливо при дослідженні питань гладкості та грубості. Окрім того, з урахуванням зв'язку $w(\varphi) = B(\varphi)u(\varphi)$ та формули заміни змінних (4) інваріантний тор $w(\varphi)$ є першим наближенням $x = f(\varphi) + w(\varphi)$ інваріантного многовиду динамічної системи (1) в околі інваріантного тора M.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665 – 1699.
3. *Burilko A. A., Davydenko A. A.* To a problem of introduction of local coordinates in a neighbourhood of an invariant toroidal set // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 2. – P. 171 – 190.
4. *Burilko A. A., Davydenko A. A.* To a problem of complementebility of periodic r-frame to periodic basis // Ibid. – № 4. – P. 458 – 471.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.

Одержано 28.02.2002