УДК 513.813

Т. І. Григор'єва (Південноукр. пед. ун-т, Одеса)

ІНВАРІАНТНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ КАНОНІЧНОГО МАЙЖЕ ГЕОДЕЗИЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ π_2 $(e = 0)$

For canonical almost geodesic mapping π_2 $(e = 0)$, we prove an analog of the Beltrami theorem in the theory of geodesic mappings. We introduce canonical π_2-flat spaces and obtain metrics in a special system of coordinates for these spaces.

Для канонічного майже геодезичного відображення π_2 $(e = 0)$ доведено аналог теореми Бельтрамі теорії геодезичних відображень. Введено до розгляду канонічні π_2-плоскі простори, для яких отримано метрики в спеціальній системі координат.

У цій статті вивчається канонічне майже геодезичне відображення (КМГВ) π_2 $(e = 0)$ ріманових просторів (РП), яке є окремим випадком майже геодезичного відображення [1] і становить інтерес із прикладної точки зору.

1. Розглянемо КМГВ π_2 $(e = 0)$ РП $V_{2n}(g_{ij}(x))$ і $\overline{V}_{2n}(\overline{g}_{ij}(x))$ з майже дотичною афінорною структурою $F_i^h(x)$. Основні рівняння цього відображення у спільній по відображенню системі координат (x^i) мають вигляд

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x), \tag{1а}$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \tag{1б}$$

$$F_{(i,j)}^h = \mu_{(i}F_{j)}^h + \nu_{(i}\delta_{j)}^h, \tag{1в}$$

де $\Gamma_{ij}^h(x)$ і $\overline{\Gamma}_{ij}^h(x)$ — компоненти об'єктів зв'язності просторів V_{2n} і $\overline{V}_{2n}$ відповідно, φ_i, μ_i, ν_i — ковектори, « , » — знак коваріантної похідної в V_{2n}, круглими дужками (ij) позначено операцію симетрування без ділення.

Операцію згортання з афінором умовимося позначати таким чином: $A_{\overline{\beta}} = A_\alpha F_\beta^\alpha$, $A^{\overline{\beta}} = A^\alpha F_\alpha^\beta$ і будемо називати спряженням по індексу β, при цьому $A_{i\overline{j}\ldots k}^h = \left(A_{\alpha j\ldots k}^h\right)F_i^\alpha$.

Побудуємо інваріантні відносно КМГВ π_2 $(e = 0)$ геометричні об'єкти, визначені диференціальними властивостями афінора. Для цього запишемо залежність між коваріантними похідними афінора F_i^h у просторах V_{2n} і $\overline{V}_{2n}$:

$$F_{i/j}^h = F_{i,j}^h + F_j^h\varphi_{\overline{i}}, \tag{2}$$

"/" — знак коваріантної похідної в $\overline{V}_{2n}$. Згорнувши (2) по індексах h, j, знайдемо

$$F_{i/\alpha}^\alpha = F_{i,\alpha}^\alpha. \tag{3}$$

Введемо в розгляд афінор $\overset{*}{F}{}_\beta^\alpha$ такий, що $\overset{*}{F}{}_\beta^\alpha F_\alpha^\beta = n$. Очевидно, це можна зробити завжди, якщо $F_i^h \neq 0$. Згортаючи (2) з $\overset{*}{F}{}_h^j$ по індексах h, j, отримуємо

$$\varphi_{\overline{i}} = \frac{1}{n}\left(F_{i/\beta}^\alpha - F_{i,\beta}^\alpha\right)\overset{*}{F}{}_\alpha^\beta. \tag{4}$$

З огляду на (4) співвідношення (2) запишемо у вигляді $B_{ij}^h = \overline{B}_{ij}^h$, де

$$B_{ij}^h = F_{i.j}^h - \frac{1}{n} F_j^h F_{i.\beta}^{\alpha} \overset{*}{F}{}_{\alpha}^{\beta},$$

$$\overline{B}_{ij}^h = F_{i/j}^h - \frac{1}{n} F_j^h F_{i/\beta}^{\alpha} \overset{*}{F}{}_{\alpha}^{\beta}. \tag{5}$$

Отже, має місце така теорема.

Теорема 1. *Тензори* (3) *і* (5) *інваріантні відносно КМГВ* π_2 $(e = 0)$ *РП.*

2. Розглянемо клас РП, для яких отриманий інваріантний об'єкт (5) тотожно дорівнює нулю, тобто

$$B_{ij}^h = F_{i.j}^h - \frac{1}{n} F_j^h F_{i.\beta}^{\alpha} \overset{*}{F}{}_{\alpha}^{\beta} = 0. \tag{6}$$

У теорії афінорних структур на ріманових просторах прийнято погоджувати афінорну структуру з метрикою. Ми будемо робити це таким чином:

$$g_{\alpha j} F_i^{\alpha} = g_{\alpha i} F_j^{\alpha}. \tag{7}$$

У виразі (1в) опустимо індекс h у просторі V_{2n}:

$$F_{h(i.j)} = F_{h(i}\mu_{j)} + g_{h(i}\nu_{j)}, \tag{8}$$

де $F_{hi} = g_{\alpha h} F_i^{\alpha}$.

Після нескладних алгебраїчних перетворень співвідношення (8) можна записати так:

$$F_{j.h}^i = F_j^i \mu_h + \delta_j^i \nu_h. \tag{9}$$

Згортаючи (9) по індексах i, j, знаходимо

$$\nu_h = 0,$$

а отже, співвідношення (9) набирає вигляду

$$F_{j.h}^i = F_j^i \mu_h. \tag{10}$$

Таким чином, (6) еквівалентне співвідношенням

$$F_i^h \mu_j - \frac{1}{n} F_j^h F_i^{\alpha} \overset{*}{F}{}_{\alpha}^{\beta} \mu_{\beta} = 0. \tag{11}$$

Виконаємо в (11) спряження по індексу j:

$$F_i^h \mu_{\bar{j}} = 0.$$

Оскільки не всі компоненти афінора F_i^h дорівнюють нулю, то

$$\mu_{\bar{j}} = 0. \tag{12}$$

З огляду на (10) і (12) приходимо до висновку, що тензор Нейєнхейса [1] структури F_j^h дорівнює

$$N_{ij}^h = F_i^{\alpha}\left(F_{\alpha}^h \mu_j - F_j^h \mu_{\alpha}\right) - F_j^{\alpha}\left(F_{\alpha}^h \mu_i - F_i^h \mu_{\alpha}\right) =$$

$$= F_i^{\alpha} F_{\alpha}^h \mu_j - F_j^h \mu_{\bar{i}} - F_j^{\alpha} F_{\alpha}^h \mu_i - F_i^h \mu_{\bar{j}} = 0.$$

Отже, при $B_{ij}^h = 0$ афінорна структура F_j^h інтегровна. Тому можемо вибрати таку систему координат (що називається адаптованою [3]), у якій компоненти афінора F_j^h мають вигляд

$$F_b^{a+n} = \delta_b^a, \qquad F_b^a = F_{b+n}^a = F_{b+n}^{a+n} = 0, \tag{13}$$

де $a, b = 1, 2, \ldots, n$.

Зокрема, у цій системі координат $\overset{*}{F}{}_j^h$ можна подати у вигляді

$$\overset{*}{F}{}_{b+n}^{a} = \delta_b^a, \qquad \overset{*}{F}{}_b^a = \overset{*}{F}{}_b^{a+n} = \overset{*}{F}{}_{b+n}^{a+n} = 0. \tag{14}$$

Зауважимо, що тоді мають місце співвідношення

$$F_\alpha^h \overset{*}{F}{}_i^\alpha + \overset{*}{F}{}_\alpha^h F_i^\alpha = \delta_i^h, \tag{15}$$

$$\overset{*}{F}{}_\alpha^h \overset{*}{F}{}_j^\alpha = 0. \tag{16}$$

На підставі (15) і (12) з (11) дістаємо

$$F_i^h \mu_j - \frac{1}{n} F_j^h \mu_i = 0,$$

звідки $\mu_i = 0$. Тоді співвідношення (11) набирають вигляду

$$F_{i,j}^h = 0. \tag{17}$$

Розширимо поняття параболічно келерових просторів.

Ріманів простір V_{2n} будемо називати параболічно келеровим (ПКП), якщо в ньому поряд з метричним тензором $g_{ij}(x)$ існує афінорна структура $F_i^h(x)$, що задовольняє умови

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \qquad F_{i,j}^h = 0, \qquad F_i^\alpha g_{\alpha j} = \varepsilon F_j^\alpha g_{\alpha i} \ (\varepsilon = \pm 1).$$

Випадок $\varepsilon = -1$ докладно вивчено в [3]. У даній роботі будемо розглядати ПКП за умови $\varepsilon = 1$ і (13).

Отже, РП V_{2n}, що допускає КМГВ π_2 $(e = 0)$, при $B_{ij}^h = 0$ є параболічно келеровим. Легко бачити, що з (17) випливає $B_{ij}^h = 0$. Аналогічними міркуваннями можна довести, що в просторі $\overline{V}_{2n}$ також $F_{i/j}^h = 0$ (за умови погодженості афінора F_i^h з метрикою $\overline{V}_{2n}$ у вигляді $\overline{g}_{ij} = \overline{g}_{ij}$). Більш того, справедлива така теорема.

Теорема 2. *В РП $V_{2n}(g_{ij})$ з афінорною структурою F_i^h, що задовольняє умови (1б), (1в) і (7), еквівалентні такі твердження:*

$$1)\ B_{ij}^h = 0; \qquad 2)\ B_{(ij)}^h = 0; \qquad 3)\ B_{[ij]}^h = 0;$$

$$4)\ g_{\alpha(h}B_{ij)}^\alpha = 0; \qquad 5)\ V_{2n} — ПКП,$$

де квадратними дужками $[ij]$ позначено альтернування, круглими дужками (hij)— циклування.

Доведення. Еквівалентність тверджень 1 і 5 показано вище.

Нехай в V_{2n} має місце твердження 2. Тоді на підставі (10) одержуємо

$$F_{(i}^h \mu_{j)} - \frac{1}{n} \mu_\beta F_{(i}^h \overset{*}{F}{}_{j)}^\beta = 0. \tag{18}$$

Виконаємо тут спряження по індексу i: $F_j^h \mu_{\bar{i}} = 0$. Згортання останніх співвідношень з $\overset{*}{F}{}_h^j$ по j і h показує, що $\mu_{\bar{i}} = 0$. Тоді, використовуючи (15), з (18) маємо $\mu_i = 0$. Таким чином, в V_{2n} виконуються умови (17), а отже, V_{2n} є ПКП. Неважко перевірити, що в ПКП має місце твердження 2. Еквівалентність тверджень 2 і 5 доведено. Аналогічно можна показати еквівалентність інших тверджень.

3. Розглянемо КМГВ π_2 $(e = 0)$ ПКП $V_{2n}(g_{ij}, F_i^h)$ і $\overline{V}_{2n}(\overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. У спільній по відображенню системі координат (x^i) основні рівняння цього відображення мають вигляд

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_{(i} F_{j)}^h, \tag{19а}$$

$$\overline{F}_i^h(x) = F_i^h(x), \tag{19б}$$

$$F_{i,j}^h = F_{i/j}^h = 0, \tag{19в}$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \tag{19г}$$

$$F_{ij} = F_{ji}, \tag{19д}$$

$$\overline{g}_{\alpha j} F_i^\alpha = \overline{g}_{\alpha i} F_j^\alpha. \tag{19е}$$

Вектор φ_i надалі будемо вважати градієнтним, тобто

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \tag{20}$$

Зауважимо, що для КМГВ ПКП

$$\varphi_{\bar{i}} = 0. \tag{21}$$

Це легко випливає з (2) і (19в).

Згорнемо (19а) з δ_h^j по індексах h, j:

$$\overline{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\alpha. \tag{22}$$

Виконаємо в (19а) спряження по індексу i:

$$\overline{\Gamma}_{\bar{i}j}^h = \Gamma_{\bar{i}j}^h. \tag{23}$$

Згорнемо (19а) з $\overset{*}{F}{}_h^j$ по індексах h, j. З огляду на (21) знаходимо

$$\varphi_i = \frac{1}{n+1}\left(\overline{\Gamma}_{i\beta}^\alpha - \Gamma_{i\beta}^\alpha\right)\overset{*}{F}{}_\alpha^\beta.$$

Тоді (19а) можна подати у вигляді $K_{ij}^h = \overline{K}_{ij}^h$, де

$$K_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n+1} F_{(i}^h \Gamma_{j)\beta}^\alpha \overset{*}{F}{}_\alpha^\beta. \tag{24}$$

Аналогічно визначено $\overline{K}_{ij}^h$ у просторі $\overline{V}_{2n}$.

Очевидно, збереження об'єкта K_{ij}^h є необхідною і достатньою умовою того, щоб дане відображення було КМГВ π_2 $(e = 0)$. Відмітимо, що K_{ij}^h має нетензорний характер і відіграє роль параметрів Томаса в теорії геодезичних відображень РП [4].

Із залежності між тензорами Рімана просторів V_{2n} і $\overline{V}_{2n}$

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \varphi_{i.[j}F^h_{k]} \tag{25}$$

знайдемо

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{n-1}\left(\overline{R}^{\alpha}_{ij\beta} - R^{\alpha}_{ij\beta}\right)\overset{*}{F}{}^{\beta}_{\alpha}. \tag{26}$$

Тоді (25) набирають вигляду $L^h_{ijk} = \overline{L}^h_{ijk}$, де

$$L^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}R^{\alpha}_{i[j|\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{\alpha|}F^h_{k]}. \tag{27}$$

Аналогічно в просторі $\overline{V}_{2n}$ визначено компоненти тензора $\overline{L}^h_{ijk}$.

Через (20) і (21) із (25) також випливає

$$\begin{aligned} \overline{R}^h_{\bar{i}jk} &= R^h_{\bar{j}jk}, \\ \overline{R}_{ij} &= R_{ij}. \end{aligned} \tag{28}$$

Відзначимо, що тензори L^h_{ijk} є аналогом тензора Вейля в теорії геодезичних відображень РП [5].

Сформулюємо отриманий результат.

Теорема 3. *Геометричні об'єкти* (22), (23) *і* (24) *і тензори* (27), (28), *а також тензор Річчі інваріантні відносно КМГВ* π_2 $(e = 0)$ *ПКП.*

4. Назвемо канонічним π_2-плоским ПКП V_{2n}, що допускає КМГВ π_2 $(e = 0)$ на плоский простір $\overline{V}_{2n}$.

Теорема 4. *ПКП* V_{2n} *є канонічним* π_2*-плоским тоді і тільки тоді, коли його тензор Рімана має вигляд*

$$R^h_{ijk} = \frac{1}{n(n-1)}\overset{**}{R}F_{i[j}F^h_{k]}, \tag{29}$$

де

$$\overset{**}{R} = R^{\alpha\gamma}_{\cdot\delta\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{\alpha}\overset{*}{F}{}^{\delta}_{\gamma}.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай V_{2n} допускає КМГВ π_2 $(e = 0)$ на плоский простір $\overline{V}_{2n}$, тоді $L^h_{ijk} = \overline{L}^h_{ijk} = 0$. Отже, із (27) випливає

$$R^h_{\cdot ijk} = \frac{1}{n-1}R^{\alpha}_{\cdot i[j|\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{\alpha|}F^h_{k]}. \tag{30}$$

Згортаючи (30) з $\overset{*}{F}{}^k_h g^{ij}$ по індексах h, i, j, k, одержуємо

$$R^{\beta}_{\alpha}\overset{*}{F}{}^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{31}$$

Тепер згорнемо (30) з $\overset{*}{F}{}^{ji}$ по індексах i, j. З огляду на (31) знайдемо

$$R^{h\alpha}_{\cdot\beta k}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{n}\overset{**}{R}F^h_k.$$

Опустимо тут індекс h у просторі V_{2n}:

$$R^{\alpha}_{\cdot hk\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{n}\overset{**}{R}F_{hk}.$$

Підставивши останнє в (30), дістанемо необхідне. Необхідність доведено.

Достатність. Доведемо, що V_{2n}, у якому має місце (29), допускає КМГВ π_2 $(e=0)$ на плоский простір $\overline{V}_{2n}$. Спочатку покажемо, що $\overset{**}{R} = \mathrm{const}$. Для цього продиференціюємо (29) коваріантно по змінній x^l в V_{2n}:

$$R^{h}_{\cdot ijk,l} = \frac{1}{n(n-1)}\overset{**}{R}_{,l}F_{i[j}F^{h}_{k]}. \tag{32}$$

Піднімемо тут індекс i в V_{2n}, потім проциклюємо по j, k, l і скористаємося тотожністю Біанкі

$$\overset{**}{R}_{,l}F^{i}_{[j}F^{h}_{k]} + \overset{**}{R}_{,j}F^{i}_{[k}F^{h}_{l]} + \overset{**}{R}_{,k}F^{i}_{[l}F^{h}_{j]} = 0. \tag{33}$$

Згорнемо (33) з $\overset{*}{F}{}^{k}_{h}$ по індексах h, k:

$$(n-2)\overset{**}{R}_{,[l}F^{i}_{j]} + \overset{**}{R}_{,\overline{\alpha}}F^{\alpha}_{[l}F^{i}_{j]} = 0. \tag{34}$$

Виконавши в (34) спряження по індексу l, одержимо

$$(n-1)\overset{**}{R}_{,\overline{l}}F^{i}_{j} = 0,$$

а отже, $\overset{**}{R}_{,\overline{l}} = 0$. Тоді (34) наберуть вигляду

$$\overset{**}{R}_{,[l}F^{i}_{j]} = 0.$$

Згортання останніх співвідношень з $\overset{*}{F}{}^{j}_{i}$ по i, j показує, що $\overset{**}{R}_{,l} = 0$.

Якщо КМГВ π_2 $(e=0)$ V_{2n} на плоский $\overline{V}_{2n}$ існує, то відповідний вектор φ_i повинен задовольняти умови (26), які через те, що $\overline{V}_{2n}$ — плоский, набирають вигляду

$$\varphi_{i,j} = -\frac{1}{n(n-1)}\overset{**}{R}F_{ij}. \tag{35}$$

Умови інтегровності системи диференціальних рівнянь типу Коші (35) мають вигляд

$$\varphi_{i,[jk]} = 0,$$

чи, що еквівалентно,

$$\varphi_{\alpha}R^{\alpha}_{\cdot ijk} = 0.$$

Внаслідок (29) це тотожність. Отже, система рівнянь (35) завжди має розв'язок.

Достатність доведено.

Теорема 4 є аналогом теореми Бельтрамі [6].

Очевидно, канонічний π_2-плоский простір є симетричним. Відновимо метричний тензор g_{ij} канонічного π_2-плоского простору V_{2n} в околі деякої точки $M(x_0)\in V_{2n}$, скориставшись формулою П. А. Широкова [7]

$$g_{ij} = \mathring{g}_{ij} - \frac{1}{4!n(n-1)} \overset{**}{R} y^{\alpha} y^{\beta} \left(\mathring{F}_{\alpha i} \mathring{F}_{\beta j} - \mathring{F}_{\alpha\beta} \mathring{F}_{ij} \right),$$

де $\mathring{g}_{ij}$ — значення метричного тензора в точці x_o, y^h — ріманові координати в точці x_o, $\mathring{F}_{ij} = F_i^{\alpha} \mathring{g}_{\alpha j}$.

1. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979. – 256 с.
2. *Микеш Й.* Геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее прил. Тематич. обзоры. Геометрия. – 1994. – **11**, № 2. – 26 с.
3. *Шиха М.* Геодезические и голоморфно-проективные отображения параболически келеровых пространств: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – М., 1993. – 110 с.
4. *Thomas T.* On the projective and equiprojective of paths // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1925. – **11**. – P. 198 – 203.
5. *Weyl H.* Zur infinitesimal geometrie Einordnung der projektiven und der Konformen Auffassung // Götting. Nachr. – 1921. – S. 99 – 119.
6. *Beltrami E.* Teoria fondamental degli spazii di curvatura costante // Ann. mat. – 1902. – **2**, № 2. – 232 – 255.
7. *Широков П. А.* Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – 432 с.

Одержано 27.11.2000,
після доопрацювання — 21.01.2002