УДК 517.9:519.46

Т. А. Баранник (Ін-т математики НАН України, Київ)

УМОВНА СИМЕТРІЯ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ БАГАТОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

We investigate the conditional symmetry of a multidimensional nonlinear reaction-diffusion equation by its reduction to the radial equation. We construct exact solutions of this equation and infinite families of exact solutions for the corresponding one-dimensional diffusion equation.

Досліджено умовну симетрію багатовимірного нелінійного рівняння реакції-дифузії шляхом редукції його до радіального рівняння. Побудовано точні розв'язки цього рівняння і нескінченні сім'ї точних розв'язків відповідного одновимірного рівняння дифузії.

1. Вступ. Нелінійні рівняння дифузії лежать в основі великої кількості моделей математичної фізики, хімії та біології. Дослідження симетричних властивостей цих рівнянь є важливим як для задач математичного моделювання (оскільки та чи інша симетрія часто є апріорною вимогою до моделі), так і для побудови точних розв'язків.

У даній роботі досліджується умовна симетрія і будуються нескінченні сім'ї точних розв'язків багатовимірного рівняння реакції-дифузії

$$u_t = \Delta u + f(u), \tag{1}$$

де $u = u(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $f(u)$ — деяка фіксована функція від залежної змінної.

Під класичною симетрією рівняння (1) ми розуміємо існування групи неперервних перетворень для залежних змінних, що зберігають його форму [1]. Умовна симетрія [2] означає існування такої групи при умові, що u задовольняє (1) і деяке додаткове рівняння (яке буде знайдено далі).

Класична симетрія рівнянь вигляду (1) вивчалася в [3]. Для довільної функції $f(u)$ ці рівняння зберігають симетрію відносно групи $E(n)$, генератори якої мають таку форму:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a \neq b, \quad a, b = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

У роботах [4, 5] досліджено умовну (некласичну) симетрію найпростішого рівняння (1), що відповідає $n = 1$. У роботі [6] запропоновано новий підхід до дослідження класичної і умовної симетрії, який можна ефективно застосувати до рівняння (1) з довільною кількістю просторових змінних.

2. Редукція рівняння (1). Беручи до уваги симетрію рівняння (1) відносно групи обертань $O(n)$ в n-вимірному просторі (генератори якої J_{ab} наведено у (2)), доцільно шукати розв'язки рівняння (1) у вигляді

$$u = u(t, x), \qquad x = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

У підсумку приходимо до редукованого рівняння

$$u_t - u_{xx} - \frac{n-1}{x} u_x = f(u). \tag{3}$$

Лінійний диференціальний оператор

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} - \pi u \frac{\partial}{\partial u} \tag{4}$$

є генератором умовної симетрії рівняння (3), якщо це рівняння сумісне з умовою [2] $Xu = 0$.

Ми обмежимося випадком, коли ξ і π є функціями від однієї змінної x.

Теорема 1. *Оператор* (4) *є оператором умовної симетрії рівняння* (3), *якщо* $\pi(x) = -\frac{2\xi_x}{1-k}$, *а функція* $\xi = \xi(x)$ *є розв'язком системи*

$$\begin{gathered} \frac{n-1}{x}\xi + \xi^2 + \frac{3+k}{1-k}\xi_x = C_1, \\ \frac{n-1}{x}\xi_{xx} + \xi_{xxx} - 2\xi_x^2 + C_2(1-k)\xi_x = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

де k, C_1 *і* C_2 *— довільні сталі. Відповідна функція набирає вигляду*

$$f(u) = \pm u^k + C_2 u.$$

Теорема доводиться методом, запропонованим у [6].

Якщо $f(u) = \pm u^k$, то система (5) для визначення функції $\xi = \xi(x)$ набирає вигляду

$$\begin{gathered} \frac{n-1}{x}\xi + \xi^2 + \frac{3+k}{1-k}\xi_x = C_1, \\ \frac{n-1}{x}\xi_{xx} + \xi_{xxx} - 2\xi_x^2 = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Знайдемо спочатку розв'язки системи (6).

Система (6) сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$k = \frac{n-4}{n-2}.$$

Відповідний загальний розв'язок має вигляд $\xi = l/x$, де $l = n-4$.

Для чисел n, що не перевищують 12, відповідні значення l і k наведено в таблиці.

n	1	3	5	6	7	8	9	10	11	12
k	3	–1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$
l	–3	–1	1	2	3	4	5	6	7	8

У випадках $n = 1$, $k = 3$ і $n = 3$, $k = -1$ система має додаткові розв'язки $\xi = -\dfrac{3}{x+k'}$ і $\xi = k' - \dfrac{1}{x}$ відповідно, де k' — довільна стала. Зауважимо, що цим випадкам відповідають такі оператори умовної симетрії рівняння (1):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x + k'}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{(x + k')^2}u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{7}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} - \left(k' - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{8}$$

3. Розв'язки рівняння (1). 1. Розглянемо рівняння (1) для $n = 1$ і $f(u) = \pm u^3$:

$$u_t - u_{xx} = \pm u^3. \tag{9}$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії (7), якому відповідає анзац

$$u = a(2x + k_1)\omega(z), \qquad z = a(x^2 + k_1 x + 6t + k_2), \tag{10}$$

де a, $k_1 = 2k'$, k_2 — довільні сталі, $a \neq 0$. Підставляючи (10) у (9), отримуємо звичайні диференціальні рівняння для $\omega(z)$:

$$\omega'' \pm \omega^3 = 0, \qquad f(u) = \pm u^3. \tag{11}$$

Відомим розв'язком рівняння (8) є функція

$$\omega(z) = \sqrt{2}\,ds\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right),$$

де $ds(z; k)$ — еліптична функція Якобі, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 = k^2(k^2 - 1) + (2k^2 - 1)\eta^2 + \eta^4. \tag{12}$$

Отже, у випадку $f(u) = -u^3$ отримуємо такий точний розв'язок рівняння (1):

$$u = \sqrt{2}a(2x + k_1)\,ds\left[a(x^2 + k_1 x + 6t + k_2); \frac{1}{2}\sqrt{2}\right].$$

Побудуємо далі нескінченну множину нееквівалентних розв'язків рівняння (1) у випадку $f(u) = -u^3$. З цією метою визначимо функції $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ в такий спосіб. Покладемо $v_1 = ds\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, а для $k \geq 1$ $v_{k+1} = \dfrac{\dot v_k}{v_k}$ ($\dot v_k$ — похідна функції v_k по змінній z).

Теорема 2. *Функція* v_k *є розв'язком рівняння*

$$\ddot v - 2v^3 = 0 \quad і \quad \dot v_k^2 = v_k^4 + (-4)^{k-2} \qquad для \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Використовуючи теорему 2, знаходимо, що розв'язками рівняння (1) у випадку $f(u) = -u^3$ $(n = 1)$ є функції

$$u_k = \sqrt{2}a(2x + k_1)v_k.$$

Зауважимо, що розв'язок $u_1 = \sqrt{2}a(2x + k_1)v_1$ знайдено в [5].

2. Розглянемо рівняння (1) для $n = 3$ і $f(u) = \pm u^{-1}$:

$$u_t - u_{xx} = \pm u^{-1}. \tag{13}$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії (8), якому відповідає анзац

$$u = \frac{1}{x}\omega(z), \qquad z = \frac{x^2}{2} + t,$$

що редукує рівняння (13) до рівняння

$$\omega'' \pm \omega^{-1} = 0, \quad \text{якщо} \quad f(u) = \pm u^{-1}. \tag{14}$$

Загальний розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$z = \int (\pm 2\ln\omega + C_1)^{-1/2}\, d\omega + C_2.$$

Отже, функція $u = \frac{1}{x}\omega(z)$, де ω визначається з умови

$$\frac{x^2}{2} + t = \int (\pm 2\ln\omega + C_1)^{-1/2}\, d\omega + C_2,$$

є розв'язком рівняння (1) у випадку $f(u) = \pm u^{-1}$.

Розглянемо далі систему (5). Розв'язуючи її для $n = 1$, отримуємо такі оператори умовної симетрії рівняння (1):

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + 3\mu\tan(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2 u\sec^2(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\text{якщо} \quad f(u) = \pm u^3 - 2\mu^2 u;$$

$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial t} - 3\mu\coth(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial x} - 3\mu^2 u\,\mathrm{csch}^2(\mu x + k')\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\text{якщо} \quad f(u) = \pm u^3 + 2\mu^2 u.$$

Оператору Y_1 відповідає анзац

$$u = -\sqrt{2}\mu k_1 \sin(\mu x + k')\exp(-3\mu^2 t)\omega(z),$$

$$z = k_1\exp(-3\mu^2 t)\cos(\mu x + k') + k_2,$$

де k', k_1, k_2 — довільні сталі. Анзац редукує рівняння (1) до рівняння

$$\omega'' \pm \omega^3 = 0, \quad \text{якщо} \quad f(u) = \pm u^3 - 2\mu^2 u.$$

Оператору Y_2 відповідає анзац

$$u = \sqrt{2}\mu k_1 \sinh(\mu x + k')\exp(3\mu^2 t)\omega(z),$$

$$z = k_1\exp(3\mu^2 t)\cosh(\mu x + k') + k_2,$$

де k', k_1, k_2 — довільні сталі. Анзац редукує рівняння (1) до рівняння

$$\omega'' \pm \omega^3 = 0, \quad \text{якщо} \quad f(u) = \pm u^3 + 2\mu^2 u.$$

Використовуючи теорему 2, отримуємо, що розв'язками рівняння (1) у випадку $f(u) = -u^3 - 2\mu^2 u$ є функції

$$u_k = -\sqrt{2}\mu k_1 \sin(\mu x + k')\exp(-3\mu^2 t)v_k,$$

де

$$v_1 = ds\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \qquad z = k_1\exp(-3\mu^2 t)\cos(\mu x + k') + k_2,$$

а для $k \geq 1$

$$v_{k+1} = \frac{\dot{v}_k}{v_k}.$$

Аналогічно, розв'язками рівняння (1) у випадку $f(u) = -u^3 + 2\mu^2 u$ є функції

$$u_k = \sqrt{2}\mu k_1 \sinh(\mu x + k')\exp(3\mu^2 t)v_k,$$

де

$$v_1 = ds\left(z; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \qquad z = k_1 \exp(3\mu^2 t)\cosh(\mu x + k') + k_2,$$

а для $k \geq 1$

$$v_{k+1} = \frac{\dot{v}_k}{v_k}.$$

Таким чином, ми знайшли точні розв'язки для багатовимірного нелінійного рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю і нескінченні сім'ї точних розв'язків для відповідного одновимірного рівняння. Наявність нескінченної кількості точних розв'язків дозволяє використовувати їх для досить широкого класу крайових задач.

Висловлюю подяку д-ру фіз-мат. наук А. Г. Нікітіну за постановку задачі і корисні поради.

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Фущич В. И., Штелень И. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
3. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 7. – С. 1215 – 1224.
4. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – № 7. – С. 24 – 28.
5. *Clarkson P., Mansfield E.* Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Physica D. – 1993. – **70**. – P. 250 – 288.
6. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – **42**, № 4. – P. 1667 – 1688.

Одержано 04.03.2002