УДК 519. 21

А. А. Литвинюк (Нац. пед. ун-т, Київ)

ПРО ТИПИ РОЗПОДІЛІВ СУМ ОДНОГО КЛАСУ ВИПАДКОВИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ОДНАКОВО РОЗПОДІЛЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

By using the method of characteristic functions, we obtain sufficient conditions of the singularity of a random variable

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\xi_k,$$

where ξ_k are independent equally distributed random variables taking the values x_0, x_1, and x_2 ($x_0 < x_1 < x_2$) with the probabilities p_0, p_1, and p_2, respectively, such that $p_i \geq 0$, $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, and $2(x_1 - x_0)/(x_2 - x_0)$ is a rational number.

Методом характеристичних функцій одержано достатні умови сингулярності випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\xi_k,$$

де ξ_k – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень x_0, x_1, x_2 ($x_0 < x_1 < x_2$) з імовірностями p_0, p_1, p_2 відповідно, $p_i \geq 0$, $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, при цьому $2(x_1 - x_0)/(x_2 - x_0)$ є раціональним числом.

Розглядається випадкова величина (в.в.):

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\xi_k, \tag{1}$$

де ξ_k — незалежні однаково розподілені в. в., які набувають значень x_0, x_1, x_2 ($x_0 < x_1 < x_2$) з імовірностями p_0, p_1, p_2 відповідно, $p_i \geq 0$, $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. Основною задачею є дослідження структури розподілу [1] в. в. ξ. З теореми Джессена – Вінтнера [1] випливає чистота розподілу ξ. За теоремою П. Леві [1] ξ матиме дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли $\max\{p_0, p_1, p_2\} = 1$. Випадок $x_i = i$ розглядався спочатку в роботі [2], де були отримані в термінах випадкових матриць деякі достатні умови сингулярності ξ, які практично перевірити важко, а потім в роботі [3] задача була повністю розв'язана методом характеристичних функцій. Випадок, коли x_i — довільні дійсні числа, приводить до значних ускладнень. У даній роботі пропонуються результати досліджень, коли $\dfrac{2(x_1 - x_0)}{x_2 - x_0}$ є раціональним числом, поданим у вигляді нескоротного дробу m/a, при цьому використовується методика, запропонована в [3].

Очевидно, що в. в.

$$\xi' = \xi - x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\xi_k - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\xi_k - x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\xi'_k,$$

де

ξ'_k	0	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_0$
p_i	p_0	p_1	p_2

має той же тип розподілу, що й в.в. ξ. При цьому ξ' є в.в. вигляду (1), при $x_0 = 0$. Однаковий тип розподілу мають і в. в. ξ' та ξ'', де

$$\xi'' = \frac{2}{x_2 - x_0}\xi' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\xi'_k}{2^k(x_2 - x_0)} = \sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\xi''_k,$$

ξ''_k	0	$\frac{m}{a}$	2
p_i	p_0	p_1	p_2

Отже, ξ' і ξ'' мають однакові типи розподілу („два розподіли F_1 і F_2 в R^1 називаються розподілами одного й того ж типу, якщо $F_2(x) = F_1(\alpha x + \beta)$, $\alpha > 0$. Параметр α називається масштабним множником, а параметр β — центруючою сталою (або параметр розміщення)") [6, с. 163].

Лема 1. *Характеристична функція (х.ф.) розподілу в. в. ξ записується у вигляді*

$$f_\xi = f(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t), \tag{2}$$

де

$$\varphi_k(t) = p_0 + p_1 e^{\frac{itm}{a2^k}} + p_2 e^{\frac{i2t}{2^k}}, \tag{3}$$

і для кожного $k \in N$ задовольняє функціональне рівняння

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2^k}\right)\prod_{n=1}^{k}\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right), \tag{4}$$

де

$$\varphi\left(\frac{t}{2^n}\right) = p_0 + p_1\cos\left(\frac{tm}{a2^n}\right) + p_2\cos(2^{1-n}t) +$$

$$+ i\left(p_1\sin\left(\frac{tm}{a2^n}\right) + p_2\sin\left(2^{1-n}t\right)\right). \tag{5}$$

Доведення. За означенням х. ф. і властивостями математичного сподівання маємо

$$f(t) = Me^{it\xi} = Me^{it\sum_k 2^{-k}\xi_k} = \tag{6}$$

$$= Me^{\frac{it}{2}(\xi_1 + \tilde{\xi})} = Me^{i\frac{t}{2}\xi_1}Me^{i\frac{t}{2}\tilde{\xi}} = \varphi\left(\frac{t}{2}\right)f\left(\frac{t}{2}\right), \tag{7}$$

де ξ_1 і $\tilde{\xi}$ – незалежні, а ξ і $\tilde{\xi}$ – однаково розподілені. З (6) випливає (2).

Оскільки рівність (7) виконується для довільного t, то, замінивши t на $t/2$, матимемо

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \varphi\left(\frac{t}{4}\right)f\left(\frac{t}{4}\right).$$

Підставивши останнє співвідношення в (7), одержимо

$$f(t) = \varphi\left(\frac{t}{2}\right)\varphi\left(\frac{t}{4}\right)f\left(\frac{t}{4}\right).$$

Остання рівність справедлива для кожного $t \in R$. Тому заміна t на $t/2$ і підстановка виразу $f(t/2)$ у (7) приведе до

$$f(t) = \varphi\left(\frac{t}{2}\right)\varphi\left(\frac{t}{4}\right)\varphi\left(\frac{t}{8}\right)f\left(\frac{t}{8}\right),$$

а наступні аналогічні кроки — до функціональної рівності (4).

Лему 1 доведено.

Врахувавши чистоту розподілу ξ, вивчимо поведінку модуля х. ф. в. в. ξ на нескінченності, тобто оцінимо величину

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup \left|f_\xi(t)\right|.$$

Відомо [4, 5], що коли $f(t)$ — х. ф. чисто: 1) дискретного розподілу, то $L_\xi = 1$; 2) абсолютно неперервного, $L_\xi = 0$; 3) чисто сингулярного розподілу, то L_ξ може набувати всіх значень [0; 1]. Тому умова $0 < L_\xi < 1$ рівносильна чистій сингулярності розподілу в. в. ξ.

Лема 2. *Якщо число m — парне, то $L_\xi \geq |f(a\pi)|$, якщо m — непарне, то $L_\xi \geq |f(a\pi)||1 - 2p_1|$.*

Доведення. Розглянемо послідовність $t_k = 2^k a\pi$. Очевидно, що $t_k \to \infty$, $k \to \infty$. Враховуючи (5) для $k \geq n$, маємо

$$\left|\varphi\left(\frac{t_k}{2^n}\right)\right|^2 = |p_0 + p_1\cos(2^{k-n}m\pi) + p_2\cos(2^{k+1-n}a\pi) +$$

$$+ i(p_1\sin(2^{k-n}m\pi) + p_2\sin(2^{k+1-n}a\pi))|^2 =$$

$$= |p_0 + p_1\cos(2_{k-n}m\pi) + p_2|^2 =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } k \geq n \text{ і парному } m, \\ (1-2p_1)^2 & \text{при } k = n \text{ і непарному } m. \end{cases}$$

Враховуючи те, що рівність (4) має місце для кожного $k \in N$ і будь-якого t, зокрема і для $t = 2^k a\pi$, після підстановки матимемо

$$|f(2^k a\pi)| = |f(a\pi)|\prod_{n=1}^{k}\left|\varphi\left(\frac{2^k a\pi}{2^n}\right)\right| = |f(a\pi)||\varphi(a\pi)| =$$

$$= \begin{cases} |f(a\pi)|, & \text{якщо } m \text{ парне,} \\ |f(a\pi)||1 - 2p_1|, & \text{якщо } m \text{ непарне.} \end{cases}$$

Оскільки ж

$$L_\xi \geq \lim_{k\to\infty}\left|f\left(2^k a\pi\right)\right|,$$

а $f(2^k a\pi)$ не залежить від k, то справедливе твердження леми.

Лему 2 доведено.

Наслідок. *Якщо* $\max\{p_0, p_1, p_2\} < 1$ *і* $f(a\pi) \neq 0$, *то* ξ *має чисто сингулярний розподіл при умові, що* m *— парне або* $p_1 \neq 1/2$.

Теорема. *Якщо* m *— число парне або* $p_1 \neq 1/2$ *і для будь-якого* $k \in \{1, 2, 3, \dots, k_0 - 1\}$, *де* k_0 *— найменше натуральне число таке, що* $2^{k_0} > M = \max\{m, a\}$,

$$p_0 + p_1 \cos(2^{-k}\pi m) + p_2 \cos(2^{1-k}\pi a) \neq 0 \tag{8}$$

або

$$p_1 \sin(2^{-k}\pi m) + p_2 \sin(2^{-k}\pi a) \neq 0,$$

то $L_\xi \geq |f(\pi a)| > 0$, *а отже,* ξ *має сингулярний розподіл.*

Доведення. Подамо $|f(\pi a)|$ у вигляді

$$|f(\pi a)| = \prod_{k=1}^{k_0-1} \left|\varphi\left(\frac{\pi a}{2^k}\right)\right| \left|\prod_{k=k_0}^{\infty} \varphi\left(\frac{\pi a}{2^k}\right)\right|,$$

де

$$\varphi\left(\frac{\pi a}{2^k}\right) = p_0 + p_1 \cos(2^{-k} m\pi) + p_2 \cos(2^{1-k} a\pi) +$$
$$+ i(p_1 \sin(2^{-k} m\pi) + p_2 \sin(2^{1-k} a\pi)).$$

Доведемо наступну нерівність:

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} \varphi\left(\frac{a\pi}{2^k}\right) \neq 0. \tag{9}$$

При $k \geq k_0$ очевидно, що $\varphi\left(\frac{a\pi}{2^k}\right) \neq 0$, оскільки $0 < 2^{-k}\pi m < \pi$ і $0 < 2^{1-k}\pi a < \pi$, а отже, $p_1 \sin(2^{-k} m\pi) + p_2 \sin(2^{1-k} a\pi) > 0$.

Як відомо, абсолютна збіжность нескінченного добутку (9) рівносильна абсолютній збіжності ряду

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\varphi(2^{-k} a\pi) - 1\right),$$

тобто рівносильна збіжності ряду

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \left|\varphi(2^{-k} a\pi) - 1\right|. \tag{10}$$

Зобразимо $|\varphi(2^{-k} a\pi)|^2$ у вигляді

$$|\varphi(2^{-k} a\pi)|^2 = (p_0 - 1 + p_1 \cos 2^{-k} m\pi + p_2 \cos 2^{1-k} a\pi)^2 +$$
$$+ (p_1 \sin 2^{-k} m\pi + p_2 \sin 2^{1-k} a\pi)^2 =$$
$$= (p_0 - 1)^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2(p_0 - 1)p_1 \cos 2^{-k} m\pi) +$$

$$+ 2(p_0 - 1)p_2 \cos(2^{1-k} a\pi) + 2p_1 p_2 \cos 2^{-k}(m\pi - 2a\pi) =$$

$$= (p_0 - 1 + p_1 + p_2)^2 - 2(p_0 - 1)p_1 -$$

$$-2(p_0 - 1)p_2 - 2p_1 p_2 + 2(p_0 - 1)p_1 \cos(2^{-k} m\pi) +$$

$$+ 2(p_0 - 1)p_2 \cos(2^{1-k} a\pi) + 2p_1 p_2 \cos(2^{-k}\pi(m - 2a)) =$$

$$= 4((p_0 - 1)p_1 \sin^2(2^{-k-1} m\pi) + (p_0 - 1)p_2 \sin^2(2^{-k} a\pi) +$$

$$+ p_1 p_2 \sin^2(2^{-k-1}\pi(m - 2a))).$$

Враховуючи те, що $\sin^2 \frac{\pi A}{2^k} \le \left|\sin \frac{\pi a}{2^k}\right|$, а довільна скінченна кількість членів ряду не впливає на його збіжність, і те, що

$$0 < \sin\frac{\pi A}{2^k} < \frac{\pi A}{2^k} \quad \text{при } k > k(A),$$

за ознакою порівняння робимо висновок про збіжність ряду (10) і добутку (9).

З (8) випливає $\varphi(2^{-k} a\pi) \ne 0$ при $k \in \{1, \ldots, k_0 - 1\}$. Тому $f(a\pi) \ne 0$, що внаслідок леми 2 рівносильно $L_\xi > 0$ і сингулярності розподілу в. в. ξ.

Теорему доведено.

1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
2. *Виннишин Я. Ф., Морока В. А.* Про тип функції розподілу випадкового степеневого ряду // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 65 – 73.
3. *Працьовитий М. В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Допов. НАН України. – 1996. – № 5. – С. 32 – 37.
4. *Pratsevytyi N. V.* Fractal, superfractal and anomalously fractal distribution of random variables with independent n-adic digits, an infinite set of which is fixed / A. V. Skorokhod, Yu. V. Borovskikh (Eds). Exploring stochastic laws. Festschrift in Honor of 70-th Birthday of Acad. V. S. Korolyuk. – VSP, 1995. – P. 409 – 416.
5. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 738 с.

Одержано 04.08.97