УДК 517. 5

В. Ф. Бабенко, Ж. Б. Уэдраого (Днепропетр. ун-т)

О ТОЧНЫХ КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

We prove that, in the additive inequality for norms of intermediate derivatives of functions which are defined on a finite interval and are equal to zero in a given system of points, the least possible value of a constant with the norm of function coincides with an exact constant in the corresponding Markov–Nikol'skii inequality for algebraic polynomials which are also equal to zero in this system of points.

Доведено, що в адитивній нерівності для норм проміжних похідних функцій, які визначені на скінченному відрізку і дорівнюють нулю у заданій системі точок, найменше можливе значення константи при нормі функції співпадає з точною константою у відповідній нерівності типу Маркова–Нікольського для алгебраїчних поліномів, які теж дорівнюють нулю у цій системі точок.

Пусть $L_p = L_p[0, 1]$, $1 \le p \le \infty$, $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p}$. Обозначим через L_p^n, $n \in \mathbb{N}$, множество заданных на $[0, 1]$ функций x, имеющих абсолютно непрерывную производную $x^{(n-1)}$ $(x^{(0)} := x)$ и таких, что $x^{(n)} \in L_p$.

Известно, что для любых $p, q, r \in [1, \infty]$ и $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k < n$, существуют константы A и B такие, что для каждой функции $x \in L_r^n$

$$\|x^{(k)}\|_q \le A\,\|x\|_p + B\|x^{(n)}\|_r. \tag{1}$$

Если $\mathfrak{M} \subset L_r^n$, то положим $A(\mathfrak{M}, k; p, q) := \inf A$, где $\inf A$ берется по всем A таким, что с некоторой константой B неравенство (1) имеет место для любой функции $x \in \mathfrak{M}$. Ясно, что

$$A(L_r^n, k; p, q) \ge M(\mathcal{T}_{n-1}, k; p; q), \tag{2}$$

где

$$M(Q, k; p, q) := \sup_{\substack{P_{n-1} \in Q \\ P_{n-1} \ne 0}} \frac{\|P_{n-1}^{(k)}\|_q}{\|P_{n-1}\|_p}$$

— точная константа в неравенстве типа Маркова–Никольского для алгебраических полиномов P_{n-1}, принадлежащих заданному подпространству Q пространства $\mathcal{T}_{n-1}$ всех полиномов степени не выше $n-1$.

В. И. Буренков [1] доказал, что при всех $p, q, r \in [1, \infty]$ и $k = n-1$

$$A(L_r^n, k; p, q) = M(\mathcal{T}_{n-1}, k; p, q). \tag{3}$$

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов и С. А. Пичугов [2] установили равенство (3) при всех $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k < n$.

Пусть заданы множества

$$T = \{t_1, \ldots, t_l\} \subset [0, 1], \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{l-1} < t_l \le 1,$$

и $m = \{m_1, \ldots, m_l\} \subset \mathbb{N}$ такое, что $|m| := \sum_{i=1}^{l} m_i \leq n-1$. Обозначим через $L_r^n(T, m)$ множество функций $x \in L_r^n$ таких, что

$$x^{(j)}(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m_i - 1. \tag{4}$$

Пусть также $\mathcal{T}_{n-1}(T, m)$ — множество полиномов $P_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$, удовлетворяющих условиям (4). Ясно, что при всех n, k, p, q, r

$$A(L_r^n(T, m), k; p, q) \geq M(\mathcal{T}_{n-1}(T, m), k; p, q). \tag{5}$$

А. И. Звягинцев [3] доказал, что при $k = n-1$, и $T \subset \{0, 1\}$ в (5) имеет место равенство.

Теорема. *Для любых* T, m, n, k, p, q, r

$$A(L_r^n(T, m), k; p, q) = M(\mathcal{T}_{n-1}(T, m), k; p, q). \tag{6}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный набор чисел $m' = \{m'_1, \ldots, m'_l\}$ такой, что $|m'| = n$ и $m'_i \geq m_i$ для $i = 1, 2, \ldots, l$. Как известно (см., например, [4, с. 25–27, 113–117]), для любой функции $x \in L_r^n$ существует единственный полином $P_{n-1}(x; t) \in \mathcal{T}_{n-1}$ (интерполяционный полином Эрмита) такой, что

$$P_{n-1}^{(j)}(x; t_i) = x^{(j)}(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad j = 0, 1, \ldots, m'_i - 1.$$

Учитывая, что любую функцию $x \in L_r^n$ можно представить в виде

$$x(t) = P_{n-1}(t) + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (t-u)_+^{n-1} x^{(n)}(u)\,du,$$

где P_{n-1} — полином Тейлора функции x, разность $x(t) - P_{n-1}(x; t)$ представляем в виде

$$x(t) - P_{n-1}(x; t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 G(t, u) x^{(n)}(u)\,du, \tag{7}$$

где $G(t, u) = (t-u)_+^{n-1} - P_{n-1}((\cdot - u)_+^{n-1}, t)$.

Далее имеем

$$x^{(k)}(t) - P_{n-1}^{(k)}(x; t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial t^k} G(t, u) x^{(n)}(u)\,du. \tag{8}$$

Из (7) и (8) легко следует, что существуют константы C и C_k такие, что

$$\|x - P_{n-1}(x; \cdot)\|_p \leq C \|x^{(n)}\|_r \tag{9}$$

и

$$\|x^{(k)} - P_{n-1}^{(k)}(x; \cdot)\|_q \leq C_k \|x^{(n)}\|_r. \tag{10}$$

Отметим также, что для $x \in L_r^n(T, m)$ будет

$$P_{n-1}(x; \cdot) \in \mathcal{T}_{n-1}(T, m).$$

Действуя по предложенной В. Ф. Бабенко, В. А. Кофановым и С. А. Пичуговым схеме [2], для любой функции $x \in L_r^n(T, m)$ имеем (для сокращения записей ниже $M = M(\mathcal{T}_{n-1}(T, m), k; p, q)$)

$$\|x^{(k)}\|_q \le \|P_{n-1}^{(k)}(x, \cdot)\|_q + \|x^{(k)} - P_{n-1}^{(k)}(x, \cdot)\|_q \le$$
$$\le M\|P_{n-1}(x, \cdot)\|_p + \|x^{(k)} - P_{n-1}^{(k)}(x, \cdot)\|_q \le$$
$$\le M\left(\|x\|_p + \|x - P_{n-1}(x; \cdot)\|_p\right) + \|x^{(k)} - P_{n-1}^{(k)}(x, \cdot)\|_q =$$
$$= M\|x\|_p + M\|x - P_{n-1}(x, \cdot)\|_p + \|x^{(k)} - P_{n-1}^{(k)}(x, \cdot)\|_q.$$

Отсюда, учитывая (9) и (10), получаем

$$\|x^{(k)}\|_q \le M\|x\|_p + (CM + C_k)\|x^{(n)}\|_r.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь для любого $I = 1, 2, \ldots, l$ задано произвольное подмножество $I_i \subset \{0, 1, \ldots, m_i - 1\}$. Через $L_r^n(T, I)$ обозначим множество функций $x \in L_r^n$ таких, что

$$x^{(j)}(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \quad j \in I_i. \tag{11}$$

Из приведенного доказательства следует, что константа $A(L_r^n(T, I), k; p, q)$ совпадает (при всех n, k, p, q, r) с точной константой в неравенстве типа Маркова – Никольского для полиномов $P_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$, удовлетворяющих условиям (11).

1. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале // Тр. МИАН СССР. – 1980. – 156. – С. 22–29.
2. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О неравенствах типа Колмогорова для функций заданных на конечном отрезке // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 1. – С. 105–107.
3. *Звягинцев А. И.* Неравенства с точными постоянными для норм промежуточных производных // Междунар. конф. „Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященная 90-летию акад. С. М. Никольского: Тез. докл. (Москва, 27 апреля – 3 мая 1995 г.). – М., 1995. – С. 131–132.
4. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. – Минск: Вышейш. шк., 1997. – Т. 2. – С. 25–27; 113–117.

Получено 21.08.96