УДК 517.5

**П. М. Тамразов, С. А. Охрименко** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ПАРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДУЛЕЙ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ НА РИМАНОВОМ ЛИСТЕ МЕБИУСА*

Pairwise products of moduli of families of curves on a Riemannian Möbius strip are investigated and estimates for these products are obtained. As one of factors, the modulus of a family of arcs is considered belonging to a wide class of families of this sort, for which the moduli and the extremal metrics are also found.

Досліджено парні добутки модулів сімей кривих на рімановому листку Мьобіуса та одержані оцінки для цих добутків. Як один із множників розглядається модуль сім'ї дуг з широкого класу таких сімей (і для кожної з них знайдено модуль та екстремальну метрику).

**1. Введение.** Оценки парных произведений модулей сопряженных семейств кривых играют важную (часто решающую) роль в многочисленных приложениях. В данной работе вопрос о таких оценках рассматривается для неориентируемого многообразия. В качестве одного из компонентов пары выступает произвольное гомотопическое семейство нестягиваемых петель на римановом листе Мебиуса или произвольное объединение таких семейств. Модули этих семейств найдены ранее [1 – 3]. В качестве сопряженного компонента пары выступает семейство дуг из широкого класса семейств, и для каждого из них вычислен модуль (для одного из таких семейств модуль был указан ранее в [4]). Полученные нами оценки произведений модулей являются усилением и обобщением основного результата из [4] о нижней оценке одной из характеристик риманова листа Мебиуса (см. ниже).

Пусть $0<\alpha\le+\infty$, $0<\beta<+\infty$. В дальнейшем используем следующие понятия и обозначения из [1 – 3]: множество

$$\Pi_{0,\alpha} := \{(x,y)\colon -\alpha<x<\alpha,\ -\beta\le y<\beta\}$$

в $R^2$, риманов лист Мебиуса $\Pi_\alpha$, класс $P(\Pi_\alpha)$ метрик $\rho$ в $\Pi_\alpha$, функционал $A_\alpha(\rho)$, конкретную петлю $\gamma^l\subset\Pi_\alpha$, семейство $\Gamma_{l,\alpha}$ петель на $\Pi_\alpha$, понятия экстремальной метрики и модуля семейства кривых на $\Pi_\alpha$.

**2. Модули поперечных семейств дуг.** Пусть $0<\alpha<+\infty$.

*Дугой* в $\Pi_\alpha$ условимся называть непрерывное отображение непустого открытого действительного интервала в $\Pi_\alpha$.

Пусть $a<b$ и $\delta\colon(a,b)\to\Pi_\alpha$ — дуга в $\Pi_\alpha$. Положим $c=\dfrac{a+b}{2}$ и через $\delta^-$ и $\delta^+$ условимся обозначать сужения отображения $\delta$ соответственно на полуинтервалы $(a,c]$ и $[c,b)$. Отображения $\delta^+$ и $\delta^-$ условимся называть *полудугами*, причем те же обозначения и термин будем применять и к соответствующим образам указанных полуинтервалов. Ниже на дуги $\delta$ накладываем некоторые комбинации следующих условий.

I. Для всякого компакта $K\subset\Pi_\alpha$ существует компакт $T\subset(a,b)$ такой, что $\delta(t)\notin K$ $\forall t\in(a,b)\setminus T$.

II. Существует компакт $K_1\subset\Pi_\alpha$ такой, что: каков бы ни был компакт $T_1\subset(a,b)$, на $(a,b)\setminus T_1$ существуют точки $a_1$ и $b_1>a_1$, для которых всякая дуга в $\Pi_\alpha$ с началом $\delta(a_1)$ и концом $\delta(b_1)$, гомотопная в $\Pi_\alpha$ дуге $\delta\colon(a_1, b_1)\to\Pi_\alpha$, имеет непустое пересечение с $K_1$.

*Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Министерстве Украины по делам науки и технологий (проект 1.4/263) и INTAS (грант 94-1474).

III. Множества $\delta((a,c])$ и $\delta([c,b))$ не являются относительно компактными в $\Pi_\alpha$.

IV. Дуга $\delta$ имеет непустое пересечение с петлей $\gamma^1$.

Обозначим через $B^\alpha$ семейство всех дуг в $\Pi_\alpha$, удовлетворяющих условиям III и IV, а через $B_\alpha$ — семейство всех жордановых дуг в $\Pi_\alpha$ вида $\delta_y$: $(-\alpha,\alpha)\to\Pi_\alpha$, задаваемых условием $\delta_y(t)=(t,y)\in\Pi_\alpha$ или $\delta_y(t)=(-t,y)\in$ $\in\Pi_\alpha$, где $y$ — параметр, принимающий любое постоянное значение из промежутка $[-\beta,\beta)$.

Обозначим через $B_0^\alpha$ семейство всех дуг в $\Pi_\alpha$, удовлетворяющих условиям I и II.

Можно убедиться, что $B_\alpha\subset B_0^\alpha\subset B^\alpha$.

Заметим, что рассмотренное в [4] семейство $B_1^\alpha$ дуг, имеющих индекс пересечения $\pm1$ с каждой кривой из семейства $\Gamma_{1,\alpha}$, удовлетворяет условию $B_\alpha\subset$ $\subset B_1^\alpha\subset B_0^\alpha$ (в [4] для $B_1^\alpha$ использовано иное обозначение).

Пусть теперь $\Gamma_\alpha^*$ — произвольное семейство локально спрямляемых дуг в $\Pi_\alpha$, удовлетворяющее условиям $B_\alpha\subset\Gamma_\alpha^*\subset B^\alpha$.

Используя комплексную переменную $w=x+iy$, установим следущий результат.

**Теорема 1.** *В* $\Pi_\alpha$ *метрика*

$$\rho_\alpha^*(w) := \frac{1}{2\alpha}\quad\forall\, w\in\Pi_\alpha$$

*экстремальна для семейства* $\Gamma_\alpha^*$ *и* $M(\Gamma_\alpha^*)=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

***Доказательство.*** Сначала докажем допустимость метрики $\rho_\alpha^*$ для семейства $B^\alpha$. Через $\Pi_\alpha^2$ обозначим двулистное накрывающее многообразия $\Pi_\alpha$, реализованное в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в виде кольца:

$$\Pi_\alpha^2 := \{z\in\mathbb{C},\ e^{-\varphi}<|z|<e^{\varphi}\},\qquad \varphi := \frac{\pi\alpha}{2\beta},$$

с проектированием $p\colon\Pi_\alpha^2\to\Pi_\alpha$, $p(1)=0$ и группой скольжений $Z_2$, образующая которой является антиконформным гомеоморфизмом $z\mapsto-\dfrac{1}{\bar z}$.

Пусть $\delta\colon(a,b)\to\Pi_\alpha$ — дуга из $B^\alpha$. Без ограничения общности считаем, что $a=-1$, $b=1$. Пусть $\delta^+:=\delta|_{[0,1)}$, а $\delta_1^+$, $\delta_2^+$ — поднятия на $\Pi_\alpha^2$ полудуги $\delta^+$. Тогда $\delta_1^+$, $\delta_2^+$ не являются относительно компактными в $\Pi_\alpha^2$ и переходят друг в друга при отображении $z\mapsto-\dfrac{1}{\bar z}$. Аналогичные утверждения справедливы и по отношению к полудуге $\delta^-:=\delta|_{(-1,0]}$ и ее поднятиям $\delta_1^-$, $\delta_2^-$ на $\Pi_\alpha^2$. При этом дуги $\delta_1^-\cup\delta_1^+$ и $\delta_2^-\cup\delta_2^+$ пересекают окружность $|z|=1$, так как она является полным прообразом петли $\gamma^1$ в отображении $p\colon z\mapsto w$. Имеем

$$|p'(z)| = \left|\left(\frac{2\beta}{\pi}\log z\right)'\right| = \frac{2\beta}{\pi|z|},\qquad |dw| = \frac{2\beta}{\pi}|d\log z|,$$

поэтому

$$\int_{\delta} |dw| = \frac{2\beta}{\pi} \int_{\delta_1^- \cup \delta_1^+} |d\log z| \geq \frac{2\beta}{\pi} \int_{\delta_1^- \cup \delta_1^+} |d\operatorname{Re}\log z| \geq 2\alpha.$$

Следовательно, в $\Pi_\alpha$ метрика $\rho_\alpha^*(w) = (2\alpha)^{-1}$ допустима для семейства $B^\alpha$, а поэтому и для $\Gamma_\alpha^* \subset B^\alpha$. При этом

$$A_\alpha(\rho_\alpha^*) = \frac{1}{4\alpha^2} 4\alpha\beta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Значит,

$$M(B^\alpha) \leq \frac{\beta}{\alpha}. \tag{1}$$

Пусть теперь $\rho$ — произвольная допустимая для $B_\alpha$ метрика. Тогда последовательно имеем

$$\iint_{\Pi_\alpha} \rho\, dx\, dy = \int_{-\beta}^{\beta} \left( \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho\, dx \right) dy \geq \int_{-\beta}^{\beta} 1\, dy = 2\beta;$$

$$\left( \iint_{\Pi_\alpha} \rho\, dx\, dy \right)^2 \leq A_\alpha(\rho) A_\alpha(1) = 4\alpha\beta A_\alpha(\rho);$$

$$(2\beta)^2 \leq \left( \iint_{\Pi_\alpha} \rho\, dx\, dy \right)^2 \leq 4\alpha\beta A_\alpha(\rho);$$

$$A_\alpha(\rho) \geq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Значит,

$$M(B_\alpha) \geq \frac{\beta}{\alpha}. \tag{2}$$

Поскольку $B_\alpha \subset \Gamma_\alpha^* \subset B^\alpha$, то

$$M(B_\alpha) \leq M(\Gamma_\alpha^*) \leq M(B^\alpha). \tag{3}$$

Сопоставляя (1) – (3), получаем

$$M(B_\alpha) = M(\Gamma_\alpha^*) = M(B^\alpha) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Следовательно, метрика $\rho_\alpha^*(w) = (2\alpha)^{-1}$ экстремальна для каждого из семейств $B_\alpha$, $\Gamma_\alpha^*$, $B^\alpha$. Теорема 1 доказана.

**3. Произведения модулей и их оценки.** В настоящем пункте $\Gamma_{0,\alpha}$, $\Gamma_{1,\alpha}^k$, $T_{s,m}$ обозначают введенные в [1 – 3]семейства петель ($k$, $s$, $m$ — натуральные).

В [1 – 3] найдены экстремальные метрики и модули семейств $\Gamma_{0,\alpha}$, $\Gamma_{1,\alpha}^k$, $T_{s,m}$. Ниже существенно используем эти результаты.

Введем обозначение

$$\varphi := \frac{\pi\alpha}{2\beta}.$$

Нами установлены следующие результаты о парных произведениях модулей, в которых th обозначает гиперболический тангенс.

**Теорема 2.** *В обозначениях*

$$\mathcal{N}_0 := \mathcal{N}_0(\alpha) := M(\Gamma_{0,\alpha})M(\Gamma_\alpha^*),$$
$$c := \log(2+\sqrt{3}) \ (\approx 1{,}317)$$

*справедливы соотношения*

$$\mathcal{N}_0 = \begin{cases} \frac{1}{\varphi}\operatorname{th}\varphi \geq \frac{1}{c}\operatorname{th} c = \frac{\sqrt{3}}{2\log(2+\sqrt{3})} \ (\approx 0{,}658) & \forall \varphi \leq c, \\ \frac{1}{4\varphi}(4\operatorname{th} c - c) + \frac{1}{4}\left(> \frac{1}{4}\right) & \forall \varphi > c \end{cases}$$

*и* $\mathcal{N}_0$ *— строго убывающая функция от* $\varphi$ *со значениями в интервале* $(1/4, 1)$, *причем*

$$\mathcal{N}_0 \searrow \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad \varphi \nearrow +\infty,$$
$$\mathcal{N}_0 \nearrow 1 \quad \text{при} \quad \varphi \searrow 0.$$

**Теорема 3.** *В обозначениях*

$$\mathcal{N}_k := \mathcal{N}_k(\alpha) := M(\Gamma_{1,\alpha}^k)M(\Gamma_\alpha^*), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

*справедливы соотношения:*

$$\mathcal{N}_{2m} = \frac{1}{4m^2} \quad \forall m = 1, 2, \ldots;$$
$$\mathcal{N}_{2s-1} = \frac{1}{(2s-1)\varphi}\operatorname{th}\frac{\varphi}{2s-1} < \frac{1}{(2s-1)^2} \quad \forall s = 1, 2, \ldots,$$

*и* $(2s-1)^2\mathcal{N}_{2s-1}$ *— строго убывающая функция от* $\frac{\varphi}{2s-1}$ *со значениями в интервале* $(0, 1)$, *причем*

$$(2s-1)^2\mathcal{N}_{2s-1} \searrow 0 \ \text{при} \ \frac{\varphi}{2s-1} \nearrow +\infty,$$
$$(2s-1)^2\mathcal{N}_{2s-1} \nearrow 1 \ \text{при} \ \frac{\varphi}{2s-1} \searrow 0.$$

*В частности,* $\mathcal{N}_2 = 1/4$, *а* $\mathcal{N}_1$ *— строго убывающая функция от* $\varphi$ *со значениями в интервале* $(0, 1)$, *причем*

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{\varphi}\operatorname{th}\varphi,$$
$$\mathcal{N}_1 \nearrow 1 \quad \text{при} \quad \varphi \searrow 0,$$
$$\mathcal{N}_1 \searrow 0 \quad \text{при} \quad \varphi \nearrow +\infty.$$

**Теорема 4.** *В обозначениях*

$$\mathcal{N}_{s,m} := \mathcal{N}_{s,m}(\alpha) := M(T_{s,m})M(\Gamma_\alpha^*),$$
$$l_{s,m} := \log\left(\frac{2m}{2s-1} + \sqrt{\left(\frac{2m}{2s-1}\right)^2 - 1}\right)$$

*верно следующее. Если* $m < s$, *то* $\mathcal{N}_{s,m} = \frac{1}{4m^2}$. *Пусть теперь* $m \geq s$. *Если* $\varphi/(2s-1) \leq l_{s,m}$, *то*

$$\mathcal{N}_{s,m} = \frac{1}{(2s-1)\varphi}\operatorname{th}\frac{\varphi}{2s-1}$$

*и* $(2s-1)^2\mathcal{N}_{s,m}$ *— строго убывающая функция от* $\dfrac{\varphi}{2s-1}$ *со значениями в интервале* $(0, 1)$, *причем*

$$(2s-1)^2\mathcal{N}_{s,m} \searrow 0 \quad \text{при} \quad \frac{\varphi}{2s-1} \nearrow +\infty$$

*и*

$$(2s-1)^2\mathcal{N}_{s,m} \nearrow 1 \quad \text{при} \quad \frac{\varphi}{2s-1} \searrow 0.$$

*Если же* $\dfrac{\varphi}{2s-1} \geq l_{s,m}$, *то:*

1) $$0 < 2m\left(\mathcal{N}_{s,m} - \frac{1}{4m^2}\right)\varphi = \frac{2m}{2s-1}\operatorname{th} l_{s,m} - \frac{2s-1}{2m} l_{s,m}$$

*и* $2m\left(\mathcal{N}_{s,m} - \dfrac{1}{4m^2}\right)\varphi$ *— строго растущая функция от* $\dfrac{2m}{2s-1}$ *со значениями в интервале* $(0, +\infty)$, *причем*

$$2m\left(\mathcal{N}_{s,m} - \frac{1}{4m^2}\right)\varphi \searrow 0 \quad \text{при} \quad \frac{2m}{2s-1} \searrow 1;$$

2) $$1 < 4m^2\mathcal{N}_{s,m} \leq \left(\frac{2m}{2s-1}\right)^2 \frac{\operatorname{th} l_{s,m}}{l_{s,m}}$$

*и*

$$4m^2\mathcal{N}_{s,m} \to 1 \quad \text{при} \quad \frac{2m}{2s-1} \searrow 1;$$

3) $$0 < \left(\mathcal{N}_{s,m} - \frac{1}{4m^2}\right)(2s-1)\varphi = \operatorname{th} l_{s,m} - \left(\frac{2s-1}{2m}\right)^2 l_{s,m}$$

*и* $\left(\mathcal{N}_{s,m} - \dfrac{1}{4m^2}\right)(2s-1)\varphi$ *— строго растущая функция от* $\dfrac{2m}{2s-1}$ *со значениями в интервале* $(0, 1)$, *причем*

$$\left(\mathcal{N}_{s,m} - \frac{1}{4m^2}\right)(2s-1)\varphi \nearrow 1 \quad \text{при} \quad \frac{2m}{2s-1} \nearrow +\infty.$$

***Замечание.*** В теоремах 2 – 4 зависимость величин $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{N}_k$, $\mathcal{N}_{s,m}$ от конформной (и метрической) структуры $\Pi_\alpha$ сосредоточена только в параметре $\varphi$ (все остальные параметры зависят лишь от числовых индексов, выбранных на $\Pi_\alpha$ семейств кривых).

Для метрики $\rho \in P(\Pi_\alpha)$ введем следующие обозначения:

$$L_0(\alpha, \rho) := \inf\left\{ \int_{\gamma_0} \rho\, ds \colon \gamma_0 \in \Gamma_{0,\alpha} \right\},$$

$$L_k(\alpha, \rho) := \inf\left\{ \int_{\gamma_k} \rho\, ds \colon \gamma_k \in \Gamma_{1,\alpha}^k \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$L^*(\alpha, \rho) := \inf\left\{ \int_{\gamma^*} \rho\, ds \colon \gamma^* \in \Gamma_\alpha^* \right\}$$

и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ положим

$$\Lambda_n^*(\alpha) := \sup\left\{\frac{L_n(\alpha,\rho)L^*(\alpha,\rho)}{A_\alpha(\rho)} : \rho \in P(\Pi_\alpha)\right\},$$

$$\mathcal{M}_n^*(\alpha) := \frac{1}{\Lambda_n^*(\alpha)}.$$

Легко проверить, что

$$\left(\mathcal{M}_n^*(\alpha)\right)^2 \geq \mathcal{N}_n(\alpha) \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots,$$

а с помощью результатов из [2, 3] и теорем 1 – 3 могут быть установлены следующие утверждения.

**Теорема 5.** $\left(\mathcal{M}_n^*(\alpha)\right)^2 > \mathcal{N}_n(\alpha) \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots.$

**Теорема 6.** $\mathcal{M}_0^*(\alpha) > \sqrt{\mathcal{N}_0(\alpha)} > \frac{1}{2} \quad \forall \alpha \in (0, +\infty),$

$$\inf_\alpha \mathcal{M}_0^*(\alpha) = \inf_\alpha \sqrt{\mathcal{N}_0(\alpha)} = \frac{1}{2}.$$

В работе [4] введены и вычислены величины, аналогичные $\mathcal{M}_0^*(\alpha)$ и $\mathcal{M}_1^*(\alpha)$ (в менее общих предположениях и иных обозначениях), и показано, что первая из них $> 1/2$ для всех $\alpha \in (0, +\infty)$, причем постоянная $1/2$ неулучшаема. Это основной результат работы Блаттера [4]. Теорема 6 является усилением и обобщением этого результата.

Доказательство теорем 2 – 4 опирается на теорему 1, результаты из [2, 3] и следующую ниже лемму, в которой обозначено

$$l(t) := \log\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) \quad \forall t > 1.$$

Ниже $\mathrm{ch}$ и $\mathrm{sh}$ обозначают гиперболические косинус и синус соответственно.

**Лемма.** *Справедливы соотношения*

$$\left(\frac{\mathrm{th}\,t}{t}\right)' < 0 \quad \forall t > 0, \qquad 0 < \frac{\mathrm{th}\,t}{t} < 1 \quad \forall t > 0,$$

$$\frac{\mathrm{th}\,t}{t} \nearrow 1 \quad \textit{при} \quad t \searrow 0,$$

$$\frac{\mathrm{th}\,t}{t} \searrow 0 \quad \textit{при} \quad t \nearrow +\infty;$$

$$\left(t\,\mathrm{th}\,l - \frac{l}{t}\right)' > 0 \quad \forall t > 1,$$

$$t\,\mathrm{th}\,l - \frac{l}{t} \searrow 0 \quad \textit{при} \quad t \searrow 1;$$

$$\left(\frac{t^2\,\mathrm{th}\,l}{l}\right)' > 0 \quad \forall t > 1,$$

$$\frac{t^2\,\mathrm{th}\,l}{l} \searrow 1 \quad \textit{при} \quad t \searrow 1;$$

$$\left(\mathrm{th}\,l - \frac{l}{t^2}\right)' > 0 \quad \forall t > 1, \qquad 0 < \mathrm{th}\,l - \frac{l}{t^2} < 1 \quad \forall t > 1,$$

$$\mathrm{th}\,l - \frac{l}{t^2} \nearrow 1 \quad \textit{при} \quad t \nearrow +\infty.$$

*Доказательство.* Имеем

$$\operatorname{ch} l = \operatorname{ch} \log\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(t + \sqrt{t^2-1}\right) + \left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^{-1}\right) = t,$$

$$l' = \left(\sqrt{t^2-1}\right)^{-1} = (\operatorname{sh} l)^{-1}.$$

При $t > 0$ верны соотношения $(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t > 1 = t'$, а в точке $t = 0$ функции $t$ и $\operatorname{sh} t$ равны. Поэтому $t < \operatorname{sh} t \ \forall t > 0$ и

$$\left(\frac{\operatorname{th} t}{t}\right)' = \frac{t(\operatorname{ch} t)^{-2} - \operatorname{th} t}{t^2} = \frac{2t - \operatorname{sh} 2t}{2t^2 \operatorname{ch}^2 t} < 0 \quad \forall t > 0.$$

Кроме того, имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{th} t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{th}' t}{t'} = \lim_{t \to 0} (\operatorname{ch} t)^{-2} = 1.$$

Значит, $0 < \dfrac{\operatorname{th} t}{t} < 1 \quad \forall t > 0$.

Далее, при $t > 1$ имеем

$$\left(\frac{t^2 \operatorname{th} l}{l}\right)' = \left(\frac{\operatorname{sh} 2l}{2l}\right)' = \left(\frac{d}{d2l}\left(\frac{\operatorname{sh} 2l}{2l}\right)\right)(2l') > 0 \quad \forall t > 1,$$

$$\left(\operatorname{th} l - \frac{l}{t^2}\right)' = l'(\operatorname{ch} l)^{-2} + 2t^{-3} l - t^{-2} l' = l' t^{-2} + 2t^{-3} l - t^{-2} l' =$$

$$= 2t^{-3} l > 0 \quad \forall t > 1,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{th} 1 - \frac{l}{t^2}\right) = 1,$$

а так как $\left(t \operatorname{th} l - \dfrac{l}{t}\right) = t\left(t \operatorname{th} l - \dfrac{l}{t^2}\right)$, то

$$\left(t \operatorname{th} l - \frac{l}{t^2}\right)' > 0 \quad \forall t > 1,$$

$$\lim_{t \searrow 1}\left(t \operatorname{th} l - \frac{l}{t}\right) = 0.$$

Лемма доказана.

Результаты данной работы первоначально опубликованы в виде препринта [5].


1. *Тамразов П. М.* Методы исследования экстремальных метрик и модулей семейств кривых в „скрученном" римановом многообразии // Мат. сб. – 1992. – 183, № 3. – С. 55 – 75.
2. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в скрученных римановых многообразиях // Модули неориентируемых и скрученных римановых многообразий. – Киев, 1997. – С. 3–25. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 97.9).
3. *Тамразов П. М.* Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 10. – С. 1388–1398.
4. *Blatter C.* Zur Riemannschen Geometrie im Grosse auf dem Mobiusband // Compos. math. – 1960. – 15, № 1. – P. 88 – 107.
5. *Охрименко С. А., Тамразов П. М.* Оценки произведений модулей семейств кривых на римановом листе Мебиуса // Модули неориентируемых и скрученных римановых многообразий. – Киев, 1997. – С. 26–40. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 97.9).


Получено 07.07.97