УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. Г. Самойленко, Ю. М. Сидоренко (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ІЄРАРХІЯ РІВНЯНЬ КАДОМЦЕВА – ПЕТВІАШВІЛІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ В'ЯЗЯМИ: БАГАТОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РЕДУКОВАНИХ СИСТЕМ *

The spatially two-dimensional generalization of hierarchy of the Kadomtsev–Petviashvili equations under nonlocal constraints or the so-called 2-dimensional k-constrained KP-hierarchy is given (its abrigded notation is $2\,d\;k$-c-hierarchy). As examples of $(2+1)$-dimensional nonlinear models belonging to the $2d\,k$-c KP-hierarchy, both generalizations of already known systems and new nonlinear systems are presented. A method for constructing exact solutions of equations belonging to the $2d\,k$-c KP-hierarchy is proposed.

Дано просторово-двовимірне узагальнення ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями — так звана 2-dimensional k-constrained KP-hierarchy (скорочено: $2d\,k$-c KP-ієрархія). Наведено приклади $(2+1)$-вимірних нелінійних моделей, що є представниками $2d$ k-c KP-ієрархії; серед яких вказано, зокрема, як узагальнення раніше відомих, так і нові нелінійні системи. Запропоновано метод побудови точних розв'язків для рівнянь з $2d\,k$-c KP-ієрархії.

Вступ. В сучасній теорії нелінійних інтегровних систем математичної та теоретичної фізики значну роль відіграють алгебраїчні конструкції відомої групи японських математиків [1 – 3], які прийнято називати теорією Сато. Ці конструкції є природним узагальненням і подальшим розвиненням піонерських методів і результатів великої групи дослідників, зокрема московської та ленінградської шкіл С. П. Новікова і Л. Д. Фаддєєва, а також В. Є. Захарова, А. Б. Шабата, І. М. Гельфанда, Л. А. Дікого, Ю. І. Маніна, В. М. Дрінфельда, М. Адлера, Б. Костанта, Р. Хіроти, Дж. Вільсона та багатьох інших (детальний огляд див. в [4]). Провідну роль в цих дослідженнях займає теорія так званої τ-функції та теорія ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі, їх узагальнення та застосування [1 – 4].

Добре відомо [1, 4], що ієрархія рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі допускає просторові редукції до $(1+1)$-вимірних інтегровних моделей, так звані k-reduced KP-hierarchy, серед яких міститься багато відомих систем нелінійних рівнянь з частинними похідними. Так, рівняння Кортевега – де Фріза, Буссінеска – Каупа та рівняння нелінійної струни містяться в 2-редукції та 3-редукції ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі відповідно. Інколи k-редукції в ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі називають також редукціями Гельфанда – Дікого та Адлера – Костанта, які першими запропонували ці редукції та досліджували їх формально-алгебраїчні та гамільтонові аспекти відповідно.

Дотримуючись позначень та термінології статті [1], ієрархію рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі можна записати у вигляді нескінченної послідовності операторних рівнянь Сато – Вільсона

$$W_{t_n} = -(W\mathcal{D}^n W^{-1})_- W, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

де

$$W = 1 + \omega_1 \mathcal{D}^{-1} + \omega_2 \mathcal{D}^{-2} + \dots \tag{2}$$

* Виконана при частковій фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень при Міністерстві України у справах науки і технологій.

є мікродиференціальним оператором (МДО) з коефіцієнтами ω_i, $i \geq 1$, що залежать від змінних $t = (t_1, t_2, \ldots)$, $t_1 := x$, і

$$\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{D}\mathcal{D}^{-1} = 1, \tag{3}$$

а диференціальна і інтегральна частини мікродиференціального оператора $W\mathcal{D}^n W^{-1}$ позначаються відповідно $(W\mathcal{D}^n W^{-1})_+$ та $(W\mathcal{D}^n W^{-1})_-$, при цьому

$$(W\mathcal{D}^n W^{-1})_- := W\mathcal{D}^n W^{-1} - (W\mathcal{D}^n W^{-1})_+. \tag{4}$$

При фіксованому значенні числа $n \in N$ кожне з рівнянь (1) рівносильне нескінченній системі нелінійних рівнянь з частинними похідними для коефіцієнтів $\omega_i(t)$ мікродиференціального оператора W вигляду (2). За допомогою мікродиференціального оператора L, що визначається за формулою

$$L := W\mathcal{D}W^{-1} = \mathcal{D} + \mathcal{U}\mathcal{D}^{-1} + \mathcal{U}_2\mathcal{D}^{-2} + \ldots, \tag{5}$$

систему (1) можна подати в формі зображення Лакса вигляду

$$\partial_{t_n} L = [B_n, L], \tag{6}$$

де

$$\partial_{t_n} = \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad B_n = (L^n)_+ = (W\mathcal{D}^n W^{-1})_+ := L_+^n, \quad n \in N. \tag{7}$$

Має місце таке твердження (див., наприклад, [4]).

***Твердження* 1.** *Справедливі такі твердження*:

1°. *Наслідком рівності* (6) *є співвідношення*

$$\partial_{t_m} B_n - \partial_{t_n} B_m + [B_n, B_m] = 0, \quad m, n \in N. \tag{8}$$

2°. *Векторні поля* $\{\partial_{t_n}\}$, *визначені рівністю* (6), *комутують, тобто*

$$\partial_{t_m}(\partial_{t_n} L) = \partial_{t_n}(\partial_{t_m} L).$$

Операторна форма запису системи (8) називається *зображенням Захарова–Шабата* [5] *або рівнянням нульової кривини*[6, 7].

***Зауваження* 1.** Кожне рівняння (6) при фіксованому $n > 1$ еквівалентне нескінченній системі диференціальних рівнянь для нескінченної множини невідомих функцій $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_2, \ldots$, що являють собою диференціальні поліноми від коефіцієнтів $\omega_i(t)$ мікродиференціального оператора W вигляду (2) і залежать від двох незалежних змінних $t_1 \equiv x$ та t_n. З іншого боку, кожне з операторних рівнянь (8) при фіксованих $m, n \in N$ еквівалентне скінченній системі диференціальних рівнянь, кількість яких співпадає з чисельністю невідомих функцій трьох незалежних змінних $t_1 := x, t_m, t_n$, тобто система (8) — замкнена. Ця система є звичайною системою диференціальних рівнянь з частинними похідними.

При $n = 2$, $m = 3$ рівняння (8) рівносильне відомому рівнянню Кадомцева–Петвіашвілі [8] для функції $\mathcal{U}$, при цьому $t_2 = y$, $t_3 = t$ і рівняння має вигляд

$$(4\mathcal{U}_t - \mathcal{U}_{xxx} - 12\mathcal{U}\mathcal{U}_x)_x = 3\mathcal{U}_{yy}. \tag{9}$$

Процедура k-редукції за Гельфандом – Дікім [1, 4] полягає в накладанні на мікродиференціальний оператор W вигляду (2) такої додаткової умови:

$$W\mathcal{D}^k W^{-1} \equiv (W\mathcal{D}^k W^{-1})_+, \tag{10}$$

що рівносильно умові

$$L^k \equiv B_k \text{ або } (L^k)_- \equiv 0. \tag{11}$$

Коректність обмежень (10), (11) полягає в тому, що ці умови зберігаються при еволюції мікродиференціальних операторів W і L внаслідок рівнянь (1) і (6) відповідно. При цьому з (1) і (6) випливає

$$\partial_{t_k} W = \partial_{t_k} L = 0 \tag{12}$$

і рівняння Захарова – Шабата (8) редукується до рівняння Лакса вигляду (при цьому $m = k$)

$$\partial_{t_n} B_k = [B_n, B_k], \tag{13}$$

тобто до інтегровних $(1+1)$-вимірних систем з диференціальними операторами пари Лакса вигляду

$$B_k \equiv (L^k)_+ = L_k, \quad B_n = ((B^k)^{n/k})_+ = (L^n)_+. \tag{14}$$

Дана робота присвячена проблемам просторового узагальнення відомих $(1 + 1)$-вимірних інтегровних систем, що мають певний фізичний зміст, та розробці для таких систем методів побудови широких класів точних розв'язків.

Стаття побудована таким чином. В пункті 1 дається означення ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями (k-c KP-hierarchy), наводяться приклади інтегровних систем, що містяться в k-c KP-ієрархії. Далі показуємо, що наведені тут комутаторні зображення типу Лакса для нелінійних систем в термінах інтегро-диференціальних операторів більш пристосовані для побудови точних розв'язків (див. теорему 4), ніж відомі раніше. В пункті 2 введено поняття просторово-двовимірного узагальнення ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі з нелокальними в'язями ($2d$ k-c KP-hierarchy). Тут наведено приклади $(2+1)$-вимірних нелінійних моделей, що є представниками $2d$ k-c KP-ієрархії. Зокрема, вказані як узагальнення раніше відомих, так і нові нелінійні системи. Запропоновано метод побудови точних розв'язків рівнянь $2d$ k-c KP-ієрархії (теорема 5). На завершення статті коротко обговорюються деякі проблеми, що тісно пов'язані з даною роботою, які, на наш погляд, становлять значний інтерес для спеціалістів у зв'язку з можливими подальшими дослідженнями.

1. Нелокальні редукції в ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі. Як відомо, крім k-редукцій Гельфанда – Дікого (Адлера – Костанта) вигляду (10), (11), для ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі (1), (6), (8) існує інший важливий і більш загальний, ніж (10), (11), тип обмежень для мікродиференціальних операторів W і L, що сумісний з відповідною динамікою, визначеною рівняннями (1) і (6). Це так звані симетрійні редукції, вперше запропоновані в статтях [9, 10], а також їх векторні (багатокомпонентні) узагальнення [11, 12]. Редукована ієрархія рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі при симетрійній k-редукції записується за допомогою формул

$$\partial_{t_n} L = [B_n, L], \tag{15a}$$

$$\partial_{t_n} q_i = B_n(q_i), \tag{15b}$$

$$\partial_{t_n} r_i = -B_n^*(r_i), \tag{15c}$$

де $n \in N$, $i = \overline{1, l}$, а мікродиференціальний оператор L вигляду (5) задовольняє умову

$$L^k = L_+^k + \sum_{i=1}^{l} q_i \mathcal{D}^{-1} r_i. \tag{16}$$

Тут $q_i = q_i(t)$, $r_i = r_i(t)$; B_n^* — диференціальний оператор, формально спряжений (транспонований) до $B_n := (L^n)_+$ вигляду (7). В (16) символом $\mathcal{D}^{-1} r_i$ позначено композицію оператора $\mathcal{D}^{-1}$ вигляду (3) і оператора множення на функцію r_i, тобто

$$\mathcal{D}^{-1} r_i := r_i \mathcal{D}^{-1} + r_{ix} \mathcal{D}^{-2} - r_{ixx} \mathcal{D}^{-3} - \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j r_i^{(j)} \mathcal{D}^{-1-j}, \tag{17}$$

де

$$r_i^{(j)} = \frac{\partial^j r_i}{\partial x^j}, \quad i = \overline{1, l}\ ; \quad j \in N.$$

Справедлива така теорема [12].

Теорема 1. *При фіксованому* $k \in N$ *ієрархія рівнянь Кадомцева–Петвіашвілі вигляду* (15a) *з нелокальними в'язями* (16), (15b, c) *редукується до інтегровної* $(1+1)$*-вимірної ієрархії нелінійних рівнянь, операторне зображення Лакса якої має вигляд*

$$\left[B_k + \sum_{i=1}^{l} q_i \mathcal{D}^{-1} r_i,\ \partial_{t_n} - B_n \right] = 0, \quad n > 1. \tag{18}$$

Зауваження 2. В англомовних виданнях нескінченну послідовність рівнянь (18) прийнято називати k-constrained KP-hierarchy або скорочено k-c KP-ієрархією.

Надалі для скорочення інтегральний доданок в (16) — символ оператора Вольтерра $\hat{V}$ з виродженим ядром $V(x, y)$ вигляду

$$V(x, y) = \sum_{j=1}^{l} q_i(x) r_i(y) := \boldsymbol{q}(x) \boldsymbol{r}(y), \tag{19}$$

будемо позначати за допомогою символу $\boldsymbol{q} \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{r}$, де $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_l)$, $\boldsymbol{r}^T = (r_1, \ldots, r_l)$, T — знак транспонування.

Зауважимо також, що тут не завжди явно вказується залежність функцій $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, ω_i вигляду (2) та $\mathcal{U}_j$ вигляду (5) від еволюційних параметрів $t_2, t_3, \ldots$, хоча така залежність мається на увазі. Це стосується також і коефіцієнтів u_i оператора L^n вигляду

$$L^n := \mathcal{D}^n + u_{n-2}\mathcal{D}^{n-2} + \ldots + u_0 + \\ + u_{-1}\mathcal{D}^{-1} + u_{-2}\mathcal{D}^{-2} + \ldots, \tag{20}$$

де

$$u_i = u_i(t) = u_i(x, t_2, t_3, \ldots), \quad i \le n-2,$$

$$u_{n-2} = n\,\mathcal{U}, \quad u_{n-3} = n\mathcal{U}_2 + \frac{n(n-1)}{2}\mathcal{U}_x, \ \ldots .$$

Згадана вище k-с КР-ієрархія вигляду (18) містить багато як відомих нелінійних $(1+1)$-вимірних інтегровних моделей і їх векторних l-компонентних узагальнень, так і значну кількість принципово нових систем нелінійних рівнянь [9–18]. Як приклад такої ієрархії можна вказати 1-с КР-ієрархію, що є векторним узагальненням відомої ієрархії Абловіца – Каупа – Ньюела – Сігура [19], яка записується у вигляді

$$[\mathcal{D} + q\mathcal{D}^{-1}r, \ \partial_{t_n} - B_n] = 0, \tag{21}$$

де

$$B_n := (\mathcal{D} + q\mathcal{D}^{-1}r)^n_+ .$$

Першим (нетривіальним) представником цієї ієрархії є система рівнянь

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} q &= q_{xx} + 2qrq, \\ \partial_{t_2} r &= -r_{xx} - 2rqr. \end{aligned} \tag{22}$$

В 2-с КР-ієрархії першим представником є векторне узагальнення системи Яджими – Ойкави [19] вигляду

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} q &= q_{xx} + 2\,\mathcal{U}q, \\ \partial_{t_2} \mathcal{U} &= (qr)_x, \\ \partial_{t_2} r &= -r_{xx} - 2\mathcal{U}r, \end{aligned} \tag{23}$$

при цьому $L^2 = \mathcal{D}^2 + u_0 + q\mathcal{D}^{-1}r$, $u_0 = 2\,\mathcal{U}$ (див. (20)).

Серед рівнянь 3-с КР-ієрархії містяться узагальнення систем Мельникова, Дрінфельда – Соколова, Купершмідта та інших [11–16]. Зауважимо також, що всі k-редуковані ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі вигляду (10), (11) містяться в k-с КР-ієрархії вигляду (18), де потрібно покласти $q = r = 0$.

***Зауваження* 3.** Комутаторне зображення Лакса (18) для k-с КР-ієрархії є умовою сумісності (для довільного комплексного параметру λ) лінійних задач вигляду

$$\begin{aligned} (B_k + q\mathcal{D}^{-1}r)(f^{(t)}) &= \lambda^k f(t), \\ \partial_{t_n} f(t) &= B_n(f(t)), \end{aligned} \tag{24}$$

Для вже відомих нелінійних рівнянь, що містяться як часткові випадки в k-с КР-ієрархії, існують і інші можливості їх подання в операторній формі

Лакса (або Захарова – Шабата), що дозволило в багатьох випадках застосувати для їх дослідження формалізм методу оберненої задачі [6, 19 – 25]. Для систем (22), (23) в однокомпонентному випадку ($l = 1$) лаксові пари операторів задаються диференціальними операторами першого порядку з матрицями розмірності $2 \times \times 2$ та 3×3 відповідно. Для системи (22) — векторної версії рівняння Абловіца – Каупа – Ньюела – Сігура — стандартне зображення нульової кривизни записується за допомогою матриць розмірності $(l + 1) \times (l + 1)$ [6, 24].

Взагалі кажучи, для загального випадку можна показати, що комутаторне зображення для k-с КР-ієрархії вигляду (18) рівносильне зображенню нульової кривизни з операторами, записаними за допомогою матриць розмірності $(k + l) \times (k + l)$. Для цього потрібно розширити систему (24), вводячи додаткові польові змінні, наприклад, таким чином:

$$f_i := \frac{\partial^{i-1} f}{\partial x^{i-1}}, \quad f_1 := f, \quad i = \overline{1, k}; \tag{25}$$

$$f_{k+j} := \mathcal{D}^{-1}(r_j f), \quad j = \overline{1, l}; \tag{26}$$

$$f := (f_1, f_2, \dots, f_{k+l})^T.$$

Дія оператора $\mathcal{D}^{-1}$ на функції визначається, виходячи з конкретизації досліджуваних питань для кожного функціонального простору. Так, для випадку простору $L_1(\pm\infty, s)$, елементами якого є функції $F(x)$, що абсолютно інтегровні на проміжку $(-\infty, s)$ або на проміжку $(s, +\infty)$, де $s \in \boldsymbol{R}$ — довільне число, оператор $\mathcal{D}^{-1}$ визначається за допомогою формули

$$\mathcal{D}^{-1}(F) := \int_{\pm\infty}^{x} F(y) dy, \tag{27}$$

а якщо функція $\Phi(x) \in L_1(\boldsymbol{R})$, то оператор $\mathcal{D}^{-1}$ (додатково до рівності (27)) можна визначити ще таким чином:

$$\mathcal{D}^{-1}(\Phi) := \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x} \Phi(y) dy - \int_{x}^{+\infty} \Phi(y) dy \right). \tag{28}$$

Система $k + l$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} f = A f, \tag{29}$$

що отримується з першого (інтегро-диференціального) рівняння в (24) після підстановок (25), (26), має матрицю $A = (A_{ij})$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$, де

$$\begin{gathered} A_{ij} = \delta_{i+1}^{j}, \quad i = \overline{1, k-1}; \\ A_{kj} = \lambda^k \delta_1^j - u_{j-1}, \quad j = \overline{1, k-1}; \\ A_{k(k+j)} = -q_j, \quad A_{(k+j)1} = r_j, \quad j = \overline{1, l}. \end{gathered} \tag{30}$$

Тут δ_i^j — символ Кронекера, а всі незаписані елементи матриці A рівні нулеві.

В розгорнутому вигляді матриця A в системі рівнянь (29) має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda^k - u_0 & -u_1 & -u_2 & \ldots & -u_{k-2} & 0 & -q_1 & \ldots & -q_l \\ r_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ r_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_l & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Коефіцієнти u_j, $j = \overline{0, k-2}$, диференціального оператора

$$B_k = \mathcal{D}^k + \sum_{j=0}^{k-2} u_j \mathcal{D}^j$$

можна записати в вигляді диференціальних поліномів стосовно вихідних коефіцієнтів $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3, \ldots$ мікродиференціального оператора L вигляду (5). Зокрема, старші коефіцієнти оператора B_k мають вигляд

$$u_{k-2} = k\,\mathcal{U}, \quad u_{k-3} = k\mathcal{U}_2 + \frac{k(k-1)}{2}\mathcal{U}_x. \tag{32}$$

Інший метод зведення інтегро-диференціальної спектральної задачі

$$\left(\mathcal{D}^k + \sum_{j=0}^{k-2} u_j \mathcal{D}^j + q\mathcal{D}^{-1} r\right)(f) = \lambda^k f \tag{33}$$

до задачі в диференціальній формі полягає у використанні змінних

$$\varphi := f; \quad \bar{\psi}_x := -r\varphi \quad (\text{тобто } \bar{\psi} := -\mathcal{D}^{-1}(r\varphi)). \tag{34}$$

Тоді задача (33) в нових змінних записується в вигляді системи

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}^k + \sum_{j=0}^{k-2} u_j \mathcal{D}^j + \lambda^k & -q \\ r & I\mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = 0, \tag{35}$$

де матриці мають розмірність $(l+1) \times (1+1)$. Тут I — одинична $(l \times l)$-матриця.

Зауваження 4. Спектральні задачі (29), (31) і (35) не є задачами *загального положення*, оскільки відповідні диференціальні оператори мають сильно редуковану структуру і їм властиво виродження стосовно спектрального параметра $\lambda \in C$. У зв'язку з цим зауважимо, що для дослідження відповідних нелінійних інтегровних систем з k-є KP-ієрархії вигляду (18) (наскільки це відомо авторам) застосування класичного варіанту методу оберненої задачі, що ґрунтується на використанні інтегральних рівнянь Гельфанда – Левітана – Марченка [5, 6], для дослідження систем вигляду (29), (31) і (35) не є можливим (в будь-якому разі — на даний час).

Зауважимо також, що вперше лаксові зображення з диференціальними операторами вигляду (35) і лише для випадку скалярних полів q, r (при цьому $l = 1$) розглядались В. К. Мельниковим в [26, 27], де було запропоновано метод знаходження деяких класів точних розв'язків для відповідних нелінійних диференціальних рівнянь. У зв'язку з цим нелінійні k-c КР-ієрархії можна назвати багатокомпонентними узагальненнями систем Мельникова з іншим, ніж (18), комутаторним зображенням. В роботах [26, 27] також було зроблено висновок про неможливість застосування відомого методу *одягання* (dressing method) Захарова – Шабата [5] до нелінійних рівнянь типу Мельникова. Далі це твердження спростовується, оскільки буде явно побудовано одягаючий оператор Захарова – Шабата для систем рівнянь вказаного типу.

1.1. Точні розв'язки моделей з k-c КР-ієрархії. Після відкриття k-c КР-ієрархії [9 – 13, 17] велика кількість досліджень була присвячена розвитку гамільтонової, теоретико-групової та Лі-алгебраїчної теорій цих рівнянь (див., наприклад, [9 – 18, 28 – 42] та цитовані там роботи). Для побудови точних розв'язків рівнянь, що входять до k-c КР-ієрархії, застосовувались білінійні методи Хіроти [29 – 31, 34], редукції класичної τ-функції для ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі [33], метод ітерацій класичних і бінарних перетворень Дарбу – Беклунда [35, 36, 40, 41] та ін. Нижче для дослідження k-c КР-ієрархії вигляду (18) використовуємо ідеї методу одягання Захарова – Шабата [5]. В подальшому нам знадобляться деякі конструкції та результати роботи [42] (див. пункт 3, теорему 3).

Розглянемо мікродиференціальний оператор $W[f]$ вигляду

$$W[f] = \frac{1}{\mathcal{W}[f]} \begin{pmatrix} f_1^{(0)} & \dots & f_N^{(0)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(N)} & \dots & f_N^{(N)} & \mathcal{D}^N \end{pmatrix}, \tag{36}$$

де за допомогою $\mathcal{W}[f]$ позначено визначник Вронського лінійно-незалежної системи функцій $f_1, \dots, f_N$, що утворюють вектор-рядок $f = (f_1, \dots, f_N)$, а

$$f_k^{(n)} \equiv \frac{\partial^n f_k(x, t_2, \dots)}{\partial x^n}, \quad k = \overline{1, N}, \quad n = N \cup \{0\}.$$

Визначник (36) підраховується шляхом розкладу за елементами останнього стовпця, при цьому оператори $\mathcal{D}^j$, $j = \overline{0, N}$, у відповідних виразах мають знаходитись праворуч від відповідних мінорів.

Очевидно, що $W[f]$ — диференціальний оператор N-го порядку, тобто $\operatorname{Ord} W[f] = N$, при цьому коефіцієнт при $\mathcal{D}^N$ дорівнює 1, а його ядро $\operatorname{Ker} W[f]$ співпадає з лінійною оболонкою $\mathcal{L}(f)$ системи функцій $f_1, \dots, f_N$, тобто $\operatorname{Ker} W[f] = \mathcal{L}(f)$.

Позначимо через $\mathcal{W}_{i,j}$ мінор, що отримується з визначника $\mathcal{W}[f]$ викресленням i-рядка та j-стовпця. Розглянемо мікродиференціальний оператор K вигляду

$$K = \boldsymbol{h}\, \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{f}^{(N)}, \tag{37}$$

де

$$h_j = (-1)^{N+1-j}\, \mathcal{W}_{N,j} (\mathcal{W}[f])^{-1}. \tag{38}$$

Має місце теорема [42].

Теорема 2. *Для мікродиференціального оператора*

$$1 + K = 1 + h\mathcal{D}^{-1}f^{(N)}$$

існує обернений оператор, що записується за допомогою формули

$$(1 + K)^{-1} = 1 + \mathcal{D}^{-1}\omega_N + \ldots + \mathcal{D}^{-N}\omega_1 =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \mathcal{D}^{-i}\omega_{N+1-i} = (-1)^N \mathcal{D}^{-N} W^*[f], \tag{39}$$

де для мінорів операторного визначника $W[f]$ *використано позначення*

$$\omega_k := W_{k,(N+1)}[f], \quad k = \overline{1, N+1}. \tag{40}$$

Теорема 3. *Оператор вигляду*

$$(W[f])^{-1} := W^{-1} = -f\mathcal{D}^{-1}h \tag{41}$$

є оберненим до диференціального оператора $W[f]$.

При цьому оператор (41) *є вольтеррівським оператором (формальним символом) з виродженим ядром.*

Доведення. Використовуючи теорему 2 та формулу (39), можна записати такі рівності:

$$(W[f])^{-1} = ((W^*)^*)^{-1} = [((-1)^N\mathcal{D}^N(1 + K)^{-1})^*]^{-1} =$$

$$= [(1 + K^*)^{-1}(-1)^{2N}\mathcal{D}^N]^{-1} = \mathcal{D}^{-N}(1 - f^{(N)}\mathcal{D}^{-1}h) =$$

$$= \mathcal{D}^{-N} - \mathcal{D}^{-N}f^{(N)}\mathcal{D}^{-1}h. \tag{42}$$

Застосовуючи правило Лейбніца для випадку мікродиференціальних операторів

$$f^{(N)}\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^{-1}f^{(N)} + \mathcal{D}^{-2}f^{(N+1)} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}^{-i}f^{(N+i-1)}, \tag{43}$$

отримуємо

$$\mathcal{D}^{-1}f^{(N)}\mathcal{D}^{-1}h = \mathcal{D}^{-N}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{D}^{-i}f^{(N+i-1)}h = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{D}^{-N-i}f^{(N+i-1)}h =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{D}^{-i}f^{(i-1)}h - \sum_{i=1}^{N}\mathcal{D}^{-i}f^{(i-1)}h. \tag{44}$$

Враховуючи тотожність

$$f^{(m)}h = -\delta_m^{N-1}, \quad m = \overline{0, N-1}, \tag{45}$$

що є наслідком умов (38), де функції h_j, $j = \overline{1, N}$, є розв'язками системи лінійних рівнянь (45), які можна побудувати в явному вигляді, наприклад за допомогою методу Крамера, другий доданок в правій частині співвідношення (44) запишемо таким чином:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{D}^{-i} f^{(i-1)} h = -\mathcal{D}^{-N}, \tag{46}$$

а перший, згідно з рівністю (43), можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}^{-i} f^{(i-1)} h = f \mathcal{D}^{-1} h. \tag{47}$$

Таким чином, теорему 3 доведено.

Нехай тепер $m = N \cup \{0\}$ і $N = l + m$. Позначимо за допомогою f_l і f_m вектор-рядки

$$f_l := (f_1, f_2, \ldots, f_l), \quad f_m := (f_{l+1}, f_{l+2}, \ldots, f_N),$$

де, як і раніше,

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_l, f_{l+1}, f_{l+2}, \ldots, f_N) = (f_l, f_m).$$

Очевидно, що при $m = 0$ маємо рівність $f = f_l$, а при $l = 0$ відповідно справджується співвідношення $f = f_m$.

Дія оператора $W[f]$ на скалярну функцію g визначається за формулою

$$\begin{aligned} W[f](g) &:= \mathcal{W}[f; g] = \\ &= \mathcal{W}(f_1, f_2, \ldots, f_{N,g}) \mathcal{W}^{-1}(f_1, f_2, \ldots, f_N), \end{aligned} \tag{48}$$

а для випадку векторної функції $g = (g_1, \ldots, g_p)$ — виразом

$$W[f](g) := (\mathcal{W}[f; g_1], \ldots, \mathcal{W}[f; g_p]). \tag{49}$$

Нехай $\mathrm{Mat}_{N\times M}(C) \ni M_m$ — довільна стала комплексна $(N \times m)$-матриця, а $\mathrm{Mat}_N(C) \ni M_{(n)}$ — довільна стала квадратна $(N \times N)$-матриця при $n = 2, 3, \ldots$. Тут n — змінний індекс, що відповідає параметру t_n, а N — фіксоване натуральне число, яке з n не пов'язане.

Теорема 4. *Мікродиференціальний оператор* $L = W \mathcal{D} W^{-1}$ *є розв'язком операторної* k-*с* KP-*ієрархії вигляду* (15а) – (15с), (16), *якщо сумісна така система рівнянь*:

$$\begin{aligned} f_m^{(k)} &= f M_m, \\ \partial_{t_n} f &= f^{(n)} + f M_{(n)}. \end{aligned} \tag{50}$$

Доведення. Знайдемо спочатку інтегральну складову частину оператора L^k. З цією метою, враховуючи (41), розглянемо рівності

$$\begin{aligned} (L^k)_- &= (W \mathcal{D}^k W^{-1})_- = [(W \mathcal{D}^k) W^{-1}]_- = \\ &= -[(W \mathcal{D}^k) f \mathcal{D}^{-1} h] = -[(W \mathcal{D}^k f) \mathcal{D}^{-1} h]_- = \\ &= -[(W \mathcal{D}^k)(f)] \mathcal{D}^{-1} h = -W(f^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} h = \\ &= -W(f_l^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} h_l - W(f_m^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} h_m, \end{aligned} \tag{51}$$

де $W := W[f]$, $h_l := (h_1, h_2, \ldots, h_l)$, $h_m := (h_{l+1}, h_{l+2}, \ldots, h_N)$.

На підставі першого рівняння системи (50), визначення (49) і формули (41) маємо $f_m^{(k)} \in \operatorname{Ker} W[f]$. Таким чином, одержуємо

$$(L^k)_- = -W(f_l^{(k)})\mathcal{D}^{-1}h_l := q\,\mathcal{D}^{-1}r, \tag{52}$$

де, згідно з формулами (48) та (38), виконуються рівності

$$q_i = \pm W(f_i^{(k)}) := \pm\mathcal{W}[f; f_i^{(k)}] =$$

$$= \pm\mathcal{W}(f_1, \ldots, f_N, f_i^{(k)})\mathcal{W}^{-1}(f_1, \ldots, f_N), \tag{53}$$

$$r_i = \pm(-1)^{N-i}\mathcal{W}_{Ni}[f]\mathcal{W}^{-1}(f_1, \ldots, f_N). \tag{54}$$

Зауважимо, що коефіцієнти u_j, $j = \overline{0, k-2}$, диференціального оператора B_k, який записується за допомогою формули

$$B_k := (L^k)_+ = (W\mathcal{D}^k W^{-1})_+ = -(W\mathcal{D}^k f\mathcal{D}^{-1}h)_+ :=$$

$$= \mathcal{D}^k + \sum_{j=0}^{k-2} u_j\mathcal{D}^j, \tag{55}$$

є відношенням диференціальних поліномів від функцій $f_1, f_2, \ldots, f_N$, що випливає з явних виразів для коефіцієнтів операторів $W[f]$ вигляду (36) і $W^{-1} = -f\mathcal{D}^{-1}r$ вигляду (38). Явний вигляд функцій u_j, $j = \overline{0, k-2}$, можна знайти для кожного фіксованого значення $k \in N$ згідно з формулою (32), причому ці функції допускають компактну форму зображення в термінах диференціальних поліномів від логарифма τ-функції Сато [2, 4] для рівнянь ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі. Наприклад,

$$\mathcal{U} = (\ln\tau_N)_{xx}, \quad \mathcal{U}_2 = \frac{1}{2}[(\ln\tau_N)_{xt_2} - (\ln\tau_N)_{xxx}], \quad \text{і т. д.}, \tag{56}$$

де

$$\tau_N = \mathcal{W}[f] = \mathcal{W}(f_1, f_2, \ldots, f_N).$$

Покажемо тепер, що оператор $W(\partial_{t_n} - \mathcal{D}^n)W^{-1}$ — чисто диференціальний, тобто, що його інтегральна складова частина дорівнює нулеві. Справді, маємо такі рівності:

$$W(\partial_{t_n} - \mathcal{D}^n)W^{-1} = [W(\partial_{t_n} - \mathcal{D}^n)W^{-1}]_+ + [W(\partial_{t_n} - \mathcal{D}^n)W^{-1}]_- =$$

$$= \partial_{t_n} - (W\mathcal{D}^n W^{-1})_+ + W(W^{-1})_{t_n} - (W\mathcal{D}^n W^{-1})_- =$$

$$= \partial_{t_n} - B_n - W(f_{t_n})\mathcal{D}^{-1}h - W^{-1}(f)\mathcal{D}^{-1}h_{t_n} + W(f^{(n)})\mathcal{D}^{-1}h =$$

$$= \partial_{t_n} - B_n - W(f)\mathcal{D}^{-1}h_{t_n} - W(f_{t_n} - f^{(n)})\mathcal{D}^{-1}h. \tag{57}$$

Третій доданок в правій частині співвідношення (57) дорівнює нулеві згідно з означенням (48), (49), а четвертий — внаслідок другого рівняння системи (50) і формул (48), (49). Таким чином, одержуємо

$$\partial_{t_n} - B_n = W(\partial_{t_n} - \mathcal{D}^n) W^{-1}. \tag{58}$$

Оператор $L = W\mathcal{D}W^{-1}$ задовольняє рівняння

$$\partial_{t_n} L = [B_n, L] \Leftrightarrow [\partial_{t_n} - B_n, L] = 0, \tag{59}$$

що випливає з комутативності операторів $\mathcal{D}$ і $\partial_{t_n} - \mathcal{D}^n$ та формули (16) (див. співвідношення (52)), так як внаслідок рівності (58) маємо

$$[\partial_{t_n} - B_n, L] = [W(\partial_{t_n} - B_n) W^{-1}, W\mathcal{D}W^{-1}] =$$

$$= W[\partial_{t_n} - B_n, L] W^{-1} = 0.$$

Теорему доведено.

Наслідок. *При $m = N$ оператор $W\mathcal{D}W^{-1}$, побудований за системою розв'язків рівнянь* (50), *задовольняє k-редукцію Гельфанда–Дікого вигляду* (10), (11).

Цей результат випливає з рівності (51), оскільки $f^{(k)} = f_m^{(k)} \in \operatorname{Ker} W[f]$ при $m = N$.

2. Двовимірні узагальнення k-с KP-ієрархії. Розглянемо для фіксованих $k, n \in N$ операторне рівняння

$$[\alpha_k \partial_{\tau_k} - (B_k + q\mathcal{D}^{-1}r), \beta_n \partial_{t_n} - A_n] = 0, \tag{60}$$

де

$$B_k = \mathcal{D}^k + \sum_{j=0}^{k-2} u_j \mathcal{D}^j, \quad A_n = \mathcal{D}^n + \sum_{i=0}^{n-2} v_i \mathcal{D}^i,$$

$$u_j = u_j(x, \tau_k, t_n), \quad v_i = v_i(x, \tau_k, t_n), \quad \alpha_k, \beta_n \in C.$$

Рівняння (60) можна записати у вигляді системи таким чином:

$$\beta_n \partial_{t_n} B_k = \alpha_k \partial_{\tau_n} A_n + [A_n, B_k] + ([A_n, q\mathcal{D}^{-1}r])_+, \tag{61}$$

$$\beta_n \partial_{t_n} q = A_n(q), \tag{62}$$

$$\beta_n \partial_{t_n} r = -A_n^*(r), \tag{63}$$

де символом P_+ позначено, як і раніше, диференціальну частину мікродиференціального оператора P, а за допомогою A_n^* позначено оператор, що є формально спряженим до A_n і має такий вигляд:

$$A_n^* = (-1)^n \mathcal{D}^n + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \mathcal{D}^i v_i. \tag{64}$$

Операторне рівняння (61) рівносильне системі $n + k - 2$ диференціальних рівнянь для $(n + k - 2) + 2l$ польових змінних u_j, v_i, q_s, r_s, де $j = \overline{0, k-2}$; $i = \overline{0, n-2}$; $s = \overline{1, l}$, а кожне з векторних рівнянь (62), (63) еквівалентне відповідній системі диференціальних рівнянь, яка в покомпонентній формі запису має вигляд

$$\beta_n \partial_{t_n} q_s = A_n(q_s), \quad s = \overline{1, l}, \tag{62'}$$

$$\beta_n \partial_{t_n} r_s = -A_n^*(r_s), \quad s = \overline{1, l}. \tag{63'}$$

Таким чином, система (61)–(63) для невідомих функцій u_j, v_i, q_s, r_s, де $j = \overline{0, k-2}$; $i = \overline{0, n-2}$; $s = \overline{1, l}$, є замкненою, оскільки кількість її рівнянь співпадає з кількістю невідомих полів, і являє собою звичайну еволюційну (динамічну) систему з частинними похідними, де $R \ni t_n$ — еволюційний параметр, а $R^2 \ni (x, \tau_k)$ — *просторові* змінні.

Означення. *Послідовність операторних рівнянь* (60), *де* $n = 2, 3, \ldots$, *при фіксованому* $k \in N$ *називатимемо просторово двовимірним узагальненням* k-*с* KP-*ієрархії або скорочено* 2d k-*с* KP-*ієрархією* (*похідне від терміну англійською мовою* 2-*dimensional* k-*constrained* KP-*hierarchy*).

На підтвердження змістовності сформульованого означення, дамо деякі приклади систем нелінійних диференціальних рівнянь, що належать до означеної вище ієрархії рівнянь.

1. Нехай $k = 1$, $n = 2$. Тоді операторне рівняння (60) набуває вигляду

$$[\alpha_1 \partial_{\tau_1} - \mathcal{D} + q \mathcal{D}^{-1} r, \beta_2 \partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 - v_0] = 0, \tag{64}$$

причому останнє рівняння можна записати еквівалентним чином у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned} \beta_2 \partial_{t_2} q &= q_{xx} + v_0 q, \\ \beta_2 \partial_{t_2} r &= -r_{xx} - v_0 r, \\ \alpha_1 \partial_{\tau_1} v_0 &= v_{0x} - 2(qr)_x. \end{aligned} \tag{65}$$

Розглянемо нові змінні

$$z_1 := x + \alpha_1^{-1} \tau_1, \quad z_2 := x - \alpha_1^{-1} \tau_1 \tag{66}$$

та відповідні їм оператори диференціювання стосовно цих змінних, що записуються таким чином:

$$\partial_{z_1} = \frac{1}{2}(\partial_x + \alpha_1 \partial_{\tau_1}), \quad \partial_{z_2} = \frac{1}{2}(\partial_x - \alpha_1 \partial_{\tau_1}).$$

При цьому, очевидно, $\partial_x = \partial_{z_1} + \partial_{z_2}$, $\alpha_1 \partial_{\tau_1} = \partial_{z_1} - \partial_{z_2}$.

Нехай $\beta_2 = i\beta \in iR$. Накладемо в'язі $r = \mu \bar{q}^T$, де $R \ni \mu$ — деяка стала зв'язку. Тоді систему диференціальних рівнянь (65) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} i\beta \partial_{t_2} q &= (\partial_{z_1} + \partial_{z_2})^2 q + \mu |q|^2 q + Sq; \\ \partial_{z_2} S &= \mu \partial_{z_1} |q|^2, \end{aligned} \tag{67}$$

де

$$S = v_0 - \mu |q|^2, \quad |q|^2 := q\bar{q}^T = \sum_{i=1}^{l} q_i \bar{q}_i = \sum_{i=1}^{l} |q_i|^2.$$

Систему (67) при $l = 1$ іноді називають третьою моделлю Деві – Стюардсона (DS-III) [43 – 45]. Стосовно моделей DS-I і DS-II дивись, наприклад, також [45 – 53].

З (67) при $\alpha_1 = 0$, $l = 1$ можна отримати нелінійне рівняння Шредінгера, у зв'язку з чим система рівнянь (65) називається *просторово двовимірним l-компонентним узагальненням рівняння Шредінгера.*

2. Нехай $k = 1$, $n = 3$. Тоді операторне рівняння (60) набуває вигляду

$$[\alpha_1 \partial_{\tau_1} - \mathcal{D} - q\mathcal{D}^{-1}r, \beta_3 \partial_{t_3} - v_1 \mathcal{D} - v_0] = 0, \tag{68}$$

при цьому останнє рівняння можна записати еквівалентним чином у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned} \beta_3 \partial_{t_3} q &= q_{xxx} + v_1 q_x + v_0 q, \\ \beta_3 \partial_{t_3} r &= r_{xxx} + (v_1 r)_x - v_0 r, \\ \alpha_1 \partial_{\tau_1} v_0 &= v_{0x} - 3(q_x r)_x, \\ \alpha_1 \partial_{\tau_1} v_1 &= v_{1x} - 3(qr)_x. \end{aligned} \tag{69}$$

Нехай $\beta_3 := \beta \in R$. Накладемо в'язі $r = \mu \bar{q}^T$, де $R \ni \mu$ — деяка константа зв'язку. Тоді система (69) в змінних (66) записується таким чином:

$$\begin{aligned} \beta \partial_{t_3} q &= q_{xxx} + \frac{3\mu}{2}|q|^2 q_x + \frac{3\mu}{2}(q_x \bar{q}^T)q + \frac{3}{2}Sq_x + \frac{3}{2}Pq, \\ \partial_{z_2} S &= \mu \partial_{z_1} |\bar{q}|^2, \\ \partial_{z_2} P &= \mu \partial_{z_1} (q_x \bar{q}^T), \end{aligned} \tag{70}$$

де

$$S = \frac{2}{3}v_1 - \mu |q|^2, \quad P = \frac{2}{3}v_0 - \mu(q_x \bar{q}^T),$$

і для скорочення запису використано позначення з (66) вигляду

$$\frac{\partial^i q}{\partial x^i} = (\partial_{z_1} + \partial_{z_2})^i q.$$

Системи диференціальних рівнянь (69), (70) є вищими симетріями систем (65) та (67) відповідно. Система (70) є новою (векторною) версією просторового двовимірного модифікованого рівняння Кортевега – де Фріза, що в скалярному випадку (при $l = 1$) відмінна від запропонованих раніше [54 – 56].

2. Нехай $k = 2$, $n = 2$. Тоді операторне рівняння (60) набуває вигляду

$$[\alpha_2 \partial_{\tau_2} - \mathcal{D}^2 - u_0 - q\mathcal{D}^{-1}r, \beta_2 \partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 - v_0] = 0,$$

причому останнє рівняння можна записати еквівалентним чином у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned} \beta_2 \partial_{t_2} u &= \alpha_2 u_{\tau_2} + 2(qr)_x, \\ \beta_2 \partial_{t_2} r &= q_{xx} + (u + c)q, \end{aligned} \tag{71}$$

$$\beta_2 \partial_{t_2} r = -r_{xx} - (u+c)r,$$

де $u := u_0$, $v_0 = u + c$, $c \in C$.

Нехай $\alpha_2 := i\alpha \in iR$, $\beta_2 := i\beta \in iR$. Накладемо в'язі $r = i\mu \bar{q}^T$, де $R \ni \ni \mu$ — деяка стала зв'язку, і нехай $c \in R$, $u = \bar{u}$. Тоді система (71) редукується до системи рівнянь

$$\begin{aligned} \beta \partial_{t_2} u &= \alpha u_{\tau_2} + 2\mu |q|_x^2, \\ i\beta \partial_{t_2} q &= q_{xx} + (u+c)q. \end{aligned} \tag{72}$$

Система (72) використовується в фізиці плазми для опису взаємодії навколозвукових ленгмюровських хвиль і є l-компонентним просторово двовимірним узагальненням рівнянь Ядзими – Ойкави [57, 58]. Скалярну версію систем рівнянь (71), (72) (при $l = 1$) було отримано в роботах [26, 27], а дещо пізніше їх було перевідкрито в [59]. Зазначимо, що в [60] проведено аналіз Пенлеве системи (71) для випадку $l = 1$. Зауважимо також, що частковий випадок системи рівнянь (65), що відповідає значенню $l = 2$, отримано в [61], де також записано її лаксову пару операторів, відмінну від запропонованої в даній статті. Цей випадок також тісно пов'язаний з рівнянням Л. П. Нижника [62, 63] (див. також [61]).

Інші цікаві приклади систем нелінійних рівнянь, що належать до $2d$ k-с KP-ієрархії, можна отримати при $k = 2$, $n = 3$; $k = 3$, $n = 2$ і $k = 3$, $n = 3$, які за браком місця в даній статті не виписуємо явно.

2.1. Точні розв'язки рівнянь, що належать $2d$ k-с KP-ієрархії. Нехай

$$f = f(x, \tau_k, t_2, t_3, \dots) := (f_l, f_m)$$

є спільним (сумісним) розв'язком послідовності лінійних диференціальних рівнянь (див. також (50)) вигляду

$$\begin{aligned} \alpha_k \partial_{\tau_k} f_m &= f_m^{(k)} + f M_m, \\ \beta_n \partial_{t_n} f &= f^n + f M_{(n)}, \end{aligned} \tag{73}$$

де $n = 2, 3, \dots$; k — деяке фіксоване натуральне число, а $W := W[f]$ — диференціальний оператор, що визначений згідно з формулою (36).

Має місце така теорема.

Теорема 5. *Оператори*

$$L_k := W(\alpha_k \partial_{\tau_k} - \mathcal{D}^k) W^{-1}, \tag{74}$$

$$L_n := W(\beta_n \partial_{t_n} - \mathcal{D}^n) W^{-1} \tag{75}$$

задовольняють рівняння (60).

Доведення. Оскільки диференціальні оператори (74), (75) комутують, тобто

$$[L_k, L_n] = W[\alpha_k \partial_{\tau_k} - \mathcal{D}^k, \beta_n \partial_{t_n} - \mathcal{D}^n] W^{-1} = 0,$$

то достатньо показати, що оператори L_k і L_n мають такий вигляд:

$$L_k = \alpha_k \partial_{\tau_k} - (B_k + q \mathcal{D}^{-1} r), \tag{76}$$

$$L_n = \beta_n \partial_{t_n} - A_n. \tag{77}$$

Доведемо спочатку рівність (76). Використовуючи формулу (74), можна записати співвідношення

$$L_k = W[\alpha_k \partial_{\tau_k} - \mathcal{D}^k] W^{-1} =$$

$$= \alpha_k \partial_{\tau_k} + \alpha_k W(W^{-1})_{\tau_k} - W\mathcal{D}^k W^{-1}. \tag{78}$$

Нескладно показати, що оператор $W(W^{-1})_{\tau_k}$ — чисто інтегральний оператор. Це випливає з порівняння порядків відповідних операторів, а саме з таких співвідношень:

$\operatorname{Ord} W = N$, тому що $W = \mathcal{D}^N + \ldots$ внаслідок формули (36);

$\operatorname{Ord} W^{-1} = -N$, тому що $W^{-1} = \mathcal{D}^{-N} + \ldots$ за теоремою 3 і формулою (45);

$\operatorname{Ord}(W^{-1})_{\tau_k} \le -N-1.$

Тому можна записати рівність $L_k = (L_k)_+ + (L_k)_-$, де з урахуванням формул (41) і (73) виконуються рівності

$$(L_k)_+ = \alpha_k \partial_{\tau_k} - (W\mathcal{D}^k W^{-1})_+ := \alpha_k \partial_{\tau_k} - B_k,$$

$$(L_k)_- = \alpha_k W(W^{-1})_{\tau_k} - (W\mathcal{D}^k W^{-1})_- =$$

$$= -\alpha_k W f_{\tau_k} \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h} - \alpha_k W f \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h}_{\tau_k} + W\mathcal{D}^k f \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h} =$$

$$= -\alpha_k W(f_{\tau_k}) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h} - \alpha_k W(f) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h}_{\tau_k} + W(f^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h} =$$

$$= -W(\alpha_k \partial_{\tau_k} f - f^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h} =$$

$$= -W(\alpha_k \partial_{\tau_k} f_m - f_m^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h}_m - W(\alpha_k \partial_{\tau_k} f_l - f_l^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h}_l =$$

$$= -W(\alpha_k \partial_{\tau_k} f_l - f_l^{(k)}) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h}_l := \boldsymbol{q} \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{r}, \tag{79}$$

або в по-компонентному вигляді (див. (53), (54)):

$$q_i = \pm \mathcal{W}(f_1, \ldots, f_N, (\alpha_k \partial_{\tau_k} f_i - f_i^{(k)})) \mathcal{W}^{-1}(f_1, \ldots, f_N), \tag{80}$$

$$r_i = \pm (-1)^{N-i} \mathcal{W}_{Ni}[f] \mathcal{W}^{-1}(f_1, \ldots, f_N). \tag{81}$$

За допомогою безпосередніх обчислень неважко переконатись, що для довільних *диференціальних* операторів $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ справедливі такі тотожності:

$$\mathcal{A}_1 f \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h} = (\mathcal{A}_1 f \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h})_+ + \mathcal{A}_1(f) \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h}, \tag{82}$$

$$f \mathcal{D}^{-1} \mathcal{A}_2 \boldsymbol{h} = (f \mathcal{D}^{-1} \mathcal{A}_2 \boldsymbol{h})_+ + f \mathcal{D}^{-1} \mathcal{A}_2(\boldsymbol{h}), \tag{83}$$

$$f \mathcal{D}^{-1} \boldsymbol{h} \mathcal{A}_3 = (f \mathcal{D}^{-1} \mathcal{A}_3^* \boldsymbol{h})_+ + f \mathcal{D}^{-1} \mathcal{A}_3^*(\boldsymbol{h}). \tag{84}$$

При перетвореннях в формулах (79) використано формулу (82). Рівність (84) використана неявно при переході від операторних рівнянь k-c КР- і $2d$ k-c КР-ієрархій до відповідних систем нелінійних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів мікродиференціального оператора $B_k + .q\,\mathcal{D}^{-1} r$.

Рівність (77) доводиться аналогічно викладеному вище в пункті 1 доведенню теореми 4.

Таким чином, теорему 5 доведено.

Заключні зауваження. Одним із основних результатів цієї роботи є узагальнення нелокально редукованої ієрархії рівнянь Кадомцева – Петвіашвілі для просторово двовимірного випадку. Нова ієрархія $(2+1)$-вимірних нелінійних інтегровних систем, яку назвали $2d$ k-c КР-ієрархією, містить в собі як узагальнення добре відомих раніше нелінійних систем, так і суттєво нові нелінійні системи рівнянь. При додаткових (локальних) редукціях типу ермітового спряження (див., наприклад, формули (67), (70), (72)) ці системи мають досить прозорий фізичний зміст, оскільки можуть використовуватись для моделювання нелінійної взаємодії довгих хвиль (з профілями u_j, $j = \overline{0, k-2}$) з пакетами коротких хвиль ($|q_i|$, $i = \overline{1, l}$) в площині $R^2 \ni (x, \tau_k)$. Можна також показати, що після деякої модифікації теоретико-групова схема двумеризації нелінійних рівнянь нелінійних рівнянь типу Кортевега – де Фріза [64] може бути застосована і для рівнянь, що входять до $2d$ k-c КР-ієрархії. Таким способом можна, зокрема, отримати їх гамільтонову інтерпретацію. Це питання планується висвітлити в окремій статті.

Одна з основних відкритих проблем, що тісно пов'язана з даною статтею, полягає в наступному. Теореми 4, 5 встановлюють в явному вигляді зв'язок між розв'язками систем лінійних диференціальних рівнянь та розв'язками нелінійних рівнянь, що входять до k-c та $2d$ k-c КР-ієрархій відповідно. Але відповідь на питання про те, чи можливо проведення в цих класах розв'язків додаткових комплексних редукцій вигляду $r = \mu q^T$, є далеко не очевидною навіть в найпростішому випадку при $l = 1$. На даний час ця проблема не розв'язана у загальному випадку навіть для c КР-ієрархії, не зважаючи на численні дослідження в цьому напрямку в останні десять років (далеко неповний список публікацій наведено нижче). Наша гіпотеза полягає в наступному: замість *одягаючого* оператора W вигляду (36) потрібно використовувати оператор Вольтерра з виродженим ядром загального положення, як це було реалізовано при побудові бінарної τ-функції в [42]. В даний час ця ідея активно авторами опрацьовується.

Нарешті, останнє зауваження. Як зазначалось вище, деякі системи рівнянь, що входять до c КР- та $2d$ k-c КР-ієрархії, серед яких, наприклад, містяться системи, що становлять певний інтерес для їх застосувань в різних розділах фізики, мають одночасно декілька комутаторних зображень Лакса [26, 27, 59, 61], серед яких є такі, для яких, як зазначалось ще в [5, 26, 27], неможливо записати рівняння Гельфанда – Марченка – Левітана. Сподіваємось, що продемонстрована в даній статті можливість застосування методу одягання Захарова – Шабата [5] для рівнянь $2d$ k-c КР-ієрархій у формі (60) стимулюватиме інтерес спеціалістів в галузі нелінійних динамічних систем до постановки та дослідження обернених задач для лінійних нестаціонарних інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$\Phi_t = \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} + \sum_{j=0}^{k-2} u_j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \right) \Phi + (\hat{K}\Phi)(x, t),$$

де $\hat{K}$ — інтегральний оператор Вольтерра з виродженим ядром вигляду

$$K(x, y; t) = \sum_{i=1}^{l} q_i(x;t)\, r_i(y;t),$$

що діє згідно з формулою

$$(\hat{K}\Phi)(x,t) = \int_{\pm\infty}^{x} K(x,y;t)\,\Phi(y,t)\,dy.$$

1. *Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T.* Nonlinear integrable systems: classical theory and quantum theory / Ed. M. Jimbo and T. Miwa. – Singapore: World Scien., 1983. – P. 39–119.
2. *Ohta Y., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T.* An elementary introduction to Sato theory // Progress Theoret. Phys. Suppl. – 1988. – **94**. – P. 210–241.
3. *Сато М., Дзимбо М., Мива М.* Голономные квантовые поля. – М.: Мир, 1983. – 304 с.
4. *Dickey L. A.* Soliton equations and Hamiltonian systems // Adv. Ser. in Math. Phys. – 1991. – **12**. – 310 p.
5. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 43–53.
6. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
8. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. – 1970. – **192**, № 4. – С. 753–756.
9. *Sidorenko Yu., Strampp W.* Symmetry constraints of the KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1991. – **7**. – P. L37–L43.
10. *Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strampp W.* (1 + 1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2 + 1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – **157**. – P. 17–21.
11. *Sidorenko Yu.* KP-hierarchy and (1 + 1)-dimensional multicomponent integrable systems // Укр. мат. журн. – 1993. – **25**, № 1. – С. 91–104.
12. *Sidorenko Yu., Strampp W.* Multicomponents integrable reductions in Kadomtsev–Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – **34**, № 4. – P. 1429–1446.
13. *Oevel W., Sidorenko Yu., Strampp W.* Hamiltonian structures of the Melnicov system and its Reductions / Inverse Problems. – 1993. – **9**. – P. 737–747.
14. *Самойленко В. Г.* Дифференциально-геометрическая структура и спектральные свойства нелинейных вполне интегрируемых динамических систем типа Мельникова // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 655–659.
15. *Oevel W., Strampp W.* Constrained KP-hierarchy and bi-Hamiltonian structures // Communs Math. Phys. – 1993. – **157**. – P. 51–81.
16. *Konopelchenko B., Strampp W.* New reductions of the Kadomtsev–Petviashvili and two-dimensional Toda hierarchies via symmetry constraints // J. Math. Phys. – 1992. – **33**, № 11. – P. 3676–3684.
17. *Cheng Yi, Li Yi-shen.* Constraints of the (2 + 1)-dimensional integrable soliton systems // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – **25**. – P. 419–431.
18. *Kundu A., Strampp W., Oevel W.* Gauge transformations of constrained KP flows: new integrable hierarchies // J. Math. Phys. – 1995. – **36**, № 6. – P. 2972–2984.
19. *Солитоны* / Под. ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
20. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: Спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
21. *Самойленко А. М., Прикарпатский А. К., Тимчишин О. Я.* Геометричний аналіз Пуанкаре–Мельникова трансверсального розщеплення сепаратрисних многовидів повільно збурених нелінійних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1668–1682.
22. *Самойленко В. Г.* Интегрируемость нелинейных динамических систем и дифференциально-геометрические структуры // Там же. – 1993. – **45**, № 2. – С. 419–427.
23. *Andrushkiw R. I., Prykarpatskiy A. K., Samoilenko V. Hr., Mytropolskiy Yu. A., Prytula N. N.* Algebraic structure of the gradient-holonomic algorithm for Lax integrable nonlinear dynamical systems. I // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 4. – P. 1763–1777.

24. Andrushkiw R. I., Prykarpatskiy A. K., Samoilenko V. Hr. Algebraic structure of the gradient-holonomic algorithm for Lax integrable nonlinear dynamical systems. II The reduction via Dirac and canonical quantization procedure // Ibid. – 1994. – **35**, № 8. – P. 4088–4115.
25. Манаков С. В. Замечание об интегрируемости уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функцион. анализ. – 1976. – **10**, № 4. – С. 93–94.
26. Мельников В. К. Некоторые новые нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи // Мат. сб. – 1983. – **121**, № 4. – С. 469–498.
27. *Mel'nikov V. K.* On equations integrable by the inverse scaterring method. – Dubna, 1985. – P. 28. – (Preprint / Joint Institute for Nuclear Research; P2-85-958).
28. *Bing Xu.* A unified approach to recursion operators of the reduced $(1+1)$-dimensional systems. – Hefei, 1992. – (Prerprint / Univ.).
29. *Cheng Yi, Strampp W., Zhang Y. J.* Bilinear Bäcklund transformation for the KP- and k-constrained KP-hierarchy // Phys. Lett. A. – 1993. – **182**. – P. 71–76.
30. *Cheng Yi, Zhang Y. J.* Bilinear equations for the constrained KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1994. – **10**. – P. L11–L17.
31. *Cheng Yi, Zhang Y. J.* Solutions for the vector k-constrained KP-hierarchy // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 11. – P. 5869–5884.
32. *Chen Dengyan, Zhu Ningcheng, Zhu Min.* The potential constraints of the Kadomtsev–Petviashvili system and the corresponding Hamiltonian equations // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 9. – P. 4725-4738.
33. *Oevel W., Strampp W.* Wronckian solutions of the constrained KP-hierarchy // Ibid. – 1996. – **37**, № 12. – P. 6213–6219.
34. *Loris I., Willox R.* Bilinear form and solutions of the k-constrained KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1997. – **13**. – P. L411–L420.
35. *Loris I., Willox R.* On the solutions of c KP-equations: Grammians // J. Math. Phys. – 1997. – **38**, № 10. – P. 5190–5197.
36. *Chau L. L., Shaw J. C.* Solving the c KP-hierarchy by gauge transformations // Ibid. – 1997. – 38, № 8. – P. 4128–4136.
37. *Shaw J. C., Tu M. H.* Miura and auto-Bäcklund transformations for the c KP- and cm KP-hierarchy // Ibid. – 1997. – **38**, № 11. – P. 5756–5772.
38. *Aratyn H., Ferreira L. A., Gomes J. F., Zimerman A. H.* Constrained KP-models as integrable matrix hierarchies // Ibid. – 1997. – **38**, № 3. – P. 1559–1568.
39. *Aratyn H., Nissimov E., Pacheva S.* Virasoro symmetry of constrained KP-hierarchy // Phys. Lett. A. – 1997. – **228**. – P. 164–175.
40. *Oevel W., Schief W.* Darboux theorems and the KP-hierarchy // Applications of Analisys and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations. Ed. P. A. Clarkson. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – P. 193–206.
41. *Nimmo J. J.* Darboux transformations from reductions of the KP-hierarchy // Nonlinear Evolution Equations & Dynamical Systems. Ed. V. G. Makhankov, A. R. Bishop, D. D. Holm. – Singapore: World Scien., 1995. – P. 168-177.
42. *Сидоренко Ю. М.* Про узагальнення τ-функції для ієрархії Кадомцева–Петвіашвілі // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Мат. і мех. – 1998. – С. 40–49.
43. *Davey A., Stewartson K.* On three dimensional pachets of surface wave // Proc. Royal Soc. London A. – 1974. – **338**. – P. 101–110.
44. *Zakharov V. E.* Integrable systems in multi-dimensional spaces // Lect. Notes. Phys. – 1983. – **153**. – P. 190–216.
45. *Fokas A. S.* On the simplest integrable equation in 2 + 1 // Inverse Problems. – 1994. – **10**. – P. L19–L22.
46. *Кулиш П. П., Липовский В. Д.* О гамильтоновой интерпретации метода обратной задачи для уравнения Дэви–Стюардсона // Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР. – 1987. – **161**. – С. 54–71.
47. *Nimmo J. J. C.* Darboux transformations for a two-dimensional Zakharov-Shabat / AKNS spectral Problem // Inverse Problems. – 1992. – **8**. – P. 219–243.
48. *Klarkson P. A., Hood S.* New symmetry reductions and exact solutions of the Davey–Stewartson system. I. Reductions to ordinary differential equations // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 1. – P. 255–282.
49. *Shivamoggi B. K., Rollins D. K.* The Painlevé formulations and exact solutions of the nonlinear evolution equations for modulated gravity wave traines // Ibid. – 1994. – **35**, № 9. – P. 4779–4798.
50. *Kates R. E., Kaup D. J.* Two-dimensional nonlinear Schrödinger equations and their properties // Phys. D. – 1994. – **75**. – P. 458–470.

51. Chakravarty S., Kent S. L., Newman E. T. Some reductions of the self-dual Yang-Mills equations to integrable systems in 2 + 1 dimensions // J. Math. Phys. – 1994. – **35**, № 1. – P. 255–282.
52. *Mikhailov A. V., Yamilov R. I.* On integrable two-dimensional generalization of nonlinear Schrödinger type equations // Phys. Lett. A. – 1997. – **230**. – P. 295–300.
53. *Самойленко В. Г., Сидоренко Ю. М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 252–264.
54. *Починайко М. Д.* Высшее пространственно-двумерное нелинейное уравнение Шредингера // Спектральная теория дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 103–106.
55. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
56. *Imai K., Nozaki K.* Darboux covariant (2 + 1)-dimensional soliton equations associated with a $\overline{\mathrm{su}}(2)$ linear system // Phys. D. – 1994. – **75**. – P. 451–457.
57. *Захаров В. Е.* Коллапс ленгмюровских волн // Журн. эксперимент. и теор. физики. – 1972. – **62**, № 5. – С. 1745–1759.
58. *Yajima N., Oikawa M.* Formation and interaction of Sonic–Langmur solitons: inverse scaterring method // Progress Theor. Phys. – 1976. – **56**, № 6. – P. 1719–1739.
59. *Maccari A.* The Kadomtsev–Petviashvili equation as a source of integrable model equations // J. Math. Phys. – 1996. – **37**, № 12. – P. 6207–6212.
60. *Porsezian K.* Painlevé analisys of new higher-dimensional soliton equation // Ibid. – 1997. – **38**, № 9. – P. 4675–4679.
61. *Maccari A.* Universal and integrable nonlinear evolution systems of equation in (2 + 1)-dimensional // Ibid. – 1997. – **38**, № 8. – P. 4151–4164.
62. *Нижник Л. П.* Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 2. – С. 332–335.
63. *Нижник Л. П.* Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 4. – С. 228.
64. *Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шанский М. А.* Гамильтонова структура уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили // Диференц. геометрия, группы Ли и механика: Зап. научн. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1984. – **133**. – С. 212–226.

Одержано 23.07.98