УДК 512.8

А. П. Стахов (Винниц. аграр. ун-т)

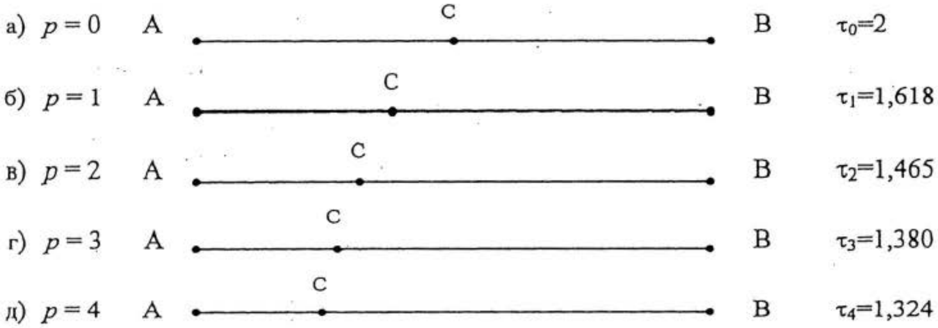
ОБОБЩЕННЫЕ ЗОЛОТЫЕ СЕЧЕНИЯ И НОВЫЙ ПОДХОД К ГЕОМЕТРИЧЕСКОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧИСЛА

We consider applications of the generalized golden sections to the geometric definition of a number and obtain new properties of natural numbers following from this approach.

Розглянуто застосування узагальнених золотих перерізів до геометричного визначення числа і отримано нові властивості натуральних чисел, що випливають із такого підходу.

1. Золотое p-сечение. Пришедшая к нам из „Начал Евклида" задача о „*делении отрезка в крайнем и среднем отношении*", названная позже задачей о „*золотом сечении*", допускает следующее обобщение [1, 2]. Зададим целое неотрицательное число p, $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$, и разделим отрезок AB точкой C в таком отношении (см. рисунок), чтобы

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p. \tag{1}$$



Золотые p-сечения

Обозначим отношение $AB : CB = x$; тогда $CB : AC = x^p$. С другой стороны, $AB = AC + CB$, откуда следует уравнение для нахождения искомого отношения

$$x^{p+1} = x^p + 1. \tag{2}$$

Обозначим через τ_p положительный корень алгебраического уравнения (2).

Уравнение (2) задает бесконечное число пропорциональных делений отрезка AB в отношении (1), так как каждому p соответствует свой вариант деления. Рассмотрим частные случаи отношения (1), соответствующие различным значениям p. При $p = 0$ $\tau_p = 2$, а деление отрезка в отношении (1) сводится к классической дихотомии (рисунок, *а*). При $p = 1$

$$\tau_p = \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(„золотая пропорция"), а деление отрезка в отношении (1) совпадает с классическим „золотым сечением" (рисунок, б). На этом основании деление отрезка в отношении (1) было названо *обобщенным золотым сечением* или *золотым p-сечением*, а числа τ_p, являющиеся положительными корнями уравнения (2), были названы *обобщенными золотыми пропорциями* или *золотыми p-пропорциями* [1].

Из уравнения (2) непосредственно следует тождество, связывающее степени золотых p-пропорций:

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} = \tau_p \times \tau_p^{n-1}. \tag{3}$$

Золотые p-пропорции τ_p можно получить также и из других соображений [1, 2]. Для этого рассмотрим „треугольник Паскаля", представленный в виде

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Заметим, что биномиальный коэффициент C_n^k находится на пересечении n-го, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, столбца и k-й, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, строки треугольника Паскаля.

Известно следующее тождество, связывающее биномиальные коэффициенты с двоичными числами:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

Сдвинем теперь каждую строку треугольника Паскаля на один столбец вправо относительно предыдущей строки и рассмотрим следующий *„деформированный" треугольник Паскаля*:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				1	3	6	10	15	21	28	36
						1	4	10	20	35	56
								1	5	15	35
										1	6
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты „деформированного" треугольника Паскаля по столбцам, то получим *ряд Фибоначчи*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., причем сумма биномиальных коэффициентов n-го столбца „деформированного" треугольника Паскаля будет равна $(n+1)$-му числу Фибоначчи F_{n+1} $(F_{n+1} = F_n + F_{n-1};\ F_1 = F_2 = 1)$. Если сдвинуть каждую строку исходного треугольника Паскаля на p, $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$, столбцов вправо относительно предыдущей строки, то получим таблицу биномиальных коэффициентов (новый „деформированный" треугольник Паскаля), которая в результате сложения по столбцам дает *обобщенные числа Фибоначчи* или *p-числа Фибоначчи* [1, 2], выражаемые с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad \text{для} \quad n > p+1, \tag{4}$$

$$F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p+1) = 1. \tag{5}$$

Доказано [1, 2], что отношение соседних p-чисел Фибоначчи $F_p(n)/F_p(n-$

$-1)$ при $n \to \infty$ стремится к золотой p-пропорции τ_p. Это означает, что числа τ_p выражают некоторые глубокие математические свойства треугольника Паскаля.

Цель настоящей статьи — изложить новый подход к геометрическому определению „действительного числа", основанного на золотых p-пропорциях.

2. Новый подход к геометрическому определению числа. ***Евклидово определение натурального числа.*** В основе классической теории чисел лежит следующее определение натурального числа, основанное на геометрическом подходе и изложенное в „Началах Евклида".

Пусть

$$S = \{1, 1, 1, \ldots\} \tag{6}$$

— бесконечное множество геометрических отрезков, называемых „*монадами*" или *единицами*. Тогда согласно Евклиду натуральное число N определяется следующим образом:

$$N = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \quad (N \text{ раз}). \tag{7}$$

Несмотря на предельную простоту такое определение сыграло огромную роль в развитии теории чисел и лежит в основе многих математических понятий, в частности понятий *простого* и *составного* числа, *умножения, деления,* а также понятий *делимости* и *сравнения,* которые являются одними из основных в элементарной теории чисел, т. е. определение (7) „порождает" как натуральные числа, так и всю проблематику их теории.

Конструктивный подход к определению числа. Известен также „конструктивный подход" к определению числа, согласно которому любое „конструктивное" действительное число A является некоторым математическим объектом, задаваемым с помощью формулы

$$A = \sum_i a_i 2^i, \tag{8}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Определение числа, задаваемое формулой (8), имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть

$$B = \{2^n\} \tag{9}$$

— множество геометрических отрезков длины 2^n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Тогда „конструктивными" действительными числами называются все математические объекты, которые можно представить в виде конечной суммы геометрических отрезков из (9) в виде (8).

Ясно, что определение (8) выделяет из множества действительных чисел некоторую часть чисел, которые можно представить в виде суммы (8). Такие числа будем называть *конструктивными.* Все остальные действительные числа, которые нельзя представить в виде суммы (8), являются *неконструктивными.* Ясно, что к „неконструктивным" числам относятся прежде всего все иррациональные числа, в частности главные математические константы π и e, число $\sqrt{2}$, „золотое сечение" и т. д. Но в рамках определения (8) к разряду „неконструктивных" мы должны отнести и некоторые рациональные числа (например, $2/3, 3/7$ и т. д.), называемые „периодическими дробями", которые нельзя представить в виде конечной суммы (8).

Заметим, что хотя определение (8) значительно ограничивает множество действительных чисел, это никак на умаляет его значение с „практической", вычислительной точки зрения. Легко доказать, что любое „неконструктивное" действительное число можно представить в виде (8) приближенно, причем ошибка приближения Δ будет неограниченно уменьшаться по мере увеличения числа членов в (8), однако $\Delta \neq 0$ для „неконструктивных" действительных чисел. По существу, в современных компьютерах мы пользуемся только „конструктивными" числами, задаваемыми (8), и это нас вполне устраивает, потому что любое „неконструктивное" число можно представить в виде (8) с погрешностью, потенциально стремящейся к 0.

Определение Ньютона. В течение многих тысячелетий математики развивали и уточняли определение действительного числа. В 17-м веке в период зарождения современной науки и математики при разработке ряда методов изучения непрерывных процессов понятие действительного числа вновь вышло на передний план. Наиболее четко новое определение действительного числа дал один из основоположников математического анализа И. Ньютон в его „Всеобщей арифметике":

„Под числами мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу".

Эта формулировка дает нам единое определение действительного числа. Если теперь рассмотреть „Евклидово определение" числа (7) с точки зрения „определения Ньютона", то в качестве „другой величины того же рода, принятой за единицу", выступает „монада". В двоичной системе счисления (8) в качестве „единицы" используется число 2, т. е. основание системы счисления.

Новое конструктивное определение действительного числа: Рассмотрим бесконечное множество геометрических отрезков, являющихся степенями золотой p-пропорции τ_p:

$$G_p = \left\{\tau_p^n\right\}, \tag{10}$$

где все степени τ_p^n связаны между собой тождеством (3).

Используя множество (10), можно „сконструировать" следующий метод позиционного представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \tau_p^i, \tag{11}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Выражение (11) „генерирует" бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому p; $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$, соответствует своя система счисления типа (11). В частности, при $p = 0$ основание $\tau_p = \tau_0 = 2$ и система счисления (11) сводится к классической двоичной системе (8).

Рассмотрим случай $p = 1$. Для этого случая основанием системы счисления (11) является классическое „золотое сечение"

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

и система (11) вырождается в „Тау-систему", введенную в 1957 г. американским математиком Дж. Бергманом [3]. Бергман назвал свою „Тау-систему" *системой счисления с иррациональным основанием.* Отметим, что статья [3] написана Бергманом в возрасте 12 лет!

Заметим также, что выражение (11) было введено автором настоящей статьи в 1980 г. [4] и названо *„кодом золотой р-пропорции"*. Теория этих систем счисления изложена в [5].

Рассмотрим случай $p = \infty$. Для этого случая основание τ_p стремится к 1, а это означает, что в пределе выражение (11) сводится к классическому „Евклидову определению" числа, задаваемому (7).

Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (11), как весьма широкое обобщение и развитие „Евклидового определения" числа (7) и конструктивного определения (8).

Отметим, что выражение (11) разделяет все действительные числа на две группы: „конструктивные" числа, которые можно представить в виде конечной суммы степеней золотой p-пропорции в виде (11), и „неконструктивные" числа, которые нельзя представить в виде суммы (11).

Ясно, что все степени золотой p-пропорции типа τ_p^i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, можно представить в виде (11). Например,

$$\tau_p^1 = 10, \quad \tau_p^{-1} = 0{,}1,$$
$$\tau_p^2 = 100, \quad \tau_p^{-2} = 0{,}01,$$
$$\tau_p^3 = 1000, \quad \tau_p^{-3} = 0{,}001.$$

Это означает, что все иррациональные числа типа τ_p^i (степени золотой p-пропорции) являются „конструктивными числами" в рамках определения (11). Из определения (11) следует, что все действительные числа, являющиеся суммами степеней золотой p-пропорции, также являются „конструктивными числами" в смысле (11). Например, действительное число $A = \tau_p^2 + \tau_p^{-1} + \tau_p^{-3}$ в соответствии с (11) можно представить в виде следующей кодовой комбинации:

$$A = 100,101.$$

Заметим, что возможность представления некоторых иррациональных чисел (степеней золотой p-пропорции и их сумм) в виде конечной совокупности „битов" является еще одним необычным свойством введенных выше позиционных представлений (11).

3. Z-свойство натуральных чисел. Как упоминалось выше, „Евклидово определение" (7) „порождает" не только натуральные числа, но и всю проблематику их теории. Но тогда можно высказать предположение, что новое определение действительного числа, задаваемое (11), может стать источником новых теоретико-числовых результатов. Рассмотрим один из таких результатов, называемых *Z-свойством натуральных чисел.*

Для доказательства этого свойства представим натуральное число N в системе счисления Бергмана:

$$N = \sum_i a_i \tau^i. \tag{12}$$

Такое представление числа N в форме (12) будем называть *τ-кодом натурального числа N*. Заметим, что дискретная переменная i принимает свои значения из множества $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

В [3] доказано, что сумма (12) для любого натурального N является конечной, т. е. любое натуральное число всегда можно представить в виде конечной суммы степеней „золотой пропорции", и этот далеко не тривиальный математический результат сам по себе представляет определенный интерес и приоткрывает еще одну „тайну" натуральных чисел.

В теории чисел Фибоначчи [6, 7] широко известна так называемая *формула Бине,* связывающая числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n с „золотой пропорцией" τ,

$$\tau^i = \frac{L_i + F_i\sqrt{5}}{2}, \tag{13}$$

где индексы i для чисел Фибоначчи и Люка принимают значения из множества $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Напомним, что числа Фибоначчи и Люка представляют собой две бесконечные числовые последовательности от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. задаваемые как для положительных, так и для отрицательных значений своих индексов n (см. табли-

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21	34	–55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	–1	3	–4	7	–11	18	–29	47	–76	123

В дальнейшем будем использовать следующие известные тождества для чисел Фибоначчи и чисел Люка [6, 7]:

$$F_{i+1} = \frac{L_i + F_i}{2}, \tag{14}$$

$$L_{i+1} = F_{i+1} + 2F_i. \tag{15}$$

Теперь подставим в (12) вместо τ^i выражение (13). В результате получим

$$N = \frac{1}{2}\left(A + B\sqrt{5}\right), \tag{16}$$

где

$$A = \sum_i a_i L_i, \tag{17}$$

$$B = \sum_i a_i F_i. \tag{18}$$

Выражение (16) можно также записать в виде

$$2N = A + B\sqrt{5}.$$

Заметим, что двоичные цифры a_i в выражениях (17), (18) всегда совпадают с соответствующими двоичными цифрами в выражении (12), задающем τ-код натурального числа N.

Рассмотрим выражение (16). Если принять во внимание, что суммы (17), (18) всегда являются целыми числами, то возникает вопрос: при каких условиях выражение (16) может быть справедливым в общем случае, т. е. для любого натурального N? Ответ прост: это возможно только в том случае, если член A является четным числом, равным $2N$, а член B в выражении (16) тождественно равен 0, т. е.

$$A = \sum_i a_i L_i = 2N, \tag{19}$$

$$B = \sum_i a_i F_i = 0. \tag{20}$$

Принимая во внимание тождество (20), выражение (16) можно также представить в виде

$$N = \frac{1}{2}(A + B), \tag{21}$$

где A определяется выражением (19), а B — выражением (20).

Учитывая выражения (19) и (20), а также тот факт, что все двоичные коэффициенты в выражениях (19), (20) совпадают, выражение (21) можно записать так:

$$N = \sum_i a_i \frac{L_i + F_i}{2}. \tag{22}$$

Использовав тождество (14), запишем выражение (22) в виде

$$N = \sum_i a_i F_{i+1}. \tag{23}$$

Выражение (23) будем называть *F-кодом числа N*. Таким образом, F-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Фибоначчи F_{i+1}, выбираемые из таблицы.

Теперь сравним выражения (12) и (23). Поскольку двоичные цифры a_i в выражениях (12) и (23) совпадают для любого $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, отсюда вытекает, что F-код числа N можно получить из τ-кода (12) того же самого натурального числа N путем простой замены степеней золотой пропорции τ^i в формуле (12) соответствующими числами Фибоначчи F_{i+1}.

Представим теперь F-код числа N в виде

$$N = \sum_i a_i F_{i+1} + 2B, \tag{24}$$

где член B определяется выражением (20). Тогда выражение (24) можно представить так:

$$N = \sum_i a_i (F_{i+1} + 2F_i). \tag{25}$$

Учитывая тождество (15), выражение (25) записываем в виде

$$N = \sum_i a_i L_{i+1}. \tag{26}$$

Будем называть выражение (26) *L-кодом числа N*. Таким образом, L-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Люка L_{i+1}.

Поскольку двоичные цифры в выражениях (12), (26) совпадают, отсюда вытекает, что L-код числа N можно получить из τ-кода (12) того же самого числа N путем замены степеней золотой пропорции τ^i в формуле (12) соответствующими числами Люка L_{i+1}, где $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Ясно, что L-код числа N можно получить также из F-кода того же самого числа N путем замены чисел Фибоначчи F_{i+1} в формуле (23) числами Люка L_{i+1}. Таким образом, существуют три различных способа представления одного и того же натурального числа N: τ-код (12), задающий натуральное число N в виде суммы степеней золотой пропорции, F-код (23), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Фибоначчи, и L-код (26), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Люка; при этом по форме двоичной записи все эти коды совпадают.

Теперь сравним выражения (12) и (20). Поскольку двоичные цифры a_i в рассмотренных выражениях совпадают, это означает, что выражение (20) получается из выражения (12) путем простой замены всех степеней золотой пропорции τ^i в формуле (12) соответствующими числами Фибоначчи F_i.

Сформулируем результат, вытекающий из сравнения выражений (12) и (20), в виде следующей теоремы.

Теорема 1 (Z-свойство натуральных чисел). *Если в выражении для τ-кода любого натурального числа N, задаваемого выражением* (12), *заменить все степени золотой пропорции τ^i соответствующими числами Фибоначчи*

F_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, *то возникающая при этом сумма* (20) *тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа* N.

Примем без доказательства еще одну теорему, которая является обобщением теоремы 1.

Теорема 2 (**Z_p-свойство натуральных чисел**). *Если некоторое натуральное число* N *представить в виде* (11), *т. е. записать*

$$N = \sum_i a_i \tau_p^i, \tag{27}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, τ_p; $p = 1, 2, 3, \ldots$, — *золотая p-пропорция, а затем в выражении* (27) *заменить все степени золотой p-пропорции* τ_p^i *соответствующими p-числами Фибоначчи* $F_p(i)$, *то возникающая при этом сумма* $\sum_i a_i F_p(i)$ *всегда тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа* N, *т. е.*

$$\sum_i a_i F_p(i) = 0. \tag{28}$$

Заметим, что свойства (20) и (28) справедливы только для натуральных чисел. Это означает, что наши исследования привели к открытию нового свойства натуральных чисел, называемого Z- или Z_p-*свойством* (от слова „Zero" — нуль).

Заметим, что основными приложениями полученных выше новых математических результатов является теория измерения [1, 2], компьютерная арифметика [3 – 5], теория кодирования [8], теория цифровой обработки сигналов [9]. Однако в последние годы числа Фибоначчи и золотое сечение, а также рассмотренные выше их обобщения нашли применения при введении новых классов гиперболических функций [10] и нового класса матриц [11]. Особый интерес с точки зрения компьютерной науки представляет так называемая троичная зеркально-симметричная арифметика, представляющая собой синтез системы счисления Бергмана и троичной симметричной системы счисления [12], которая была использована Н. П. Брусенцовым при создании первого в мировой истории троичного компьютера „Сетунь".

1. *Стахов А. П.* Введение в алгоритмическую теорию измерения. – М.: Сов. радио, 1977. – 288 с.
2. *Stakhov A. P.* The golden section in the measurement theory // Computers and Math. Appl. – 1989. – **17**, № 4–6. – P. 613 – 638.
3. *Bergman G.* A number system with an irrational base // Math. Mag. – 1957. – № 31. – P. 98 – 119.
4. *Стахов А. П.* „Золотая" пропорция в цифровой технике // Автоматика и вычислит. техника. – 1980. – № 1. – С. 27 – 33.
5. *Стахов А. П.* Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.
6. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
7. *Hoggat Verner E.* Fibonacci and Lucas numbers. – Palo: Alto-Houghton-Mifflin, 1969. – 92 p.
8. *Stakhov A. P., Massingua V., Sluchenkova A. A.* Introduction into Fibonacci coding and cryptography. – Kharkiv: Osnova, 1999. – 236 p.
9. *Chernov V. M., Pershina M. V.* Fibonacci – Mersenne and Fibonacci – Fermat discrete transforms // Bol. Informatica. Golden Section: Theory and Appl. – 1999. – № 9-10. – P. 25 – 31.
10. *Стахов А. П., Ткаченко И. С.* Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Докл. НАН Украины. – 1993. – Вып. 7. – С. 9 – 14.
11. *Stakhov O. P.* A generalization of the Fibonacci Q-matrix // Допов. НАН України. – 1999. – № 9. – С. 46 – 49.
12. *Stakhov A. P.* Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror – symmetrical arithmetic // Computer J. (British Computer Soc.). – 2002. – **45**, № 2. – P. 231 – 236.

Получено 08.07.2003