УДК 517.9

М. Є. Дудкін (Нац. тех. ун-т України „КПІ", Київ)

ТОЧКОВИЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДІНГЕРА З ТОЧКОВИМИ ВЗАЄМОДІЯМИ У ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНИХ N-КУТНИКІВ*

We present a complete description of the point spectrum of the Laplace operator perturbed by point potentials that are concentrated at the vertices of equilateral polygons. We prove a criterion for the absence of points of the point spectrum of singularly perturbed positive self-adjoint operator with the property of cyclicity of defect vectors.

Наведено повний опис точкового спектра оператора Лапласа, збуреного точковими потенціалами, що зосереджені у вершинах правильних багатокутників. Доведено критерій відсутності точок точкового спектра сингулярного збуреного додатного самоспряженого оператора із властивістю циклічності дефектних векторів.

Оператор Шредінгера з точковою взаємодією в $\mathbb{R}^3$ у вершинах правильних багатокутників. Нехай задано оператор Лапласа $-\Delta$, визначений в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3, dx)$. Розглянемо збурення $-\Delta$ точковими взаємодіями, зосередженими на множині $\mathbf{Y} := \{y_j\}_{j=1}^N$, із константами зв'язку $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^N$, $N < \infty$, де y_i — вершини правильного N-кутника, розташованого на деякій площині в $\mathbb{R}^3$. Збурений оператор визначається мовою резольвент збуреного і незбуреного операторів [1]:

$$\left(-\tilde{\Delta}_{\alpha,\mathbf{Y}} - k^2\right)^{-1} = (-\Delta - k^2)^{-1} + \sum_{j,j'=1}^{N} \left[\Gamma_{\alpha,\mathbf{Y}}(k)\right]^{-1}_{j,j'} \left(G_k(\cdot - y_{j'}),\cdot\right) G_k(\cdot - y_{j'}), \qquad (1)$$

де $\operatorname{Im}(k) > 0$, $\alpha_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{1,N}$, $G_k(x - x') = \dfrac{e^{ik|x-x'|}}{4\pi|x - x'|}$, $x, x' \in \mathbb{R}^3$, $\Gamma_{\alpha,\mathbf{Y}}(k) = \left[\left(\alpha_j - \dfrac{ik}{4\pi}\right)\delta_{j,j'} - \tilde{G}_k\left(|y_j - y_{j'}|\right)\right]_{j,j'=1}^{N}$ — матриця, в якій $\tilde{G}_k(d) = \begin{cases} G_k(d), & d \neq 0; \\ 0, & d = 0, \end{cases}$ і $\delta_{j,j'}$ — символ Кронекера. Зауважимо, що у фізичній літературі вираз (1) має формальний вигляд (див. [1] і наведену там бібліографію):

$$-\tilde{\Delta}_{\alpha,\mathbf{Y}} = -\Delta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta(x - y_j), \qquad N < \infty, \qquad (2)$$

де $\delta(x - y_j)$ — функції Дірака, зосереджені у точках y_i.

Позначимо $|y_j - y_{j+t}| = d_t$, $j = \overline{1,N}$, $t = \overline{1, N-1}$, $y_{N+m} = y_m$, $m \in \mathbb{N}$, де d_1 — сторони багатокутника, d_i — відстані від точки з номером 1 до точки з номером $i = \overline{2, N-1}$.

Задача на власні значення для збуреного оператора

$$-\tilde{\Delta}_{\alpha,\mathbf{Y}}\psi = \lambda\psi$$

зводиться до обчислення коренів рівняння [1]

$$P_N := \det\left|\Gamma_{\alpha,\mathbf{Y}}(\lambda)\right| = 0, \qquad \lambda < 0, \qquad (3)$$

де $\lambda = k^2$. У подальшому будемо вважати, що $\alpha = \alpha_j$, $j = \overline{1,N}$, і позначимо

* Підтримано проектами INTAS N 00-257, DFG 436 UKR 113/67.

$$a_0 = \left(\alpha - \frac{ik}{4\pi}\right), \quad a_t = -G_k(|d_t|), \quad t = \overline{1, N-1}. \tag{4}$$

Тоді визначник у (3) буде мати вигляд

$$P_N = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_2 & \dots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & \dots & a_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Як відомо, цей циклічний визначник має розклад

$$P_N = \prod_{n=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} a_t \varepsilon_n^t, \quad \text{де} \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi n}{N} + i\sin\frac{2\pi n}{N}.$$

Розглянемо два випадки: коли N — парне і коли N — непарне.

1. Нехай N — парне. Тоді визначник у (5) має розклад

$$P_N = \prod_{n=0}^{N-1} \left(a_0 + (-1)^n a_{\frac{N}{2}} + 2\sum_{t=1}^{\frac{N}{2}-1} a_t \cos\frac{2\pi n}{N} \right). \tag{6}$$

Якщо позначити через R радіус кола, на якому знаходяться центри збурень (радіус кола, описаного навколо заданого багатокутника), то

$$d_t = 2R\sin\frac{\pi t}{N}, \quad t = \overline{1, N-1}. \tag{7}$$

Перепозначимо для зручності спостереження

$$k = il, \quad \lambda = -\sqrt{l}. \tag{8}$$

Враховуючи, що $a_t = a_{N-t}$, $t = \overline{1, N/2}$, та позначення (4), (7) і (8), вираз (6) записуємо у вигляді

$$P_N = \frac{1}{(4\pi R)^N} \left((4\pi\alpha + l)R + \frac{1}{2}e^{-2Rl} + \sum_{t=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{e^{-2Rl\sin\frac{\pi t}{N}}}{\sin\frac{\pi t}{N}} \right) \times$$

$$\times \left((4\pi\alpha + l)R - \frac{1}{2}e^{-2Rl} + \sum_{t=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^t \frac{e^{-2Rl\sin\frac{\pi t}{N}}}{\sin\frac{\pi t}{N}} \right) \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \left((4\pi\alpha + l)R + \frac{(-1)^n}{2}e^{-2Rl} + \sum_{t=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{e^{-2Rl\sin\frac{\pi t}{N}}}{\sin\frac{\pi t}{N}} \cos\frac{2\pi tn}{N} \right)^2. \tag{9}$$

Використавши запис (9), можна дати повний опис від'ємного точкового спектра збуреного оператора $-\tilde{\Delta}_{\alpha, \mathbf{Y}}$. Для цього шукатимемо розв'язки рівняння $P_N = 0$ для $l > 0$, використовуючи зображення (9).

Теорема 1. *Нехай в* $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ *задано оператор Шредінгера з точковими* *взаємодіями у вершинах правильного* N*-кутника* (N — *парне*), *вписаного в коло радіуса* R, *і однаковими константами зв'язку* α.

1. *Якщо*

$$4\pi\alpha R < -\frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} (-1)^t \frac{1}{\sin(\pi t/N)}, \tag{10}$$

то збурений оператор має N *від'ємних точок точкового спектра з урахуванням кратності; зокрема, дві точки кратності один і* $(N-2)/2$ *точок кратності два.*

2. *Якщо*

$$-\frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} (-1)^t \frac{1}{\sin(\pi t/N)} \le 4\pi\alpha R < \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} (-1)^t \frac{\cos(2\pi t/N)}{\sin(\pi t/N)}, \tag{11}$$

то збурений оператор має $N-1$ *від'ємних точок точкового спектра з урахуванням кратності; зокрема, одну точку кратності один і* $(N-2)/2$ *точок кратності два.*

3. *Якщо*

$$\frac{(-1)^n}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} \frac{\cos(2\pi tn/N)}{\sin(\pi t/N)} \le 4\pi\alpha R < \frac{(-1)^m}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} \frac{\cos(2\pi tm/N)}{\sin(\pi t/N)}, \tag{12}$$

де $n = (N-2)/2 - p$, $m = (N-4)/2 - p$, *то збурений оператор має* $N-1-2p$ *від'ємних точок точкового спектра з урахуванням кратності; зокрема, одну точку кратності один і* $(N-2)/2-p$ *точок кратності два,* $p = \overline{1, N/2-2}$.

4. *Якщо*

$$-\frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} \frac{\cos(2\pi t/N)}{\sin(\pi t/N)} \le 4\pi\alpha R < \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} \frac{1}{\sin(\pi t/N)}, \tag{13}$$

то збурений оператор має єдину від'ємну точку точкового спектра.

5. *Якщо*

$$\frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{N/2-1} \frac{1}{\sin(\pi t/N)} \le 4\pi\alpha R, \tag{14}$$

то збурений оператор не має від'ємного точкового спектра.

Доведення випливає з аналізу рівності нулю множників розкладу визначника (9). Позначимо

$$D_n(l) = \frac{(-1)^n}{2} e^{-2Rl} + \sum_{t=1}^{N/2-1} \frac{e^{-2Rl\sin(\pi t/N)}}{\sin(\pi t/N)} \cos\frac{2\pi tn}{N}.$$

Тоді, зокрема, зображення (9) має вигляд

$$P_N = \frac{1}{(4\pi R)^N} \prod_{n=0}^{N-1} \left((4\pi\alpha + l)R + D_n(l)\right).$$

Наведемо кілька зауважень:

$D_n(l) > D_m(l)$ для $n < m$, $n, m = \overline{1, N/2}$, $l \ge 0$;

$D_n'(l) > 0$ для тих n, при яких $D_n(l) < 0$, і $D_n'(l) < 0$ для тих n, при яких $D_n(l) > 0$, $l \ge 0$;

$D_n'(l)|_{l=0} = R$ для тих n, при яких $D_n'(l) > 0$, і $D_n'(l)|_{l=0} = -R$ для тих n, при яких $D_n'(l) < 0$, $l \ge 0$;

$\lim\limits_{l\to\infty} D_n(l) = 0$.

Позначимо для зручності $\tilde{a}_0(l) = 4\pi\alpha R + lR$. Тепер оцінки (10)–(14) випливають відповідно із таких оцінок:

$$\tilde{a}_0(0) < D_{N/2}(0),$$

$$D_{N/2}(0) \le \tilde{a}_0(0) < D_{N/2-1}(0),$$

$$D_{(N-2)/2-p}(0) \le \tilde{a}_0(0) < D_{(N-4)/2-p}(0), \qquad p = \overline{1, N/2-2},$$

$$D_1(0) \le \tilde{a}_0(0) < D_0(0),$$

$$D_0(0) \le \tilde{a}_0(0).$$

Отже, теорему доведено.

2. Нехай N — непарне. Тоді визначник у (5) має розклад

$$P_N = \prod_{n=0}^{N-1}\left(a_0 + 2\sum_{t=1}^{(N-1)/2} a_t \cos\frac{2\pi n}{N}\right). \tag{15}$$

Враховуючи, що $a_t = a_{N-t-1}$, $t = \overline{1, (N-1)/2}$, та позначення (4), (7) і (8), вираз (15) записуємо у вигляді

$$P_N = \frac{1}{(4\pi R)^N}\left((4\pi\alpha + l)R + \sum_{t=1}^{(N-1)/2} \frac{e^{-2Rl\sin(\pi t/N)}}{\sin(\pi t/N)}\right) \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{(N-1)/2}\left((4\pi\alpha + l)R + \sum_{t=1}^{(N-1)/2} \frac{e^{-2Rl\sin(\pi t/N)}}{\sin(\pi t/N)} \cos\frac{2\pi tn}{N}\right)^2. \tag{16}$$

Використавши запис (16), можна також дати повний опис від'ємного точкового спектра збуреного оператора $-\tilde{\Delta}_{\alpha,\mathbf{Y}}$.

Теорема 2. *Нехай в $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ задано оператор Шредінгера з точковими взаємодіями у вершинах правильного N-кутника (N — непарне), вписаного в коло радіуса R, і однаковими константами зв'язку α.*

1. *Якщо*

$$4\pi\alpha R < \sum_{t=1}^{(N-1)/2} (-1)^t \frac{1}{\sin(\pi t/N)}, \tag{17}$$

то збурений оператор має N від'ємних точок точкового спектра з урахуванням кратності; зокрема, одну точку кратності один і $(N-1)/2$ точок кратності два.

2. *Якщо*

$$\sum_{t=1}^{(N-1)/2} \frac{\cos(2\pi tn/N)}{\sin(\pi t/N)} \le 4\pi\alpha R < \sum_{t=1}^{(N-1)/2} \frac{\cos(2\pi tm/N)}{\sin(\pi t/N)}, \tag{18}$$

де $n = (N-1)/2 - p$, $m = (N-3)/2 - p$, то збурений оператор має $N - 2p$ від'ємних точок точкового спектра з урахуванням кратності; зокрема, одну точку кратності один і $(N-1)/2 - p$ точок кратності два, $p = \overline{0, (N-5)/2}$.

3. *Якщо*

$$\sum_{t=1}^{(N-1)/2} \frac{\cos(2\pi t/N)}{\sin(\pi t/N)} \le 4\pi\alpha R < \sum_{t=1}^{N/2-1} \frac{1}{\sin(\pi t/N)}, \tag{19}$$

то збурений оператор має єдину від'ємну точку точкового спектра.

4. *Якщо*

$$\sum_{t=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{\sin(\pi t / N)} \le 4\pi\alpha R, \tag{20}$$

то збурений оператор не має від'ємного точкового спектра.

Доведення випливає з аналізу рівності нулю множників розкладу визначника (16). Позначимо

$$D_n(l) = \sum_{t=1}^{(N-1)/2} \frac{e^{-2Rl\sin(\pi t/N)}}{\sin(\pi t / N)} \cos\frac{2\pi t n}{N}.$$

Тоді, зокрема, зображення (16) має вигляд

$$P_N = \frac{1}{(4\pi R)^N} \prod_{n=0}^{N-1} ((4\pi\alpha + l) R + D_n(l)).$$

Наведемо кілька зауважень:

$D_n(l) > D_m(l)$ для $n < m$, $n, m = \overline{1, (N-1)/2}$, $l \ge 0$;

$D_n'(l) > 0$ для тих n, при яких $D_n(l) < 0$, і $D_n'(l) < 0$ для тих n, при яких $D_n(l) > 0$, $l \ge 0$;

$D_n'(l)|_{l=0} = R$ для тих n, при яких $D_n'(l) > 0$, і $D_n'(l)|_{l=0} = -R$ для тих n, при яких $D_n'(l) < 0$, $l \ge 0$;

$\lim\limits_{l\to\infty} D_n(l) = 0$.

Позначимо для зручності $\tilde{a}_0(l) = 4\pi\alpha R + lR$. Тепер оцінки (17)–(20) випливають відповідно із таких оцінок:

$$\tilde{a}_0(0) < D_{(N-1)/2}(0),$$

$$D_{(N-1)/2-p}(0) \le \tilde{a}_0(0) < D_{(N-3)/2-p}(0), \qquad p = \overline{0, (N-5)/2},$$

$$D_1(0) \le \tilde{a}_0(0) < D_0(0),$$

$$D_0(0) \le \tilde{a}_0(0).$$

Отже, теорему доведено.

Зауважимо, що дослідження точкового спектра оператора Лапласа, збуреного точковими потенціалами в $\mathbb{R}^1$, проводились у роботах [2, 3].

Точковий спектр сингулярно збурених напівобмежених самоспряжених операторів із циклічною властивістю дефектних векторів. Нехай у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$ задано напівобмежений самоспряжений оператор $A = A^* \ge mI$ з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$ (I — одиничний оператор). Не порушуючи загальності, вважатимемо далі $m \ge 0$.

Інший самоспряжений оператор $\tilde{A}$ в $\mathcal{H}$ називається сингулярно збуреним відносно A [4–10] і позначається $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$, якщо область

$$\mathfrak{D} := \{ f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A} f \}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що для кожного $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$ існує щільно визначений симетричний оператор

$$\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D} = \tilde{A} \restriction \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D}(\dot{A}) = \mathfrak{D}$$

з нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \operatorname{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \ne 0$. Надалі розглядається підклас операторів $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^N(A)$, де $N = \mathbf{n}^+(\dot{A}) = \mathbf{n}^-(\dot{A}) < \infty$.

Якщо позначити через $R_z = (A-z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A}-z)^{-1}$ резольвенти відповідно операторів A і $\tilde{A}$, то для них має місце формула М. Крейна [11, 12]

$$\tilde{R}_z = R_z + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}(z)(\cdot, \eta_i(\bar{z}))\eta_j(z), \tag{21}$$

де $\eta_j(z)$ — дефектні вектори оператора $\dot{A}-z$, тобто $(\dot{A}-z)^*\eta_j(z)=0$, $j=\overline{1,N}$, $b_{ij}(z)$ — елементи матриці $\Gamma(z)^{-1}$. Покладемо $Q(z) = \left(\left(\eta_i(z), F(z)\eta_j(\bar{z})\right)\right)_{ij=1}^{N}$, де $F(z) := (1+zA)(A-z)(A^2+1)^{-1}$ [10].

Розглянемо такі збурені оператори, для яких в (21):

1) $\Gamma(z) = 1/\alpha E - Q(z)$, де E — одинична матриця і $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ — константа зв'язку [10];

2) в $\mathcal{H}$ визначено унітарний оператор U, що комутує з A і такий, що

$$U^k \eta_j(z) = \eta_{j+k}(z), \quad j=\overline{1,N}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

де $\eta_{N+j}(z) = \eta_j(z)$, $U^{N+j} = U^j$, $j=\overline{1,N}$, $N = \min\{t>1 \mid U^t = I\}$.

Теорема 3. *Нехай* $\tilde{A}$ *— оператор, сингулярно збурений відносно додатного самоспряженого оператора* $A \geq 0$ *в* $\mathcal{H}$, *так що виконуються умови* 1 *і* 2.

Оператор $\tilde{A}$ *не має власних значень* $\lambda < 0$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\frac{1}{\alpha} \geq \lim_{x\to 0-} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\left(\eta_1(x), F(x)U^j\eta_1(x)\right)\right). \tag{23}$$

Доведення. Задача на власні значення $\tilde{A}\psi = \lambda\psi$ для $\tilde{A}$ еквівалентна задачі

$$\det\left|\Gamma_{ij}(\lambda)\right| = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda < 0. \tag{24}$$

Тоді останній вираз з урахуванням (22) має вигляд

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & b_2 & \dots & b_{N-1} \\ b_{N-1} & a & b_1 & \dots & b_{N-2} \\ b_{N-2} & b_{N-1} & a & \dots & b_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

де $a = \alpha - ((\eta_1(x), F(\lambda)\eta_1(x)))$, $b_j = -\left(\left(\eta_1(\lambda), F(\lambda)U^j\eta_1(\lambda)\right)\right)$, $j=\overline{1,N-1}$. Очевидно, що визначник в (25) має простий множник $\left(a + \sum_{j=1}^{N-1} b_j\right)$. Відповідне рівняння

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left(\eta_1(\lambda), F(\lambda)U^j\eta_1(\lambda)\right) = \frac{1}{\alpha} \tag{26}$$

внаслідок монотонності правої частини має лише один розв'язок $\lambda^* < m$. Покажемо, що цей розв'язок є максимальним. Справді, якщо (25) розглядати як задачу про власні значення для відповідної матриці Q, то очевидно, що $\|Q\| \leq$

$\leq \sum_{j=1}^{N-1} |b_j|$. Оскільки визначник в (25) має простий множник $\left(a + \sum_{j=1}^{N-1} b_j\right)$, а (26) — лише один розв'язок λ^* і $b_j < 0$, то цей розв'язок є єдиним, додатним і максимальним, тобто (23) доведено.

Зауважимо, що задача на власні значення у загальній постановці для сингулярно збурених операторів досліджувалась у роботах [13, 14].

Автор висловлює щиру подяку Л. П. Нижнику за помічені недоліки при підготовці роботи до друку та поради, які значно покращили запропоновані результати.

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 568 с.
2. *Albeverio S., Nizhnik L.* Schrödinger operator with number of negative eigenvalues equal to the number of point interactions. – Bonn, 2002. – Preprint № 49.
3. *Albeverio S., Nizhnik L.* On the number negative eigenvalues of a one-dimensional Schrödinger operator with point interactions // Lett. Math. Phys. – 2003. – **65**. – P. 27–35.
4. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 176 с.
5. *Karwowski W., Koshmanenko V.* On definition of the singular bilinear forms and singular linear operators // Ukr. Math. J. – 1993. – **45**, № 8. – P. 1084–1089.
6. *Brashe J., Koshmanenko V., Neidhardt H.* New aspects of Krein's extension theory // Ibid. – 1994. – **46**, № 1. – P. 37–54.
7. *Albeverio S., Koshmanenko V.* On the form-sum approximations of singularly perturbed positive self-adjoint operators // J. Funct. Anal. – 1999. – **169**. – P. 32–51.
8. *Karwowski W., Koshmanenko V.* Singular quadratics forms: regularization by restriction // Ibid. – 1997. – **143**. – P. 205–220.
9. *Nizhnik L. P.* On rank one singular perturbations of selfadjoint operators // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – **7**, № 3. – P. 54–66.
10. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. – 430 p.
11. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431–495.
12. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
13. *Koshmanenko V.* A variant of inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 49–69.
14. *Кошманенко В., Самойленко О.* Сингулярні збурення скінченного рангу. Точковий спектр // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1186–1212.

Отримано 29.04.2002,
після доопрацювання — 08.07.2003