УДК 517.9

А. М. Гомилко (Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЭЛИ ГЕНЕРАТОРА РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННОЙ C_0-ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

We consider the problem of estimates of powers of the Caley transform $V = (A+I)(A-I)^{-1}$ of the generator associated with a uniformly bounded C_0-semigroup of operators e^{tA}, $t \geq 0$, acting in the Hilbert space H. In particular, we obtain the estimate $\sup_{n\in\mathbf{N}}\left(\| V^n \| / \ln(n+1)\right) < \infty$. We show that the estimate $\sup_{n\in\mathbf{N}}\| V^n \| < \infty$ is true in the following cases: a) the semigroups e^{tA} and $e^{tA^{-1}}$ are uniformly bounded; b) the semigroup e^{tA} uniformly bounded for $t \geq \infty$ is analytic (in particular, if the generator of a semigroup is a bounded operator).

Розглядається питання про оцінки степенів перетворення Келі $V = (A+I)(A-I)^{-1}$ генератора рівномірно обмеженої C_0-півгрупи операторів e^{tA}, $t \geq 0$, що діє в гільбертовому просторі H. Зокрема, отримано оцінку $\sup_{n\in\mathbf{N}}\left(\| V^n \| / \ln(n+1)\right) < \infty$. Показано, що оцінка $\sup_{n\in\mathbf{N}}\| V^n \| < \infty$ виконується у таких випадках: а) півгрупи e^{tA} і $e^{tA^{-1}}$ є рівномірно обмеженими; б) рівномірно обмежена при $t \geq \infty$ півгрупа e^{tA} є аналітичною (зокрема, якщо генератор півгрупи є обмеженим оператором).

1. Введение. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $E = E(H)$ — множество линейных, плотно определенных, замкнутых операторов, действующих в H, и $L = L(H)$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Через $\sigma(A)$ обозначаем спектр оператора $A \in E$, I — единичный оператор и $R(A,\lambda) = (A-\lambda I)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(A)$, — резольвента оператора A. Пусть $E_- = E_-(H)$ — множество операторов из E со спектром, расположенным в замкнутой левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$. Через $\mathcal{G} = \mathcal{G}(H)$ обозначаем множество генераторов (производящих операторов) равномерно ограниченных C_0-полугрупп линейных операторов, действующих в H.

Для произвольного оператора $A \in E_-$ корректно определено его преобразование Кэли

$$V = V(A) = (A+I)(A-I)^{-1} \in L, \tag{1}$$

причем спектр $\sigma(V)$ расположен в замкнутом единичном круге $|\lambda| \leq 1$. При этом в случае оператора $A \in \mathcal{G}$ представляет интерес вопрос о связи между свойствами полугруппы $T(t) = e^{tA}$, $t > 0$, и дискретной полугруппы $V^n(A)$, $n = 1, 2, \ldots$ [1, 2]. В данной статье рассмотрен вопрос об оценках норм натуральных степеней преобразования Кэли $V(A)$, когда $A \in \mathcal{G}$. Доказано, что справедлива оценка

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{\|V^n(A)\|}{\ln(n+1)}\right) < \infty, \quad A \in \mathcal{G}. \tag{2}$$

Получен критерий степенной ограниченности оператора $V = V(A)$, $A \in \mathcal{G}$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|V^n\| < \infty, \tag{3}$$

а именно, показано, что (3) выполняется тогда и только тогда, когда для любого $x \in H$ имеет место неравенство

$$\sup_{\lambda>1} \lambda^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\| \left(AR(A, \lambda^{-1}) \right)^n x \right\|^2 + \left\| \left(A^* R(A^*, \lambda^{-1}) \right)^n x \right\|^2 \right\} (1-\lambda^{-2})^n < \infty, \qquad (4)$$

где A^* — сопряженный к A оператор. Отметим, что в случае тривиальности ядра оператора A (т. е. когда $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A) условие (4) принимает вид

$$\sup_{\lambda>1} \lambda^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\| R^n(A^{-1}, \lambda) x \right\|^2 + \left\| R^n\left((A^{-1})^*, \lambda \right) x \right\|^2 \right\} (\lambda^2 - 1)^n < \infty. \qquad (4')$$

Из (4′) непосредственно вытекает, что если операторы A и A^{-1} одновременно порождают равномерно ограниченные C_0-полугруппы операторов, то для $V = V(A) = -V(A^{-1})$ справедлива оценка (3). Кроме того, в статье доказано, что (3) выполняется в случае, когда равномерно ограниченная C_0-полугруппа $T(t) = e^{tA}$ допускает аналитическое продолжение в некоторый сектор

$$\sum_{\phi} = \{ z : |\arg z| < \phi \}, \quad \phi \in (0, \pi)$$

(в частности, если генератор полугруппы является ограниченным оператором).

Отметим, что утверждения о справедливости оценки (3) в случае, когда операторы A, $A^{-1} \in \mathcal{G}$, или когда генератор $A \in \mathcal{G} \cap L$, получены также независимо Т. Я. Азизовым (устное сообщение).

Определяющее значение при выводе критерия (4) имеет следующая формула, справедливая в общем случае оператора $A \in E_-$ и представляющая самостоятельный интерес:

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\| \lambda^n R^n(A, \lambda) x \right\|^2 + \left\| \left(AR(A, \lambda^{-1})^n \right) x \right\|^2 \right\} \times$$

$$\times (1-\lambda^{-2})^n + \frac{2\lambda(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2+1)^2} \|x\|^2 =$$

$$= \frac{2(1-r^2)}{(1+r^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| V^n x \right\|^2 r^{2n}, \quad r \in (0, 1), \quad x \in H, \qquad (5)$$

где параметры $r \in (0, 1)$ и $\lambda > 1$ связаны соотношением

$$\lambda = \frac{1+r^2}{1-r^2}. \qquad (6)$$

Из (5) следует, что преобразование Кэли V оператора $A \in E_-$ является равностепенно ограниченным тогда и только тогда, когда для любого $x \in H$ выполняются оценки

$$\sup_{\lambda>1} \lambda^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\| \lambda^n R^n(A, \lambda) x \right\|^2 + \left\| \left(AR(A, \lambda^{-1})^n \right) x \right\|^2 \right\} (1-\lambda^{-2})^n < \infty, \qquad (7)$$

$$\sup_{\lambda>1} \lambda^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\| \lambda^n R^n(A^*, \lambda) x \right\|^2 + \left\| \left(A^* R(A^*, \lambda^{-1}) \right)^n x \right\|^2 \right\} (1-\lambda^{-2})^n < \infty. \qquad (8)$$

В связи с этим остается открытым ответ на следующий существенный вопрос: верно ли, что если для оператора $A \in E_-$ выполняются условия (7), (8), то

$A \in \mathcal{G}$? С другой стороны, представляет интерес и ответ на вопрос: верно ли, что для произвольного оператора $A \in \mathcal{G}$ выполняется условие (4)? Ответы на эти два вопроса полностью бы прояснили ситуацию относительно связи между свойствами равномерной ограниченности непрерывной e^{tA}, $t \geq 0$, и дискретной $V^n(A)$, $n = = 0, 1, \ldots$, полугрупп операторов в гильбертовом пространстве.

2. Вспомогательные определения и результаты. Напомним необходимые для дальнейшего сведения из теории полугрупп операторов [3, 4]. Семейство $T(t)$, $t \geq 0$, линейных ограниченных операторов, действующих в H, образует C_0-полугруппу операторов, если $T(0) = I$, $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$, и

$$\| T(t)x - x \| \to 0, \quad t \to 0, \quad \forall\, x \in H.$$

Всюду далее под словом полугруппа будем понимать C_0-полугруппу операторов. Производящий оператор (генератор) C_0-полугруппы $T(t)$ определяется как сильный предел

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A),$$

и является плотно заданным замкнутым оператором. При этом для соответствующей полугруппы используем обозначение $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. Полугруппа $T(t)$ называется равномерно ограниченной, если найдется такая постоянная $M \geq 1$, что

$$\| T(t) \| \leq M, \quad t \geq 0. \tag{9}$$

При этом оператор A принадлежит $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда для резольвенты $R(A, \lambda)$ и ее степеней справедливы представления

$$R^m(A, \lambda) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-\lambda t} T(t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

и оценки

$$\| R^m(A, \lambda) \| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda)^m}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть оператор $A \in \mathcal{G}$, $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$, и V — преобразование Кэли оператора A. Тогда для любого $x \in H$ справедливо равенство*

$$(1 - r^2) \sum_{n=0}^\infty \| V^n x \|^2 r^{2n} =$$

$$= \| x \|^2 - 2r^2 \varepsilon \int_0^\infty f_1(t) e^{-\varepsilon(1+r^2)t}\, dt + U(r; x), \quad r \in (0, 1),$$

$$U(r; x) = 4r^2 \varepsilon^2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(s, t) e^{-\varepsilon(1+r^2)(s+t)} u(s, t; r)\, ds\, dt, \tag{12}$$

$$u(s, t; r) = (1 + r^2) I_0\left(4r\varepsilon\sqrt{st}\right) - r \frac{s+t}{\sqrt{st}} I_1\left(4r\varepsilon\sqrt{st}\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{1 - r^2},$$

где $I_k(z)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$f_1(t) = 2\operatorname{Re}(T(t)x, x), \quad f(s, t) = (T(s)x, T(t)x).$$

Доказательство. Воспользуемся соотношениями

$$V^n = I - 2\int_0^\infty T(t)e^{-t}L_{n-1}^{(1)}(2t)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где полиномы Лагерра [5]

$$L_k^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!}\frac{(-t)^k}{k!(n-k)!}.$$

Формулы (13) получены методом индукции по n в статье [6] в случае, когда полугруппа $T(t)$ является изометрической (см. также [2], где утверждается справедливость (13) для сжимающих полугрупп). Используя равенство

$$V^n = \left(I + 2(A-I)^{-1}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^k R^k(A,1), \quad k \geq 1,$$

и выражения (10), нетрудно заключить, что эти формулы остаются справедливыми и в общем случае оператора $A \in \mathcal{G}$.

На основании (13) при $r \in (0, 1)$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\|V^n x\right\| r^{2n} = \|x\|^2 + r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\| x - 2\int_0^\infty e^{-t}L_n^{(1)}(2t)T(t)x\,dt \right\|^2 r^{2n} =$$

$$= \|x\|^2 + r^2(1-r^2)^{-1}\|x\|^2 - 2r^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \int_0^\infty e^{-t}L_n^{(1)}(2t)f_1(t)\,dt +$$

$$+ 4r^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \int_0^\infty e^{-(s+t)}L_n^{(1)}(2s)L_n^{(1)}(2t)f(s,t)\,ds\,dt. \tag{14}$$

Из известных оценок полиномов Лагерра [5] следует соотношение

$$\int_0^\infty e^{-t}\left|L_n^{(1)}(2t)\right|dt = O(n), \quad n \to \infty.$$

Тогда, используя в (14) теорему Фубини и значения сумм [5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(1)}(t) r^{2n} = \varepsilon^2 \exp(-r^2\varepsilon t),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(1)}(t)L_n^{(1)}(s) r^{2n} = \varepsilon^3 \exp\left(-r^2\varepsilon(s+t)\right) \times$$

$$\times \left[r\frac{s+t}{\sqrt{st}} I_1\left(2r\varepsilon\sqrt{st}\right) + (1+r^2)I_0\left(2r\varepsilon\sqrt{st}\right)\right], \quad \varepsilon = (1-r^2)^{-1}$$

(с заменой s на $2s$ и t на $2t$), получаем формулу (12).

Теорема доказана.

Пусть оператор $T \in L$, причем $\sigma(T)$ находится в круге $|\mu| \leq 1$. Тогда вне единичного круга для резольвенты справедливо разложение

$$R(T,\mu) = -\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\mu^n}, \quad |\mu| > 1.$$

Отсюда при $r \in (0, 1)$ для любого $x \in H$ получаем формулу (см. [7, 8])

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left\| T^n x \right\|^2 r^{2n} = \int_0^{2\pi} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i\theta} r T)^n x \right\|^2 d\theta = \frac{1}{r} \int_{|\mu|=1/r} \| R(T, \mu) x \|^2 |d\mu|. \quad (15)$$

Следуя [8], докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $g_j(r)$, $j = 1, 2,$ — *положительные непрерывные при* $r \in [0, 1)$ *функции. Предположим, что спектр оператора* $T \in L$ *расположен в круге* $|\mu| \leq 1$, *причем для любого* $x \in H$ *выполняются условия*

$$\sup_{r \in [0,1)} g_1(r) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| T^n x \right\|^2 r^{2n} < \infty,$$

$$\sup_{r \in [0,1)} g_2(r) \sum_{n=0}^{\infty} \left\| T^{*n} x \right\|^2 r^{2n} < \infty. \quad (16)$$

Тогда справедлива оценка

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ n g\left(\frac{n}{n+1}\right) \left\| T^n \right\| \right\} < \infty, \qquad g(r) = \sqrt{g_1(r) g_2(r)}.$$

Доказательство. Из (16) на основании формулы (15) и неравенства Коши – Буняковского для любых $x, y \in H$ получаем

$$\sup_{\rho > 1} g(\rho^{-1}) \int_{|\mu|=\rho} \left| \left(R^2(T, \mu) x, y \right) \right| |d\mu| < \infty. \quad (17)$$

Для оценки степеней оператора T воспользуемся равенствами [6]

$$T^n = \frac{1}{2\pi i (n+1)} \int_{|\mu|=\rho} \mu^{n+1} R^2(T, \mu)\, d\mu, \qquad \rho > 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

которые выводятся из интеграла Рисса с помощью интегрирования по частям. Тогда для любых $x, y \in H$, согласно (17), при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\left| (T^n x, y) \right| \leq \frac{\rho^{n+1}}{2\pi(n+1)} \int_{|\mu|=\rho} \left| \left(R^2(T, \mu) x, y \right) \right| |d\mu| \leq c \frac{\rho^{n+2}}{g(1/\rho)(n+1)}, \quad \rho > 1.$$

Полагая здесь $\rho = 1 + 1/n$, получаем неравенство

$$n g\left(\frac{n}{n+1}\right) \left| (T^n x, y) \right| \leq c \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} \leq c_1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

с постоянной $c_1 > 0$, зависящей лишь от $x, y \in H$. Отсюда, ввиду произвольности векторов $x, y \in H$, согласно теореме Банаха – Штейнгауза о равномерной ограниченности [4] получаем утверждение леммы.

В случае функций $g_j(r) = 1 - r$, $j = 1, 2$, из леммы 1 получаем следующее утверждение, доказанное в [8] (см. также [9]).

Следствие 1. *Для оператора* $T \in L$ *со спектром, расположенным в единичном круге, следующие утверждения эквивалентны*:

а) $\sup_{r \in [0,1)} (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\| T^n x \right\|^2 + \left\| (T^*)^n x \right\|^2 \right\} r^{2n} < \infty \quad \forall x \in H$;

б) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| T^n \right\| < \infty$.

***Замечание* 1.** В оценках (16) и из п. а) следствия 1 интервал $r \in [0, 1)$ можно заменить произвольным интервалом $r \in [b, 1)$ с $b \in (0, 1)$.

Далее через $C(a, \rho)$, где $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, будем обозначать окружность в комплексной плоскости $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \rho\}$. Пусть оператор $A \in E_{-}$, тогда определено его преобразование Кэли V и для резольвенты оператора V при $|\mu| > 1$ имеем выражение

$$R(V, \mu) = -\frac{1}{(\mu-1)}\left[I + \frac{2}{\mu - 1} R(A, z)\right], \quad z = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}.$$

Для $x \in H$ введем в рассмотрение функцию

$$S(r; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left\|V^n x\right\|^2 r^{2n}, \quad r \in (0, 1).$$

Тогда согласно формуле (15) имеем равенство

$$S(r; x) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\mu| = 1/r} \frac{1}{|\mu-1|^2} \left\| x + \frac{2}{\mu-1} R(A, z) x \right\|^2 |d\mu|.$$

Выполняя здесь замену переменной интегрирования $z = (\mu+1)/(\mu-1)$ и вводя обозначения

$$z_0 = \frac{1 + r^2}{1 - r^2}, \qquad \rho_0 = \frac{2r}{1 - r^2}, \tag{18}$$

получаем выражение

$$S(r; x) = \frac{1}{4\pi r} \int\limits_{C(z_0, \rho_0)} \| x + (z-1) R(A, z) x \|^2 |dz| =$$

$$= \frac{\|x\|^2}{1 - r^2} + \frac{1}{2\pi r} \operatorname{Re} \int\limits_{C(z_0, \rho_0)} (z-1)(R(A, z)x, x)\, |dz| +$$

$$+ \frac{1}{4\pi r} \int\limits_{C(z_0, \rho_0)} |z-1|^2 \| R(A, z) x\|^2 |dz|.$$

При этом согласно теореме о среднем для аналитических функций имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C(z_0, \rho_0)} (z-1)\big(R(A, z)x, x\big)\, |dz| =$$

$$= \rho_0 (z_0 - 1)\big(R(A, z_0)x, x\big) = \frac{4r^3}{(1-r^2)^2} \big(R(A, z_0)x, x\big).$$

Таким образом, справедлива формула

$$S(r; x) = \frac{\|x\|^2}{1 - r^2} + \frac{4r^3}{(1-r^2)^2} \operatorname{Re}\big(R(A, z_0)x, x\big) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi r} \int\limits_{C(z_0, \rho_0)} |z-1|^2 \left\| R(A, z)x \right\|^2 |dz|, \quad r \in (0, 1), \quad x \in H. \tag{19}$$

Из формулы (19) и аналогичной формулы для суммы

$$S^*(r; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\|(V^*)^n x\right\|^2 r^{2n}$$

на основании следствия 1 и замечания 1 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Для натуральных степеней преобразования Кэли V оператора $A \in \mathcal{G}$ справедливость оценки* (3) *эквивалентна тому, что для некоторого $b \in (0, 1)$ и любого $x \in H$ выполняется условие*

$$\sup_{r \in [b,1)} (1-r) \int_{C(z_0, \rho_0)} |z-1|^2 \left[\|R(A, z)x\|^2 + \left\|R(A^*, z)x\right\|^2\right] |dz| < \infty,$$

где величины $z_0 = z_0(r)$, $\rho_0 = \rho_0(r)$ определены выражениями (18).

Для оператора $A \in E_-$ при фиксированном $\lambda > 0$ спектры операторов

$$T_1(\lambda) = \lambda R(A, \lambda), \quad T_2(\lambda) = -AR(A, \lambda^{-1}), \quad \lambda > 0,$$

находятся вне круга $|\mu| \le 1$, причем

$$R(T_1(\lambda), \mu) = -\mu^{-1}[I + \lambda\mu^{-1}R(A, \mu_1)], \quad \mu_1 = \frac{\lambda(\mu+1)}{\mu}, \quad |\mu| > 1, \tag{20}$$

$$R(T_2(\lambda), \mu) = -\frac{1}{\mu+1}\left[I - \frac{R(A, \mu_2)}{\lambda(\mu+1)}\right], \quad \mu_2 = \frac{\mu}{\lambda(\mu+1)}, \quad |\mu| > 1. \tag{21}$$

Тогда для каждого $x \in H$ и $\beta \in (0, 1)$ корректно определены функции

$$F_j(\lambda, \beta; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left\|T_j^n(\lambda)x\right\|^2 \beta^n, \quad \lambda > 0. \tag{22}$$

Лемма 2. *Пусть оператор $A \in E_-$, числа $\lambda > 1$, $\beta \in (0, 1)$ и окружности $C_{\lambda,\beta}^{(j)} = C(z_j, \rho_j)$, $j = 1, 2$, где*

$$z_1 = \lambda, \quad z_2 = \lambda^{-1}(1-\beta)^{-1}, \quad \rho_1 = \beta^{1/2}\lambda, \quad \rho_2 = \lambda^{-1}(1-\beta)^{-1}\beta^{1/2}.$$

Тогда справедливы формулы

$$F_1(\lambda, \beta; x) = \|x\|^2 + \frac{\beta^{1/2}\lambda}{2\pi} \int_{C_{\lambda,\beta}^{(1)}} \|R(A, z)x\|^2 |dz|, \tag{23}$$

$$F_2(\lambda, \beta; x) = \frac{1}{1-\beta}\|x\|^2 + \frac{2\beta}{\lambda(1-\beta)^2} \operatorname{Re}\left(R\left(A, \lambda^{-1}(1-\beta)^{-1}\right)x, x\right) +$$

$$+ \frac{\beta^{-1/2}\lambda}{2\pi} \int_{C_{\lambda,\beta}^{(2)}} \left|z-\lambda^{-1}\right|^2 \|R(A, z)x\|^2 |dz|. \tag{24}$$

Доказательство. На основании (20) и (15) получаем равенство

$$F_1(\lambda, \beta; x) = \frac{\beta^{1/2}}{2\pi} \int_{|\mu|=\beta^{-1/2}} \left\|x + \lambda\mu^{-1}R(A, \mu_1)x\right\|^2 |d\mu|,$$

$$\mu_1 = \frac{\lambda(\mu+1)}{\mu}.$$

Выполняя здесь замену переменной $z = \lambda(\mu + 1)/\mu$ так, что окружность $|\mu| = \beta^{-1/2}$ переходит в окружность $C_{\lambda,\beta}^{(1)}$, получаем

$$F_1(\lambda, \beta; x) = \frac{1}{2\pi\beta^{1/2}\lambda} \int\limits_{C^{(1)}_{\lambda,\beta}} \|x + (z-\lambda)R(A, z)x\|^2 \, |dz| =$$

$$= \frac{1}{2\pi\beta^{1/2}\lambda} \int\limits_{C^{(1)}_{\lambda,\beta}} \left\{\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}[(z-\lambda)(R(A, z)x, x)] + \beta\lambda^2\|R(A, z)x\|^2\right\} |dz|.$$

При этом

$$\int\limits_{C^{(1)}_{\lambda,\beta}} \|x\|^2 \, |dz| = 2\pi\beta^{1/2}\lambda\|x\|^2,$$

а согласно теореме о среднем для аналитических функций имеем

$$\int\limits_{C^{(1)}_{\lambda,\beta}} [(z-\lambda)(R(A, z)x, x)] \, |dz| = [(z-\lambda)(R(A, z)x, x)]\big|_{z=\lambda} = 0,$$

откуда и заключаем, что справедлива формула (23).

Как и в случае функции $F_1(\lambda, \beta; x)$, используя (21) и (15), для $F_2(\lambda, \beta; x)$ имеем равенство

$$F_2(\lambda, \beta; x) = \frac{\beta^{-1/2}\lambda}{2\pi} \int\limits_{C^{(2)}_{\lambda,\beta}} \left\|x + (z-\lambda^{-1})R(A, z)x\right\|^2 |dz| =$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\|x\|^2 + \frac{\beta^{-1/2}}{\pi} \mathrm{Re} \int\limits_{C^{(2)}_{\lambda,\beta}} (\lambda z-1)(R(A, z)x, x) \, |dz| +$$

$$+ \frac{\beta^{-1/2}\lambda}{2\pi} \int\limits_{C^{(2)}_{\lambda,\beta}} \left|z-\lambda^{-1}\right|^2 \|R(A, z)x\|^2 \, |dz|.$$

Отсюда и из равенства

$$\frac{\beta^{-1/2}}{\pi} \int\limits_{C^{(2)}_{\lambda,\beta}} (\lambda z-1)(R(A, z)x, x) \, |dz| = \frac{2\beta}{\lambda(1-\beta)^2}\left(R\left(A, \lambda^{-1}(1-\beta)^{-1}\right)x, x\right),$$

следующего из теоремы о среднем для аналитических функций, получаем формулу (24).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть оператор* $A \in E_-$ *и* V *— его преобразование Кэли. Тогда для любого* $x \in H$ *справедливо равенство* (5), *где параметры* $\lambda > 1$ *и* $r \in (0, 1)$ *связаны соотношением* (6).

Доказательство. Для $r \in (0, 1)$ и $x \in H$ введем в рассмотрение функции

$$F_j(r; x) = F_j(\lambda, \beta; x), \qquad \beta = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}, \quad \lambda = \frac{1+r^2}{1-r^2}.$$

Тогда с учетом введенных обозначений (18), (22) необходимо доказать, что выполняется равенство

$$(1-r^2)\{F_1(r; x) + F_2(r; x)\} + 2r^2\|x\|^2 = 2(1+r^2)S(r; x), \qquad r \in (0, 1).$$

Если параметры λ, r связаны с соотношением (6), то окружности $C^{(1)}_{\lambda,\beta}$, $C^{(2)}_{\lambda,\beta}$ из леммы 2 совпадают с окружностью $C(z_0, \rho_0)$, где z_0, ρ_0 определены в (18), и из выражений (23), (24) получаем

$$F_1(r;x) = \|x\|^2 + \frac{r}{\pi(1-r^2)} \int\limits_{C(z_0,\rho_0)} \|R(A,z)x\|^2\,|dz|, \tag{25}$$

$$F_2(r;x) = \frac{(1+r^2)^2}{(1-r^2)^2}\|x\|^2 + \frac{8r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^3}\operatorname{Re}\big(R(A,z_0)x,x\big) +$$

$$+ \frac{(1+r^2)^2}{4\pi r(1-r^2)} \int\limits_{C(z_0,\rho_0)} \left|z-z_0^{-1}\right|^2 \|R(A,z)x\|^2\,|dz|. \tag{26}$$

Из (25), (26) после несложных выкладок имеем

$$(1-r^2)[F_1(r;x)+F_2(r;x)] + 2r^2\|x\|^2 =$$

$$= 2\frac{(1+r^2)}{(1-r^2)}\|x\|^2 + \frac{8r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\operatorname{Re}\big(R(A,z_0)x,x\big) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi r}\int\limits_{C(z_0,\rho_0)} \left\{4r^2 + (1+r^2)^2\left|z-z_0^{-1}\right|^2\right\}\|R(A,z)x\|^2\,|dz|.$$

Сравнивая это выражение с (19), заключаем, что для доказательства теоремы достаточно установить справедливость равенства

$$4r^2 + (1+r^2)^2\left|z-z_0^{-1}\right|^2 = 2(1+r^2)|z-1|^2, \tag{27}$$

$$r\in(0,1), \quad \forall z\in C(z_0,\rho_0).$$

Для $z = z_0+\rho_0 e^{i\theta}\in C(z_0,\rho_0)$ имеем

$$4r^2 + (1+r^2)^2\left|z-z_0^{-1}\right|^2 = 4r^2 + (1+r^2)^2 z_0^{-2}\left|z_0^2+z_0\rho_0e^{i\theta}-1\right|^2 =$$

$$= 4r^2 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\left|2r+(1+r^2)e^{i\theta}\right|^2 =$$

$$= \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\left\{(1-r^2)^2 + \left|2r+(1+r^2)e^{i\theta}\right|^2\right\}.$$

Далее

$$|z-1|^2 = \left|z_0+\rho_0e^{i\theta}-1\right|^2 = \left|\frac{2r^2}{1-r^2}+\frac{2r}{1-r^2}e^{i\theta}\right|^2 = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\left|r+e^{i\theta}\right|^2.$$

Итак, равенство (27) эквивалентно равенству

$$(1-r^2)^2 + \left|2r+(1+r^2)e^{i\theta}\right|^2 = 2(1+r^2)\left|r+e^{i\theta}\right|^2,$$

$$r\in(0,1), \qquad \theta\in(0,2\pi),$$

справедливость которого вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$(1-r^2)^2 + \left|2r+(1+r^2)e^{i\theta}\right|^2 = \big(2r+(1+r^2)\cos\theta\big)^2 + (1+r^2)^2\sin^2\theta =$$

$$= 2(1+r^2)^2 + 4r(1+r^2)\cos\theta =$$

$$= 2(1+r^2)\big[(1+r^2)+2r\cos\theta\big] = 2(1+r^2)\left|r+e^{i\theta}\right|^2.$$

Теорема доказана.

3. Оценки норм степеней преобразования Кэли генератора ограниченной полугруппы. Прежде всего отметим, что теорема 1 и лемма 1 дают возможность установить справедливость оценки (2).

Теорема 3. *Пусть оператор* $A \in \mathcal{G}$. *Тогда для норм степеней преобразования Кэли* V *оператора* A *выполняется оценка* (2).

Доказательство. Отметим, что на основании соотношений (12) и леммы 1 с функциями $g_j(r) = (1-r)\left|\ln(1-r)\right|$, $j = 1, 2$, для доказательства теоремы достаточно установить, что двойной интеграл $U(r; x)$ в (12) оценивается при $\|x\| \le 1$, $r \in [1/2, 1)$ величиной $c\left|\ln(1-r)\right|$, где постоянная c не зависит от x и r.

Запишем функцию $u(s, t; r)$ из (12) в виде

$$u(s,t;r) = (1-r)^2 I_1\left(4r\varepsilon\sqrt{st}\right) +$$

$$+ (1+r^2)\left[I_0\left(4r\varepsilon\sqrt{st}\right) - I_1\left(4r\varepsilon\sqrt{st}\right)\right] - r\frac{\left(\sqrt{s}-\sqrt{t}\right)^2}{\sqrt{st}} I_1\left(4r\varepsilon\sqrt{st}\right)$$

и воспользуемся оценками для модифицированных функций Бесселя [10]

$$0 \le I_1(z) \le c\frac{e^z}{z^{1/2}}, \quad 0 \le I_0(z) - I_1(z) \le \frac{e^z}{z^{3/2}}, \quad z \ge 0,$$

справедливыми для некоторого $c > 0$. Тогда при $r \in [1/2, 1)$ получим

$$|u(s,t;r)| \le c_1 \frac{e^{4r\varepsilon\sqrt{st}}}{\varepsilon^{1/2}(st)^{1/4}}\left[(1-r)^2 + \frac{1}{\varepsilon(st)^{1/2}} + \frac{\left(\sqrt{s}-\sqrt{t}\right)^2}{(st)^{1/2}}\right].$$

Далее, используя (9) и выполняя замены переменных

$$s = \varepsilon^{-1}\rho^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad t = \varepsilon^{-1}\rho^2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \rho > 0, \quad \rho \in (0, \pi),$$

при $\|x\| \le 1$ получаем оценку

$$|U(r;x)| \le c_2 M^2 \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\left[(1+r^2)-2r\sin\theta\right]\rho^2} \times$$

$$\times \sqrt{\sin\theta}\left[(1-r)^2\rho^2 + \frac{1+\rho^2(1-\sin\theta)}{\sin\theta}\right] d\rho\, dt.$$

Переходя здесь к переменным интегрирования

$$\theta = \theta, \quad \tau = \left[(1+r^2) - 2r\sin\theta\right]^{1/2}\rho \in (0, \infty),$$

имеем

$$|U(r;x)| \le c_2 M^2 \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\tau^2}\left\{\frac{(1-r)^2\tau^2}{(1+r^2) - 2r\sin\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\theta}\left[1 + \frac{\tau^2(1-\sin\theta)}{(1+r^2) - 2r\sin\theta}\right]\right\} d\tau \frac{\sqrt{\sin\theta}\, d\theta}{\sqrt{(1+r^2) - 2r\sin\theta}} \le$$

$$\le c_3 M^2 \int_0^\pi \left\{\frac{(1-r)^2}{\left[(1+r^2) - 2r\sin\theta\right]^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}\left[(1+r^2) - 2r\sin\theta\right]^{1/2}} + \right.$$

$$+ \frac{1-\sin\theta}{\sqrt{\sin\theta}\left[(1+r^2) - 2r\sin\theta\right]^{3/2}}\Bigg\} d\theta.$$

Отсюда, используя неравенство

$$(1+r^2) - 2r\sin\theta \geq (1-r)^2 + (1-\sin\theta), \quad r \in [1/2, 1),$$

элементарным образом при $r \in [1/2, 1)$ получаем требуемую оценку

$$|U(r; x)| \leq c_4 M^2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}\left[(1-r)^2 + (1-\sin\theta)\right]^{1/2}} \leq c_5 M^2 |\ln(1-r)|.$$

Теорема доказана.

Если оператор $A \in \mathcal{G}$, то A^* также порождает равномерно ограниченную полугруппу операторов и $(e^{tA})^* = e^{tA^*}$, $t \geq 0$ [11] (гл. 4). При этом в силу оценок (11) при $\lambda > 0$ и $\beta \in (0, 1)$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\|\lambda^n R^n(A, \lambda)x\right\|^2 \beta^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\lambda^n R^n(A^*, \lambda)x\right\|^2 \beta^n \leq 2M^2 \|x\|^2 (1-\beta).$$

Отсюда, а также из теоремы 2 и следствия 1 получаем следующий критерий степенной ограниченности преобразования Кэли генератора равномерно ограниченной полугруппы операторов.

Теорема 4. *Натуральные степени преобразования Кэли V оператора $A \in \mathcal{G}$ равномерно ограничены тогда и только тогда, когда для любого $x \in H$ выполняется неравенство* (4).

Если оператор $A \in \mathcal{G}$ и $\ker A = \{0\}$, то существует оператор $A^{-1} \in E(H)$ [12]. При этом $AR(A, \lambda^{-1}) = -\lambda R(A^{-1}, \lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и условие (4) принимает вид (4′). Отсюда и из теоремы 4 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть оператор $A \in \mathcal{G}$, причем $\ker A = \{0\}$ и оператор A^{-1} также порождает равномерно ограниченную полугруппу. Тогда для норм степеней преобразования Кэли V оператора $A \in \mathcal{G}$ выполняется оценка* (3).

Отметим, что условия следствия 3 выполняются в случае, если оператор A порождает ограниченную в некотором секторе Σ_ϕ аналитическую полугруппу операторов [13, 14]. Следующая теорема показывает, что для того чтобы преобразование Кэли оператора $A \in \mathcal{G}$ было равностепенно ограниченным, достаточно предположить лишь аналитичность e^{tA}.

Теорема 5. *Пусть оператор $A \in \mathcal{G}$, причем полугруппа $T(t) = e^{tA}$ является аналитической в некотором секторе Σ_ϕ. Тогда для норм степеней преобразования Кэли V оператора A справедлива оценка* (3).

Доказательство. Воспользуемся следствием 2. Из условия $A \in \mathcal{G}$ и выражения (25) следует, что для любого $x \in H$ выполняется оценка

$$(1-r) \int_{C(z_0, \rho_0)} \|R(A, z)x\|^2 |dz| \leq c\|x\|^2 < \infty, \quad r \in (0, 1), \tag{28}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от r. Далее, поскольку полугруппа $T(t)$ является аналитической, то найдутся такие $a \geq 0$, $\psi \in (\pi/2, \pi)$ и $c > 0$, что для резольвенты оператора A выполняется оценка [3]

$$\| R(A, z) \| \leq \frac{c}{|z-a|}, \quad z \in \Sigma_{a, \psi} = \{z : |\arg(z-a)| \leq \psi\}. \tag{29}$$

Исходя из (29), разобьем контур интегрирования $C(z_0, \rho_0)$ на две части:

$$C^{(+)}(z_0, \rho_0) = \{z \in C(z_0, \rho_0) : z \in \Sigma_{2a; \psi}\},$$

$$C^{(-)}(z_0, \rho_0) = C(z_0, \rho_0) \setminus C^{(+)}(z_0, \rho_0).$$

Тогда в силу (28), (29) имеем оценку

$$(1-r) \int\limits_{C(z_0, \rho_0)} |z-1|^2 \| R(A, z)x \|^2 |dz| \leq$$

$$\leq c \| x \|^2 + (1-r) \int\limits_{C^{(+)}(z_0, \rho_0)} |z|^2 \| R(A, z)x \|^2 |dz| \leq$$

$$\leq c_1 \| x \|^2 \left\{ 1 + (1-r) \int\limits_{C^{(+)}(z_0, \rho_0)} \frac{|z|^2}{|z-a|^2} |dz| \right\} \leq c_2 \| x \|^2 \tag{30}$$

с постоянной $c_2 > 0$, не зависящей от $r \in (0, 1)$. Из оценки (30) и аналогичной интегральной оценки для резольвенты сопряженного оператора A^* (оператор A^* также принадлежит $\mathcal{G}$ и полугруппа e^{tA^*} является аналитической в секторе Σ_ϕ) на основании следствия 2 получаем утверждение теоремы.

1. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 432 с.
2. *Butzer P. L., Westphal U.* On the Caley transform and semigroup operators // Proc. Int. Conf. Hilbert Space Operators and Operator Algebras (Tihany, Sept. 14 – 18, 1970). – P. 89 – 97.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
6. *Mazani P., Robertson J.* The time-domain analysis of a continuous parameter weakly stationary stochastic process // Pacif. J. Math. – 1962. – **12**. – P. 1361 – 1378.
7. *Набоко С. Н.* Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам // Функцион. анализ и прил. – 1984. – **18**, вып. 1. – С. 16 – 27.
8. *van Casteren J. A.* Boundedness properties of resolvents and semigroup of operators // Linear Operators (Banach Center Publ.). – Warszawa: Inst. Math. Pol. Acad. Sci., 1997. – **38**. – P. 59 – 74.
9. *Gomilko A. M.* On the characterization of power bounded operators // 17th Int. Conf. Operator Theory (Timisoara, Romania, June 1998): Book Abstrs. – p. 11 – 12.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 296 с.
11. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
12. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1990. – **28**. – С. 87 – 202.
13. *de Laubenfels R.* Inverses of generators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – **104**, № 2. – P. 443 – 448.
14. *Горбачук М. Л., Мацишин И. Т.* Поведение на бесконечности решений дифференциального уравнения первого порядка параболического типа в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1990. – **312**, № 3. – С. 521 – 524.

Получено 21.07.2003