

УДК 517.53

А. А. Довгошей, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О семействах функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами

Исследуется задача о приближении функций из классов Харди ограниченными аналитическими функциями. Доказана теорема, характеризующая множества функций с равностепенно абсолютно непрерывными интегралами как предельные точки семейства ограниченных подмножеств пространства H^∞ .

Досліджується задача про наближення функцій із класів Харді обмеженими аналитичними функціями. Доведена теорема, що характеризує множини функцій з одностайно абсолютно неперервними інтегралами як граничні точки сім'ї обмежених підмножин простору H^∞ .

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\text{exr}_m X$ — семейство замкнутых ограниченных подмножеств пространства X , $F_i \in \text{exr}_m X$, $i = 1, 2$.

Определение 1. Отклонением множества F_2 от множества F_1 называют величину

$$\alpha(F_1, F_2) = \inf \{ \varepsilon : \varepsilon > 0, F_2 \subset O_\varepsilon F_1 \}, \quad (1)$$

где $O_\varepsilon F_1$ — ε -окрестность множества F_1 [1, с. 98].

Следующие простые соотношения справедливы для любых F_1, F_2, F_3 из $\text{exp}_m X$:

- $a_1) 0 \leq \alpha(F_1, F_2) < \infty;$
- $a_2) (\alpha(F_1, F_2) = 0) \Leftrightarrow (F_1 \supset F_2);$
- $a_3) \alpha(F_1, F_3) \leq \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3).$

Очевидно, в силу отсутствия симметрии отклонение не является метрикой на $\text{exp}_m X$. Однако, если для множества $\mathfrak{D} \subset \text{exp}_m X$ определить его замыкание $\text{cl}_\alpha(\mathfrak{D}) \subset \text{exp}_m X$ соотношением

$$(F \in \text{cl}_\alpha(\mathfrak{D})) \Leftrightarrow (\inf \{ \alpha(F_i, F) : F_i \in \mathfrak{D} \} = 0), \quad (2)$$

то, используя $(a_1) - (a_3)$, легко показать, что оператор $\text{cl}_\alpha(\cdot)$ удовлетворяет аксиомам замыкания Куратовского и определяет на $\text{exp}_m X$ топологическую структуру.

Пусть X — компакт. Для множества $\text{exp}_c X$, состоящего из компактных подмножеств X (при этом семейства $\text{exp}_c X$ и $\text{exp}_m X$ совпадают с $\text{exp} X$ — множеством всех замкнутых подмножеств X) можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. Мнозначное отображение Φ топологического пространства Y в X , ставящее в соответствие точкам из Y замкнутые подмножества X , будет полунепрерывным снизу (т. е. таким, что для любого $A \in \text{exp} X$ множество

$$\{ y \in Y : \Phi(y) \in A \}$$

замкнуто в Y) тогда и только тогда, когда однозначное отображение

$$\Phi : Y \rightarrow \text{exp} X$$

будет непрерывным в топологии, порожденной на пространстве $\text{exp} X$ отклонением α .

Этот факт вполне аналогичен тому, что топология Вьеториса на $\text{exp}_c X$ порождается метрикой Хаусдорфа, и может быть доказан с помощью сходных рассуждений [1, с. 138]. Таким образом, отклонение α порождает λ -топологию на пространстве $\text{exp} X$ [2, с. 183]. Это обозначение будет использовано ниже и в случае некомпактного пространства X для топологии, задаваемой на $\text{exp}_m X$ оператором $\text{cl}_\alpha(\cdot)$.

Пусть теперь X — класс Харди аналитических в единичном круге D функций f . Класс H^p при $p \geq 1$ является пространством Банаха, а при $p < 1$ — полным метрическим пространством с нормой (метрикой), определяемой по формуле

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad (3)$$

$$\rho(f, g) = (\|f - g\|_p)^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it}) - g(e^{it})|^p dt, \quad 0 < p < 1.$$

Обозначим через B_r^∞ замкнутый шар радиуса r в H^∞ , т. е.

$$B_r^\infty = \{ f \in H^\infty : \|f\|_\infty \leq r \}, \quad (4)$$

а через \mathfrak{B} — семейство всех таких шаров:

$$\mathfrak{B} = \{ B_r^\infty : 0 < r < \infty \}. \quad (5)$$

Очевидно, $\mathfrak{B} \subset \text{exp}_m H^p$ при любом p из $(0, \infty]$.

Основное внимание в настоящей работе будет уделено задаче описания предельных точек семейства \mathfrak{B} в λ -топологии пространства $\text{exp}_m H^p$ при $0 < p < \infty$.

Прежде чем переходить к изучению сформулированной задачи, отметим некоторые простые, связанные с ней, факты.

Пусть \mathfrak{M} — семейство всех подмножеств, ограниченных в H^∞ и замкнутых в H^p . Тогда $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{B}$ и $\text{cl}_\alpha(\mathfrak{M}) = \text{cl}_\alpha(\mathfrak{B})$. Если рассмотреть семейство \mathfrak{B}_N , состоящее из шаров с целочисленными радиусами, то и в этом случае $\text{cl}_\alpha(\mathfrak{B}_N) = \text{cl}_\alpha(\mathfrak{M})$. Эти равенства без труда выводятся из (2).

Так как внутренность любого шара B_r^∞ пуста в H^p при $0 < p < \infty$, то $H^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^\infty$ есть F_σ множество первой категории, всюду плотное в H^p .

Если m — нормированная линейная мера Лебега на единичной окружности T , то пространство H^p совпадает с $L^p(m, T)$ -замыканием дискалгебры A_0 — множеством всех функций, непрерывных в замкнутом круге D и аналитических в открытом круге D . Аналогично, при любом r из $(0, \infty)$, шар $B_r^\infty(4)$ есть $L^p(m, T)$ замыкание $B_r = : B_r^\infty \cap A_0$ — шара радиуса r из A_0 .

Эти замечания позволяют переформулировать рассматриваемую задачу для более широкого класса функциональных пространств, включающего в себя и пространства Харди H^p .

З а д а ч а 1. Пусть W — компакт, A — равномерная алгебра непрерывных на W функций с нормой

$$\|f\|_\infty = : \max \{|f(z)| : z \in W\},$$

ω — положительная конечная борелевская мера на W , G^p — замыкание алгебры A в $L^p(\omega, W)$. Если \bar{B}_r есть $L^p(\omega, W)$ -замыкание шара радиуса r из A , то какие множества из $\text{exp}_m G^p$ будут являться предельными точками семейства

$$\tilde{\mathfrak{B}} = : \{\bar{B}_r : 0 < r < \infty\} \quad (6)$$

в λ -топологии пространства $\text{exp}_m G^p$?

Другими словами, для каких множеств Z из $L^p(\omega, W)$ может быть построена последовательность ограниченных множеств $\{M_n\}_{n=1}^\infty$, $M_n \subset A$ так, чтобы $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n \in \mathbb{N})$:

$$(\forall f \in Z), (\exists g \in M_n), \|f - g\|_{G^p} < \varepsilon?$$

Пусть F — семейство функций из $L^p(\omega, W)$.

О п р е д е л е н и е 2. Следуя [3, с. 144], будем говорить, что семейство функций

$$|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$$

имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого ω -измеримого подмножества E множества W и любой $f \in F$ из неравенства $\omega(E) \leq \delta$ следует неравенство

$$\int_E |f|^p d\omega \leq \varepsilon.$$

Ниже сформулированы и доказаны простые предложения, необходимые для дальнейшего, при этом использованы обозначения, принятые в задаче 1.

П р е д л о ж е н и е 2. Если множество F является предельной точкой семейства \mathfrak{B} (6) в λ -топологии пространства $\text{exp}_m G^p$, $0 < p < \infty$,

то семейство функций $|F|^p$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Выберем $r > 0$ таким, что

$$\sup_{f \in F} \inf_{g \in \bar{B}_r} \int_{\bar{W}} |f - g|^p d\omega \leq \varepsilon (2)^{-p-1}.$$

Пусть теперь $2\delta = (2r)^{-p}\varepsilon$, тогда при любых $f \in F$ и $E \subset W$ из неравенства $\omega(E) \leq \delta$ следует

$$\int_E |f|^p d\omega \leq 2^p \left(\int_E |f - g|^p d\omega + \int_E |g|^p d\omega \right) \leq 2^p (\varepsilon (2)^{-p-1} + r^p \omega(E)) \leq \varepsilon.$$

В соответствии с определением 2 семейство $|F|^p$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Предложение 3. Пусть V — компактное подмножество G^p , тогда V — предельная точка семейства \mathfrak{B} в λ -топологии пространства $\text{exp}_m G^p$, $0 < p < \infty$.

Доказательство. Так как G^p является $L^p(\omega, W)$ -замыканием множества A , то A всюду плотно в G^p . Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а $O_\varepsilon A$ — ε -окрестность A в G^p . Тогда

$$G^p = O_\varepsilon A = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_\varepsilon \bar{B}_n.$$

В силу того, что V — компакт, а $\{O_\varepsilon \bar{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — открытое покрытие V , найдется натуральное k такое, что

$$V \subset \bigcup_{n=1}^k O_\varepsilon \bar{B}_n = O_\varepsilon \bar{B}_k.$$

В соответствии с определением 1 V является предельной точкой семейства \mathfrak{B} в λ -топологии пространства $\text{exp}_m G^p$.

Следствие 1. Для любого компактного множества $V \subset G^p$ семейство

$$|V|^p = \{|f|^p : f \in V\}$$

имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Доказательство следует из предложений 2 и 3.

Непосредственно из определения 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть $F \in \text{exp } G^p$, тогда если семейство $|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то семейство F равномерно ограничено в $L^p(\omega, W)$, т. е. $F \in \text{exp}_m G^p$.

Доказательство. Покроем W открытыми множествами $\{E_i\}$ такими, что $\omega(E_i) \leq \delta$ при всех $E_i \in \{E_i\}$. Выберем из покрытия $\{E_i\}$ конечное подпокрытие $\{E_{i_l}\}_{l=1}^n$. Для любой $f \in F$

$$\int_W |f|^p d\omega \leq \sum_{l=1}^n \int_{E_{i_l}} |f|^p d\omega \leq n\varepsilon.$$

Если на W задана ω -измеримая функция f , то для $\lambda \geq 0$ положим

$$m_f(\lambda) = : \omega \{t \in W : |f(t)| \geq \lambda\}, \quad (7)$$

$m_f(\lambda)$ — функция распределения функции f .

Предложение 5. Пусть семейство

$$|F|^p = \{|f|^p : f \in F\},$$

где $F \in \text{exp } G^p$, имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, тогда существует монотонно убывающая функция $\kappa(\lambda)$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \kappa(\lambda) = 0$ та-

кая, что для любой $f \in F$

$$m_f(\lambda) \leq \frac{\kappa(\lambda)}{\lambda^p}. \quad (8)$$

Доказательство. По неравенству Чебышева [4, с. 30]

$$m_f(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{W}} |f|^p d\omega.$$

В силу предложения 4

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{W}} |f|^p d\omega : f \in F \right\} \leq k < \infty,$$

т. е.

$$m_f(\lambda) \leq \frac{k}{\lambda^p}.$$

Если $E_f(\lambda) = \{t \in \mathbb{W} : |f(t)| \geq \lambda\}$, то, используя определение (2), получаем

$$\kappa(\lambda) = \sup \left\{ \int_{E_f(\lambda)} |f|^p d\omega : f \in F \right\}, \quad (9)$$

где $\kappa(\lambda)$ удовлетворяет всем необходимым условиям.

При любом $f \in F$

$$\lambda^p m_f(\lambda) \leq \int_{E_f(\lambda)} |f|^p d\omega \leq \kappa(\lambda).$$

В следующей теореме дано решение задачи 1 для пространств Харди, т. е. при $\mathbb{W} = \bar{D}$, $A = A_0$, $G^p = H^p$.

Теорема 1. *Замкнутое подмножество F пространства H^p , $0 < p < \infty$, будет предельной точкой семейства \mathfrak{B} (5) в λ -топологии пространства $\text{exp}_m H^p$ тогда и только тогда, когда семейство функций*

$$|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$$

имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Доказательство. Если F — предельная точка \mathfrak{B} в λ -топологии пространства $\text{exp}_m H^p$, то в силу предложения 2 при любом p из $(0, \infty)$ семейство $|F|^p = \{|f|^p : f \in F\}$ имеет абсолютно равностепенно непрерывные интегралы.

Обратно. Пусть $|F|^p$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, тогда в силу предложения 4 $F \in \text{exp}_m H^p$. Покажем, что $F \in \text{cl}_\alpha(\mathfrak{B})$.

Произвольная функция $f(z)$ из F может быть разложена на внутренний и внешний сомножители [4, с. 80] по формуле

$$f(z) = e^{i\theta} B(z) \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t)\right) \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(t)| dt\right). \quad (10)$$

Возьмем в шаре B_n^∞ (см. формулу (4)) функцию $f_n(z)$ вида

$$\tilde{f}_n(z) = e^{i\theta} B(z) \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t)\right) \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f_n(t)| dt\right),$$

где $f_n(t) = \min(|f(t)|, n)$, а внутренний сомножитель такой же, как и в (10).

Пусть $\tilde{f}(z)$ — внешний сомножитель функции $f(z)$:

$$\tilde{f}(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(t)| dt\right),$$

■ $\tilde{f}_n(z)$ — внешний сомножитель $f_n(z)$:

$$\tilde{f}_n(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f_n(t)| dt\right).$$

Тогда при всех $z \in D$

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |\tilde{f}(z) - \tilde{f}_n(z)|$$

■

$$\|f - f_n\|_p \leq \|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_p.$$

Оценим $\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_p$.

Положим при $z \in T$

$$\tilde{f}(z) = |f| e^{i\tau}, \quad \tilde{f}_n(z) = |f_n| e^{i\tau_n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_p)^p &= \int_T \left| |f| e^{i\tau} - |f_n| e^{i\tau_n} \right|^p dm \leq 2^p \left(\int_T \left| |f| e^{i\tau} - |f_n| e^{i\tau} \right|^p dm + \right. \\ &+ \left. \int_T |f_n|^p |e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p dm \right) \leq 2^p \left(\int_{E_n} (|f| - n)^p dm + n^p \int_T |e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p dm \right), \end{aligned}$$

где $E_n = \{z \in T : |f(z)| \geq n\}$.

Используя соотношение (9), получаем

$$\int_{E_n} (|f| - n)^p dm \leq \int_{E_n} |f|^p dm \leq \kappa(n).$$

Функции τ и τ_n совпадают с мнимыми частями функций $\ln \tilde{f}$ и $\ln \tilde{f}_n$ соответственно. Это однозначные гармонические функции в единичном круге. Легко видеть, что

$$|e^{i\tau} - e^{i\tau_n}| = ((\cos \tau - \cos \tau_n)^2 + (\sin \tau - \sin \tau_n)^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} |\tau - \tau_n|.$$

Следовательно,

$$\int_T |e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p dm \leq 2^{p/2} \int_T |\tau - \tau_n|^p dm.$$

При $p > 1$, используя теорему Риса [4, с. 117], имеем

$$\int_T |e^{i\tau} - e^{i\tau_n}|^p dm \leq c_p \int_T |\ln |f| - \ln |f_n||^p dm = c_p \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} \left(\ln \left| \frac{f(t)}{n} \right| \right)^p dt,$$

где c_p зависит только от p . Воспользовавшись функцией $m_f(\lambda)$ (7), перепишем последний интеграл в виде

$$-\int_n^\infty \left(\ln \frac{\lambda}{n} \right)^p dm_f(\lambda) = p \int_n^\infty \lambda^{-1} m_f(\lambda) \left(\ln \frac{\lambda}{n} \right)^{p-1} d\lambda = p \int_1^\infty m_f(n\lambda) \lambda^{-1} (\ln \lambda)^{p-1} d\lambda.$$

В силу неравенства (8)

$$\int_1^\infty m_f(n\lambda) \lambda^{-1} (\ln \lambda)^{p-1} d\lambda \leq \frac{\kappa(n)}{n^p} \int_1^\infty \lambda^{-p-1} (\ln \lambda)^{p-1} d\lambda = \frac{\kappa(n)}{n^p} \exp(-p \ln p) \Gamma(p).$$

И, следовательно, при $p > 1$

$$\|f - f_n\|_p \leq K_{p,F} (\kappa(n))^{1/p}, \quad (11)$$

где $K_{p,F}$ — константа, не зависящая от $f \in F$. Для $p > 1$ теорема доказана.

Пусть теперь $0 < p \leq 1$, а $F \in \exp_m H^p$ и $F^p = \{|f|^p : f \in F\}$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы.

Не умаляя общности, можно считать, что функции из F не имеют нулей в D . В самом деле, если теорема доказана для таких семейств, то общий случай можно получить, умножая приближающие функции на соответствующие произведения Бляшке.

Допустим, что $1/2 < p \leq 1$. Если $f \in F \subset H^p$, то $\psi =: (f)^{1/2} \in H^{2p}$, $2p > 1$, и семейство

$$\{|\psi|^{2p} : \psi = f^{1/2}, f \in F\}$$

имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы. По доказанному выше при некотором натуральном n множество $\{\psi : \psi^2 \in F\}$ содержится в ε -окрестности шара B_n^∞ (окрестность шара берется в метрике пространства H^{2p}), т. е.

$$(\forall \psi^2 \in F) (\exists g_n \in B_n^\infty) : \int_{\bar{I}} |\psi - g_n|^{2p} dm < \varepsilon^{2p}.$$

Если $f \in F$, $f = \psi^2$, $g_{n^2} =: (g_n)^2$, то

$$\begin{aligned} (\|f - g_{n^2}\|_p)^p &= \int_{\bar{I}} |\psi^2 - g_n^2|^p dm \leq \left(\int_{\bar{I}} |\psi + g_n|^{2p} dm \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_{\bar{I}} |\psi - g_n|^{2p} dm \right)^{1/2} \leq C_{p,F} \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Здесь $C_{p,F}$ равномерно ограничена при всех $f \in F$ в силу равномерной ограниченности F в H^p .

Таким образом, теорема доказана и при $1/2 < p < \infty$. Повторяя рассуждения по индукции, можно получить доказательство для $(1/2)^n < p < \infty$, где n — произвольное натуральное число, т. е. при всех $0 < p < \infty$.

1. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.— 252 с.
2. Куратовский К. Топология: В 2-х т.— М.: Мир, 1966.— Т. 1.— 594 с.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.— 480 с.
4. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.— М.: Мир, 1984.— 470 с.

Получено 09.10.91

УДК 517.956

Е. А. Калита, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Свойства решений полулинейных эллиптических систем недивергентного вида

Для полулинейных эллиптических систем, удовлетворяющих аналогу условия Кордеса получены результаты по несуществованию конечных и бесконечных особых точек.

Для напівлінійних еліптичних систем, які задовольняють аналогу умови Кордеса, одержані результати про неіснування скінченних і нескінченних особливих точок.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n \cup \infty$ рассматривается эллиптическая система

$$A^i(x, u, Du, D^2u) = f^i(u), \quad i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

при выполнении условий

$$\exists K < 1, \beta > 0 : \sum_I \left| \sum_{k=1}^n \eta_{kk}^I - \beta A^i(x, u, \xi, \eta) \right|^2 \leq K |\eta|^2, \quad (2)$$