УДК 517.98

А. А. Ковалевский, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О сходимости решений вариационных неравенств с двусторонними препятствиями в перфорированных областях

Устанавливаются условия и характер сходимости решений эллиптических вариационных неравенств с двусторонними препятствиями в перфорированных областях.

Установлюються умови і характер збіжності розв'язків еліптичних варіаційних нерівностей з двосторонніми перешкодами в перфорованих областях.

В настоящей работе изучается сходимость решений $u_s \in V_s$ вариационных неравенств $\langle A_s u_s - f_s, v - u_s \rangle \geqslant 0 \ \ \forall v \in V_s$, где A_s — эллиптический оператор, действующий из соболевского пространства $W^{1,m}(\Omega_s)$ в сопряженное с ним пространство $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$, $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, V_s — множество функций $v \in W^{1,m}(\Omega_s)$, удовлетворяющих ограничению $\varphi_s \leqslant v \leqslant \psi_s$; Ω_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — перфорированные области в $\mathbb{R}^n$. Основное условие, при котором устанавливается сходимость последовательности $\{u_s\}$, — условие G-сходимости операторов A_s. При этом условии результаты о сходимости решений вариационных неравенств с односторонними препятствиями получены в [1, 2].

1. Предположения, обозначения и определения. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω. Предполагается, что существуют постоянная $\nu > 1$, конечные множества J_s $(s \in \mathbb{N})$, точки $x_s^j \in \Omega$ и числа $r_s^j > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ j \in J_s)$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} B_s^j,$$

$$\lim_{s\to\infty} \max_{j \in J_s} r_s^j = 0, \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall j \in J_s \quad 2(\nu - 1) r_s^j < \rho_s^j,$$

где B_s^j — замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j, ρ_s^j—расстояние от B_s^j до множества $\bigcup\limits_{J_s \ni l \neq j} B_s^l \cup \partial\Omega$.

Пусть $m > 1$, для любого $s \in \mathbb{N}$ q_s — отображение $W^{1,m}(\Omega)$ в $W^{1,m}(\Omega_s)$ такое, что для $u \in W^{1,m}(\Omega)$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$. Через $\mathcal{P}$ обозначим множество всех последовательностей $\{p_s\}$, удовлетворяющих условиям: для любого $s \in \mathbb{N}$ p_s — линейное непрерывное отображение $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $W^{1,m}(\Omega)$; $\sup\limits_s \| p_s \| < \infty$; если $s \in \mathbb{N}$, $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$, то $q_s(p_s u) = u$.

Из предположений относительно областей Ω_s вытекает, что $\mathcal{P} \neq \varnothing$ и выполняется условие:

$$\text{если } u \in W^{1,m}(\Omega) \text{ и } \varliminf_{s \to \infty} \| q_s u \|_{L^m(\Omega_s)} = 0, \text{ то } u = 0 \text{ почти всюду на } \Omega. \quad (1)$$

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо сходится к $u \in W^{1,m}(\Omega)$, если*

$$\sup_s \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty, \quad \lim_{s \to \infty} \| u_s - q_s u \|_{L^m(\Omega_s)} = 0.$$

Заметим, что если последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ удовлетворяет неравенству $\sup\limits_s \| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} < \infty$, то у этой последовательности существуют слабо сходящиеся подпоследовательности. Это легко установить, используя непустоту множества $\mathcal{P}$.

Определение. *Будем говорить, что последовательность $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ сильно сходится к $u \in W^{1,m}(\Omega)$, если*

$$\lim_{s \to \infty} \| u_s - q_s u \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0.$$

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, если из слабой сходимости произвольной последовательности $u_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ к $u \in W^{1,m}(\Omega)$ следует, что $\lim\limits_{s \to \infty} \langle f_s, u_s \rangle = \langle f, u \rangle$.*

Заметим, что если последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к какому-либо элементу $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$, то последовательность норм $\| f_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}$ ограничена. Кроме того, отметим, что для всякого элемента $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$ существует последовательность $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, сильно сходящаяся к f. В качестве такой последовательности можно взять последовательность $\{f \circ p_s\}$, где $\{p_s\} \in \mathcal{P}$.

2. G-сходимость эллиптических операторов. Пусть $m' = \dfrac{m}{m-1}$, $0 < m_1 \leqslant \min(m, m')$, $m_2 \geqslant \max(m, 2)$, $c \geqslant 1$, и пусть для любых $s \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a_i^s — каратеодориевская функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, причем для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^n$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{n} | a_i^s(x, 0, 0) | = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} | a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta') |^{m'} \leqslant c(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_1} \times$$
$$\times (|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_1} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^s(x, \xi, \eta) - a_i^s(x, \xi', \eta'))(\eta_i - \eta_i') + (a_0^s(x, \xi, \eta) - a_0^s(x, \xi', \eta'))(\xi - \xi') \geqslant$$
$$\geqslant c^{-1}(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m-m_2}(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|)^{m_2}. \quad (4)$$

Определим операторы A_s. Если $s \in \mathbb{N}$, то A_s — оператор из $W^{1,m}(\Omega_s)$ в $(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ такой, что для любых $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\langle A_s u, v\rangle = \int\limits_{\Omega_s} \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^s(x, u, \nabla u)\, \partial_i v + a_0^s(x, u, \nabla u)\, v\right\} dx.$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $u, v \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\| A_s u - A_s v\|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \lambda\,(1 + \|u\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \|v\|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_1}\, \|u - v\|^{m_1}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \tag{5}$$

$$\langle A_s u - A_s v, u - v\rangle \geqslant \lambda^{-1}(1 + \|u\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \|v\|_{W^{1,m}(\Omega_s)})^{m-m_2} \times$$

$$\times \|u - v\|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)}, \tag{6}$$

где $\lambda > 1$ и зависит только от $n, m, m_2, c, \operatorname{mes}\Omega$. Положив $\mu = 2^{m_2}\lambda$, из неравенств (5), (6) и равенства $A_s 0 = 0$ выводим, что для $s \in \mathbb{N}$ и $u \in W^{1,m}(\Omega_s)$

$$\|A_s u\|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} \leqslant \mu\, \|u\|^{m}_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \mu, \tag{7}$$

$$\langle A_s u, u\rangle \geqslant \mu^{-1}\, \|u\|^{m}_{W^{1,m}(\Omega_s)} - \mu^{-1}. \tag{8}$$

Из неравенств (5) — (8) вытекает, что операторы A_s обратимы [3]. Используя (8) и неравенство Юнга, устанавливаем, что для $s \in \mathbb{N}$ и $f \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$

$$\|A_s^{-1} f\|^{m}_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leqslant \mu^{m'}\, \|f\|^{m'}_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} + m'. \tag{9}$$

Определение 4. *Будем говорить, что последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$, если из сильной сходимости произвольной последовательности $f_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ к $f \in (W^{1,m}(\Omega))^*$ следует, что последовательность $\{A_s^{-1} f_s\}$ слабо сходится к $A^{-1} f$.*

Это определение является аналогом определения G-сходимости операторов с единой областью задания из [4].

Заметим, что если последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$, то оператор A строго монотонен на $W^{1,m}(\Omega)$]. Это нетрудно показать, используя неравенство (6).

3. Сходимость решений вариационных неравенств с двусторонними препятствиями. Пусть $\varphi_s, \psi_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$—последовательности, сильно сходящиеся соответственно к $\varphi, \psi \in W^{1,m}(\Omega)$; $\alpha > 0$. Будем предполагать, что выполняется условие

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \varphi_s + \alpha \leqslant \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s. \tag{10}$$

Положим

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad V_s = \{v \in W^{1,m}(\Omega_s) : \varphi_s \leqslant v \leqslant \psi_s \text{ почти всюду на } \Omega_s\},$$

$$V = \{v \in W^{1,m}(\Omega) : \varphi \leqslant v \leqslant \psi \text{ почти всюду на } \Omega\}.$$

Лемма 1. *Пусть последовательность $v_s \in W^{1,m}(\Omega_s)$ слабо сходится к $v \in W^{1,m}(\Omega)$, N_1 — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ и $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$. Тогда $v \in V$.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь последовательность $\{p_s\} \in \mathcal{P}$ и положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$w_s^+ = \max\{p_s v_s, \varphi\}, \quad w_s^- = \min\{p_s v_s, \psi\}.$$

Ясно, что существуют возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset N_1$ и $w^\pm \in$

$\in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что

$$w^{\pm}_{s_l} \to w^{\pm} \text{ слабо в } W^{1,m}(\Omega). \tag{11}$$

Учитывая, что $\forall s \in N_1$ $v_s \in V_s$, для $s \in N_1$ почти всюду на Ω_s имеем

$$|q_s w^{+}_s - v_s| \leqslant |\varphi_s - q_s\varphi|, \quad |q_s w^{-}_s - v_s| \leqslant |\psi_s - q_s\psi|.$$

Отсюда и из сильной сходимости последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ и ψ вытекает

$$\lim_{l\to\infty} \| q_{s_l} w^{\pm}_{s_l} - v_{s_l} \|_{L^m(\Omega_{s_l})} = 0. \tag{12}$$

Из (11), (12) и слабой сходимости последовательности $\{v_s\}$ к v выводим

$$\underline{\lim}_{s\to\infty} \| q_s (w^{\pm} - v) \|_{L^m(\Omega_s)} = 0.$$

Отсюда и из условия (1) следует, что $w^{\pm} = v$ почти всюду на Ω. А так как $w^{+} \geqslant \varphi$, $w^{-} \leqslant \psi$ почти всюду на Ω, то $v \in V$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W^{1,m}(\Omega) \to (W^{1,m}(\Omega))^*$, последовательность $g_s \in \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $g \in A(V)$. Тогда существует последовательность $w_s \in V_s$ такая, что*

$$\lim_{s\to\infty} \| w_s - A_s^{-1} g_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Положим $v = A^{-1}g$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$v_s = A_s^{-1} g_s,$$

$$\delta_s = \{\| v_s - q_s v \|_{L^1(\Omega_s)} + \| \varphi_s - q_s\varphi \|_{L^1(\Omega_s)} + \| \psi_s - q_s\psi \|_{L^1(\Omega_s)}\}^{1/2},$$

$$E_s^{-} = \{x \in \Omega_s : v_s(x) < \varphi_s(x) - \delta_s\}, \quad E_s^{+} = \{x \in \Omega_s : v_s(x) > \psi_s(x) + \delta_s\}.$$

В силу G-сходимости последовательности $\{A_s\}$ к оператору A последовательность $\{v_s\}$ слабо сходится к v. Отсюда и из сильной сходимости последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ, ψ вытекает

$$\lim_{s\to\infty} \delta_s = 0. \tag{14}$$

Из этого равенства и неравенства $\operatorname{mes} E_s^{\pm} \leqslant \delta_s$ $(\forall s)$ следует

$$\lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} E_s^{\pm} = 0. \tag{15}$$

Покажем, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_{E_s^{\pm}} |\nabla v_s|^m dx = 0. \tag{16}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$

$$u_s^{-} = \min\{v_s - \varphi_s, -\delta_s\}, \quad u_s^{+} = \max\{v_s - \psi_s, \delta_s\}.$$

Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle A_s v_s, u_s^{\pm} \rangle = \langle g_s, u_s^{\pm} \rangle.$$

Отсюда получаем

$$\int_{E_s^{\pm}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^s(x, v_s, \nabla v_s)\, \partial_i v_s + a_0^s(x, v_s, \nabla v_s)\, v_s \right\} dx \leqslant \langle g_s, u_s^{\pm} \rangle +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \int_{E_s^{\pm}} |a_i^s(x, v_s, \nabla v_s)| (|\partial_i \varphi_s| + |\partial_i \psi_s|)\, dx + \delta_s \int_{\Omega_s} |a_0^s(x, v_s, \nabla v_s| \, dx.$$

Из этого неравенства, используя соотношения (2) — (4), выводим

$$2^{m-m_1}c^{-1}\int\limits_{E_s^{\pm}}|\nabla v_s|^m dx - \operatorname{mes} E_s^{\pm} \leqslant \langle g_s, u_s^{\pm}\rangle + c(1+\operatorname{mes}\Omega)\times$$

$$\times(1+\|v_s\|_{L^m(\Omega_s)}+\|\nabla v_s\|_{L^m(\Omega_s)})^{m-1}\left\{\sum_{i=0}^{n}(\|\partial_i\varphi_s\|_{L^m(E_s^{\pm})}+\|\partial_i\psi_s\|_{L^m(E_s^{\pm})})+\delta_s\right\}.$$

Отсюда, используя (14), (15), сильную сходимость последовательностей $\{\varphi_s\}, \{\psi_s\}, \{g_s\}$ соответственно к φ, ψ, g, слабую сходимость последовательностей $\{u_s^{\pm}\}$ к нулю и ограниченность последовательности норм $\|v_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$, выводим (16).

Далее, пусть для любого $s\in\mathbb{N}$

$$v_s^1 = \max\{v_s, \varphi_s-\delta_s\}, \quad \chi_s = \min\{v_s^1, \psi_s+\delta_s\}.$$

Легко видеть, что для произвольного $s\in\mathbb{N}$

$$\varphi_s-\delta_s\leqslant\chi_s\leqslant\psi_s+\delta_s \text{ почти всюду на } \Omega_s. \tag{17}$$

Кроме того, используя сильную сходимость последовательностей $\{\varphi_s\}$, $\{\psi_s\}$ соответственно к φ, ψ, слабую сходимость последовательности $\{v_s\}$ к v, а также (14)—(16), устанавливаем

$$\lim_{s\to\infty}\|\chi_s-v_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}=0. \tag{18}$$

Пусть теперь s_0 — такое число, что $\forall s>s_0$ $\delta<\alpha/2$. Положим для $s\leqslant s_0$ $w_s=\varphi_s$, а для $s>s_0$

$$w_s=\left(1-\frac{2\delta_s}{\alpha}\right)\chi_s+\frac{2\delta_s}{\alpha}(\varphi_s-\delta_s)+\delta_s.$$

Из (17) и (10) вытекает, что для любого $s\in\mathbb{N}$ $\varphi_s\leqslant w_s\leqslant\psi_s$ почти всюду на Ω_s и, следовательно, $w_s\in V_s$. Кроме того, используя ограниченность последовательностей норм $\|\varphi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$, $\|\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$ и (14), получаем

$$\lim_{s\to\infty}\|w_s-\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}=0.$$

Отсюда и из (18) следует равенство (13). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть последовательность $\{A_s\}$ G-сходится к обратимому оператору $A: W^{1,m}(\Omega)\to(W^{1,m}(\Omega))^*$, последовательность $f_s\in(W^{1,m}(\Omega_s))^*$ сильно сходится к $f\in(W^{1,m}(\Omega))^*$, $\forall s\in\mathbb{N}$ $u_s\in V_s$:*

$$\forall s\in\mathbb{N}\quad\forall v\in V_s\quad\langle A_su_s-f_s, v-u_s\rangle\geqslant 0. \tag{19}$$

Тогда существует функция $u\in V$ такая, что

а) $\forall v\in V$ $\langle Au-f, v-u\rangle\geqslant 0$;

б) последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u;

в) последовательность $\{A_su_s\}$ сильно сходится к Au.

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$ ограничена. Действительно, в силу леммы 2 и неравенства (9) существует последовательность $\chi_s\in V_s$ такая, что $\sup\limits_s\|\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}<\infty$. Согласно (19) для произвольного $s\in\mathbb{N}$ имеем $\langle A_su_s-f_s, \chi_s-u_s\rangle\geqslant 0$. Отсюда, используя ограниченность последовательностей норм $\|f_s\|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}$, $\|\chi_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$, неравенства (7), (8), получаем, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$ ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_i\}\subset\mathbb{N}$ и $u\in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что

$$\{u_{s_i}\} \text{ слабо сходится к } u. \tag{20}$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает, что $u\in V$. Зафиксируем последовательность $g_s \in (W^{1,m}(\Omega_s))^*$, сильно сходящуюся к Au. Согласно лемме 2 существует последовательность $w_s \in V_s$ такая, что справедливо равенство (13). При этом

$$\{w_s\} \text{ слабо сходится к } u. \tag{21}$$

Это следует из (13) и того, что в силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A последовательность $\{A_s^{-1} g_s\}$ слабо сходится к u. Кроме того, из (13) и (5) вытекает

$$\lim_{s\to\infty} \| A_s w_s - g_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} = 0. \tag{22}$$

Положим $\tau = \sup_s (\| u_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)} + \| w_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)})$. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle A_s u_s - A_s w_s, u_s - w_s \rangle = \langle A_s u_s - f_s, u_s - w_s \rangle + \langle f_s - g_s, u_s - w_s \rangle + \\ + \langle g_s - A_s w_s, u_s - w_s \rangle.$$

Из этого равенства, используя (6) и (19), получаем

$$\| u_s - w_s \|^{m_2}_{W^{1,m}(\Omega_s)} \leqslant \lambda (1+\tau)^{m_2 - m} (\langle f_s - g_s, u_s - w_s \rangle + \\ + \tau \| A_s w_s - g_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}). \tag{23}$$

Отсюда, учитывая (20) — (22) и сильную сходимость последовательностей $\{f_s\}$, $\{g_s\}$, выводим $\lim\limits_{t\to\infty} \| u_{s_t} - w_{s_t} \|_{W^{1,m}(\Omega_{s_t})} = 0$. Используя это равенство и неравенство (5), устанавливаем

$$\lim_{t\to\infty} \| A_{s_t} u_{s_t} - A_{s_t} w_{s_t} \|_{(W^{1,m}(\Omega_{s_t}))^*} = 0. \tag{24}$$

Перейдем к непосредственному доказательству предложений а) — в) заключения теоремы. Пусть v — произвольная функция из V. В силу G-сходимости $\{A_s\}$ к A и леммы 2 существует последовательность $v_s \in V_s$, слабо сходящаяся к v. Положим $\tau_1 = \sup_s \| v_s \|_{W^{1,m}(\Omega_s)}$. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle g_s - f_s, v_s - u_s \rangle = \langle g_s - A_s w_s, v_s - u_s \rangle + \langle A_s w_s - A_s u_s, v_s - u_s \rangle + \\ + \langle A_s u_s - f_s, v_s - u_s \rangle.$$

Из этого равенства и (19) вытекает

$$\langle g_s - f_s, v_s - u_s \rangle \geqslant -(\tau + \tau_1)(\| A_s w_s - g_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} + \\ + \| A_s u_s - A_s w_s \|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*}).$$

Отсюда, используя (22), (24), (20), слабую сходимость последовательности $\{v_s\}$ к v и сильную сходимость последовательности $\{g_s - f_s\}$ к $Au - f$, выводим неравенство $\langle Au - f, v - u \rangle \geqslant 0$, и тем самым предложение а) доказано.

Покажем справедливость предложения б). Предположим, что последовательность $\{u_s\}$ не сходится слабо к u. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_t'\} \subset \mathbb{N}$ и $u' \in W^{1,m}(\Omega)$ такие, что $\{u_{s_t'}\}$ слабо сходится к u' и $u' \neq u$. Аналогично тому, как доказано выше для u, имеем: $u' \in V$ и $\forall v \in V$ $\langle Au' - f, v - u' \rangle \geqslant 0$. Отсюда и из предложения а) следует неравенство $\langle Au - Au', u - u' \rangle \leqslant 0$. Но так как $u' \neq u$ и оператор A строго монотонен, то $\langle Au - Au', u - u' \rangle > 0$. Полученное противоречие говорит о том, что последовательность $\{u_s\}$ слабо сходится к u, и тем самым предложение б) доказано.

Остается показать справедливость предложения в). Из (23), используя предложение б), (21), (22) и сильную сходимость последовательностей $\{f_s\}$,

$\{g_s\}$, выводим $\lim\limits_{s\to\infty}\| u_s - w_s\|_{W^{1,m}(\Omega_s)} = 0$. Отсюда и из (5) следует

$$\lim_{s\to\infty}\| A_s u_s - A_s w_s\|_{(W^{1,m}(\Omega_s))^*} = 0.$$

Используя это равенство, равенство (22) и сильную сходимость последовательности $\{g_s\}$ к Au, устанавливаем, что последовательность $\{A_s u_s\}$ сильно сходится к Au и предложение в) справедливо. Теорема доказана.

В заключение отметим, что операторы в рассмотренных выше вариационных неравенствах являются операторами задачи Неймана в перфорированных областях. Вопрос о G-сходимости этих операторов достаточно подробно изучен в [1]. В случае операторов задачи Дирихле в перфорированных областях сходимость решений соответствующих вариационных неравенств с односторонними препятствиями изучалась в работе [5], методы которой с понятием G-сходимости операторов не связаны. Наконец, отметим, что на основе G-сходимости линейных эллиптических операторов с единой областью определения сходимость решений вариационных неравенств с односторонними препятствиями изучалась в [6, 7].

1. *Ковалевский А. А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения. — Донецк, 1990.— 60 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. математики и механики; 90.01).
2. *Ковалевский А. А.* О G-сходимости нелинейных эллиптических операторов с различными областями определения // Нелинейн. гранич. задачи.— 1991.— Вып. 3.— С. 26—35.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
4. *Усреднение* и G-сходимость дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Ха Тьен Нгоан // Успехи мат. наук.— 1979.— 34, вып. 5.— С. 65—133.
5. *Ламонов С. А.* Нелинейные эллиптические вариационные неравенства второго порядка в областях с мелкозернистой границей.— Донецк, 1983.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1210 Ук-83.
6. *Attouch H., Konishi Y.* Convergence d'operateurs maximaux monotones et inequations variationnelles // C. r. Acad. Sci. Ser. A.— 1976.— 282, N 9.— P. 467—469.
7. *Boccardo L., Marcellini P.* Sulla convergenza delle soluzioni di disequazionali // Ann. mat. pura ed appl.— 1976.— **110**.— P. 137—159.

Получено 09.10.91

УДК 519.21

Ю. В. Коломиец, мл. науч. сотр.
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

Об усреднении эволюционных уравнений, возмущаемых случайными процессами со скачками

Доказывается слабая сходимость мер, порождаемых решениями эволюционного уравнения, зависящих от малого параметра, к единственному решению проблемы мартингалов, соответствующей стохастическому эволюционному уравнению. Коэффициенты исходного уравнения зависят от случайных марковских процессов со скачками.

Доводиться слабка збіжність мір, породжених розв'язками еволюційного рівняння, залежних від малого параметра, до єдиного розв'язку проблеми мартингалів, що відповідає стохастичному еволюційному рівнянню. Коефіцієнти вихідного рівняння залежать від випадкових марковських процесів з стрибками.

Рассматривается слабая сходимость в смысле распределений решений уравнения (при $\varepsilon\to 0$)

$$\frac{d}{dt}u_t^\varepsilon + A(\alpha_t^\varepsilon)u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}B(\alpha_t^\varepsilon)u_t^\varepsilon = 0, \quad u_0^\varepsilon = f_0\in H^1(R^n), \tag{1}$$

где A и B — операторы в частных производных по переменной $x\in R^n$