УДК 512. 547

Э. М. Жмудь, канд. физ.-мат. наук (Харьков. ун-т)

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ВСЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ХАРАКТЕРЫ КОТОРЫХ ПРИНИМАЮТ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ НЕНУЛЕВЫХ ЗНАЧЕНИЙ

A description of finite groups, all the irreducible characters of which take at most two non-zero values is given.

Наведено опис скінченних груп, всі незвідні комплексні характери яких набувають не більше двох ненульових значень.

1. Введение. В [1] приведено (без детальных доказательств) описание конечных групп, все неприводимые комплексные характеры которых принимают не более двух ненулевых значений. В настоящей работе дается новое изложение указанного вопроса, основанное на результатах статьи [2], что приводит к значительным упрощениям. Будем исходить из следующей естественной классификации конечных групп. Пусть G — конечная группа, $V(\chi)$ — множество всех ненулевых значений ее комплексного характера χ. Пусть n — натуральное число. Будем называть неприводимый характер χ группы G X_n*-характером,* если $|V(\chi)| \leq n$. Группу G будем называть X_n*-группой*, если все ее неприводимые характеры являются X_n-характерами. Каждая конечная группа, очевидно, является X_n-группой для всех достаточно больших n. Класс X_1-групп тривиален — содержит лишь группу $G = 1$. Класс X_2-групп, однако, бесконечен и его описанию посвящена настоящая статья. Формулировке основного ее результата предпошлем некоторые обозначения. Через $\Phi_{2\cdot 3^n}$ обозначим группу Фробениуса с ядром $E(3^n)$ — элементарной абелевой группой порядка 3^n — и дополнением $C(2)$ — циклической группой порядка 2; Φ_{72} — группа Фробениуса с ядром $E(9)$ и дополнением Q_8 — группой кватернионов порядка 8. Группа G называется CM-группой, если различные ее неприводимые характеры имеют различные ядра. (Подробнее о CM-группах см. в [3].) Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Класс* X_2*-групп распадается на три серии:* (i) *класс* CM-2-*групп*; (ii) *класс групп Фробениуса* $\Phi_{2\cdot 3^n}$, $n = 1, 2, \ldots$; (iii) *группа Фробениуса* Φ_{72}.

В статье все группы конечные, характеры — комплексные. Если G — группа, то $G^{\#} = G \setminus \{1\}$, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех ее неприводимых характеров, 1_G — главный характер группы G, $\mathrm{Irr}^{\#}(G) = \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$, $\mathrm{Lin}(G)$ — группа линейных характеров группы G; $\ker\chi$ — ядро характера χ группы G; $Z(\chi) = \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}$; χ_H — ограничение характера χ на подгруппу H; $Z(G)$ — центр группы G; $o(g)$ — порядок элемента g группы G. Остальные обозначения будут вводится по мере необходимости.

2. Предварительные леммы. Доказательство теоремы. Для $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ положим $\mathrm{Irr}^{(\chi)}(G) = \{\nu \in \mathrm{Irr}(G) \mid \ker\nu = \ker\chi\}$. Вообще говоря, $|\mathrm{Irr}^{(\chi)}(G)| \geq 1$. Если $|\mathrm{Irr}^{(\chi)}(G)| = 1$, т. е. $\mathrm{Irr}^{(\chi)}(G) = \{\chi\}$, будем называть χ CM-характером. Из приведенного выше определения CM-групп следует, что группа G является CM-группой тогда и только тогда, когда все ее неприводимые характеры являются CM-характерами. Пусть $K, N \trianglelefteq G$. Говорят, что N *покрывает* K, если $K < N$ и N/K — главный фактор группы G. Характер $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ будем называть B-характером, если $\ker\chi$ покрывается единственной нормальной подгруппой группы G. Группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу, а также единичная группа называются *монолитом.* Данное выше определение B-характера можно перефразировать следующим образом: характер $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ называется *B-характером*, если $G/\ker\chi$ — монолит. В частности, B-характером является главный характер 1_G группы G. Группу G будем называть B-группой, если все ее неприводимые характеры являются B-характерами (см. [4]). Примером B-группы может служить любая конечная p-группа (p — простое число): это следует из того, что p-группа имеет точный неприводимый характер тогда и только тогда, когда она является монолитом. Характер $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ будем называть CM-B-характером, если он является одновременно CM- и B-характером. Монолит, имеющий единственный точный неприводимый характер, называется *C-монолитом.* Из предыдущего следует, что характер $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ является CM-B-характером тогда и только тогда, когда $G/\ker\chi$ — C-монолит. Группу G назовем *CM-B-группой,* если все ее неприводимые характеры являются CM-B-характерами.

Пусть $N \trianglelefteq G$. Положим

$$\operatorname{Irr}_N(G) = \{\chi \in \operatorname{Irr}(G) \mid \ker\chi \geq N\}, \quad \rho^{(N)} = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}_N(G)} \chi(1)\chi = (1_N)^G.$$

В частности, $\rho = \rho^{(1)}$ — регулярный характер группы G. Заметим, что характер $\rho^{(N)}$ исчезает на $G \setminus N$ и принимает значение $|G/N|$ на N. Поэтому $\ker\rho^{(N)} = N$. Далее положим

$$\operatorname{Irr}_N^*(G) = \{\chi \in \operatorname{Irr}(N) \mid \ker\chi \ngeq N\} = \operatorname{Irr}(G) \setminus \operatorname{Irr}_N(G).$$

Если $N \neq 1$, то, очевидно, $\operatorname{Irr}_N^*(G) \neq \varnothing$.

Лемма 1. *Для любого $N \trianglelefteq G$ имеет место*

$$\bigcap_{\chi \in \operatorname{Irr}_N(G)} \ker\chi = N. \tag{1}$$

Доказательство. Левая часть (1) совпадает с $\ker\rho^{(N)} = N$.

Лемма 2. *Если $N \trianglelefteq G, N \neq 1$, то*

$$\bigcap_{\chi \in \operatorname{Irr}_N^*(G)} \ker\chi = 1. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначив левую часть (2) через D, в силу леммы 1 получим

$$D \cap N = \left(\bigcap_{\chi \in \operatorname{Irr}_N^*(G)} \ker\chi\right) \cap \left(\bigcap_{\chi \in \operatorname{Irr}_N(G)} \ker\chi\right) = \bigcap_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \ker\chi = \ker\rho = 1.$$

Допустим, что $D \neq 1$ и $g \in D^{\#}$. Так как $D \cap N = 1$, то $g \notin N$, откуда следует $\rho(g) = \rho^{(N)}(g) = 0$. Замечая, что $\rho = \rho^{(N)} + \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}_N^*(G)} \chi(1)\chi$, получаем

$$\sum_{\chi \in \operatorname{Irr}_N^*(G)} \chi(1)^2 = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}_N^*(G)} \chi(1)\chi(g) = \rho(g) - \rho^{(N)}(g) = 0,$$

что невозможно, так как $\operatorname{Irr}_N^*(G) \neq \varnothing$.

Лемма 3. *Пусть $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$. Тогда следующие условия равносильны:*

а) χ — *X_2-характер;*

б) χ — CM-B*-характер.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Пусть χ — X_2-характер. Можно, очевидно, считать, что $\chi \neq 1_G$. В этом случае $|V(\chi)| = 2$. Пусть $V(\chi) = \{\chi(1), -m\}$, $S = \{g \in G \mid \chi(g) = -m\}$, $|S| = s$. Полагая $K = \ker \chi$, берем $\nu \in \mathrm{Irr}_K(G) \setminus \{\chi\}$. Равенство $\langle \nu, \chi \rangle = 0$ дает $|K|\chi(1)\nu(1) - m\sum_{x\in S}\nu(x) = 0$. В частности, при $\nu = 1_G$ получаем $|K|\chi(1) = ms$, откуда следует (так как m — целое алгебраическое число), что m — натуральное число. Учитывая последнее равенство, в общем случае получаем

$$s\nu(1) = \sum_{x\in S}\nu(x). \tag{3}$$

Из (3) следует

$$s\nu(1) = \left|\sum_{x\in S}\nu(x)\right| \leq \sum_{x\in S}|\nu(x)| \leq s\nu(1).$$

Поэтому

$$\left|\sum_{x\in S}\nu(x)\right| = \sum_{x\in S}|\nu(x)| = s\nu(1),$$

откуда вытекает, что $\nu(x) = \nu(1)$ для всех $x \in S$. Действительно, из $\sum(\nu(1) - |\nu(x)|) = 0$ ввиду $\nu(1) - |\nu(x)| \geq 0$ следует, что $|\nu(x)| = \nu(1)$ для всех $x \in S$. Далее из равенства

$$\left|\sum_{x\in S}\nu(x)\right| = \sum_{x\in S}|\nu(x)|$$

вытекает $\nu(x) = \varepsilon\nu(1)$, где ε не зависит от $x \in S$, $|\varepsilon| = 1$. Отсюда ввиду (3) следует $\varepsilon = 1$, т. е. $\nu(x) = \nu(1)$, $x \in S$. Это означает, что $S \subseteq \ker \nu$. Допустим теперь, что $\nu \in \mathrm{Irr}^{(\chi)}(G) \setminus \{\chi\}$. Тогда $\nu \in \mathrm{Irr}_K(G) \setminus \{\chi\}$ и согласно доказанному $K = \ker \nu \supseteq S$, что невозможно, так как $S \cap K = \varnothing$. Таким образом, $\mathrm{Irr}^{(\chi)}(G) = \{\chi\}$, т. е. χ — CM-характер.

Пусть теперь $N \trianglelefteq G$, N покрывает K. Взяв $\nu \in \mathrm{Irr}_N(G)$, получим $\nu \in \mathrm{Irr}_K(G) \setminus \{\chi\}$. Поэтому, как доказано выше, $\ker \nu \supset S$. Таким образом,

$$S \subseteq \bigcap_{\nu \in \mathrm{Irr}_N(G)} \ker \nu,$$

откуда согласно лемме 1 следует $S \subseteq N$. Если теперь N_1 — отличная от N нормальная подгруппа группы G, покрывающая K, то $S \subseteq N_1$ и, следовательно, $S \subseteq \subseteq N \cap N_1 = K$ — противоречие. Итак, N — единственная нормальная подгруппа группы G, покрывающая K. Следовательно, χ — B-характер. Учитывая доказанное выше, заключаем, что χ — CM-B-характер.

б) $\Rightarrow$ а). Пусть χ — CM-B-характер. Снова считаем, что $\chi \neq 1_G$. Пусть $K = \ker \chi$, $N \trianglelefteq G$, N покрывает K. Так как в рассматриваемом случае $\mathrm{Irr}_K(G) = \{\chi\} \cup \mathrm{Irr}_N(G)$, то $\rho^{(K)} = \chi(1)\chi + \rho^{(N)}$. Учитывая свойства характеров $\rho^{(K)}$, $\rho^{(N)}$, отсюда получаем

$$\chi(g) = \begin{cases} \chi(1), & \text{если} \quad g \in K; \\ -\dfrac{|G/N|}{\chi(1)}, & \text{если} \quad g \in N \setminus K; \\ 0, & \text{если} \quad g \in G \setminus N. \end{cases}$$

Таким образом,

$$V(\chi) = \left\{\chi(1), -\frac{|G/N|}{\chi(1)}\right\},$$

т. е. χ — X_2-характер.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — C-монолит с минимальной нормальной подгруппой F порядка 2. Тогда G — 2-группа.*

Доказательство. Утверждение является простым следствием результатов статьи [5] (см. также [2], § 3). Мы приведем доказательство, не опирающееся на эти результаты. По условию $F = \{1, f\}$. Очевидно, $f \in Z(G)$. Пусть χ — точный неприводимый характер группы G. Тогда $\rho = \chi(1)\chi + \rho^{(F)}$, откуда следует, что χ исчезает на $G \backslash F$. Допустим, что G не является 2-группой. Тогда найдется элемент $g \in G$ с $o(g) = p$, где p — простое число, не равное 2. Так как $g, fg \notin F$, то $\chi(g) = \chi(fg) = 0$. Далее, если $\nu \in \mathrm{Irr}(G) \backslash \{\chi\}$, то ввиду $\ker \nu \geq F$ будем иметь $\nu(g) = \nu(fg)$. Таким образом, $\nu(g) = \nu(fg)$ для любого $\nu \in \mathrm{Irr}(G)$. Поэтому элементы fg и g сопряжены, откуда следует, что $o(fg) = p$, т. е. $f^p = (fg)^p = 1$ — противоречие (ибо $o(f) = 2$). Итак, G — 2-группа.

Лемма 5. *Гомоморфные образы X_2-группы являются X_2-группами.*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из данного в п. 1 определения X_2-групп.

Лемма 6. *Пусть G — X_2-группа, не являющаяся 2-группой. Тогда $Z(G) = 1$.*

Доказательство. Допустим, что $Z = Z(G) \neq 1$. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}_Z^*(G)$. Тогда $\ker\chi \not\geq Z(\chi)$, откуда следует $\ker\chi < Z(\chi)$. Так как $\chi_{Z(\chi)} = \lambda\chi(1)$, где $\lambda \in \mathrm{Lin}(Z(\chi))$, и $|V(\chi)| = 2$, то $|V(\lambda)| \leq 2$. Из $|V(\lambda)| = 1$ следовало бы, что $\lambda = 1_{Z(\chi)}$, т. е. $Z(\chi) = \ker\chi$ — противоречие. Таким образом, $|V(\lambda)| = 2$, т. е. $V(\lambda) = \{1, -1\}$. Поэтому $|Z(\chi) : \ker\lambda| = 2$. Так как $\ker\lambda = \ker\chi$, то $|Z(\chi) : \ker\chi| = 2$, т. е. $Z(\chi)$ покрывает $\ker\chi$. Так как согласно лемме 3 χ является СМ-B-характером, то $G/\ker\chi$ — C-монолит с минимальной нормальной подгруппой $Z(\chi)/\ker\chi$ порядка 2. Но тогда по лемме 4 $G/\ker\chi$ является 2-группой. Итак, $G/\ker\chi$ является 2-группой для любого $\chi \in \mathrm{Irr}_Z^*(G)$. Следовательно, G/D — 2-группа, где

$$D = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}_Z^*(G)} \ker\chi.$$

Поскольку согласно лемме 2 $D = 1$, то G — 2-группа, что противоречит допущению о группе G. Таким образом, $Z(G) = 1$. Лемма доказана.

Ниже используется обозначение $\mathrm{Irr}^{\#}(G) = \mathrm{Irr}(G) \backslash \{1_G\}$.

Лемма 7. *Пусть G — X_2-группа, не являющаяся 2-группой. Тогда G неразложима в прямое произведение нетривиальных нормальных подгрупп.*

Доказательство. Допустим, что $G = G_1 \times G_2$, где $G_i \lhd G$, $i = 1, 2$, $G_1 \neq$ $\neq 1 \neq G_2$. Возьмем $\chi_i \in \mathrm{Irr}^{\#}(G_i)$, $i = 1, 2$. По лемме 5 G_i, $i = 1, 2$, как гомоморфные образы группы G, являются X_2-группами. Поэтому $|V(\chi_i)| = 2$, $i =$ $= 1, 2$. Пусть $V(\chi_i) = \{\chi_i(1), -m_i\}$, $i = 1, 2$. Как было доказано выше, m_i — натуральное число ($i = 1, 2$). Образуем внешнее тензорное произведение $\chi =$ $= \chi_1 \times \chi_2$ характеров χ_1, χ_2. Из предыдущего следует, что ненулевые значения характера χ находятся среди чисел $\chi_1(1)\chi_2(1), -\chi_1(1)m_2, -\chi_2(1)m_1,$

$m_1 m_2$. Замечая, что $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$, получаем $|V(\chi)| = 2$. Так как $\chi(1)$ является единственным положительным значением χ, а $m_1 m_2 > 0$, то $m_1 m_2 = \chi(1) = \chi_1(1)\chi_2(1)$. Замечая, что $m_i \le \chi_i(1)$, отсюда получаем $m_i = \chi_i(1)$, $i = 1, 2$. Поэтому $V(\chi) = \{\chi(1), -\chi(1)\}$, $V(\chi_i) = \{\chi_i(1), -\chi_i(1)\}$, $i = 1, 2$. Пусть теперь, наоборот, $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$ задан. Тогда $\chi = \chi_1 \times \chi_2$, где $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G_i)$, $i = 1, 2$, причем хотя бы один из характеров χ_i неглавный. Пусть, например, $\chi_1 \ne \{1_{G_1}\}$. Если также $\chi_2 \ne \{1_{G_2}\}$, то согласно доказанному выше $V(\chi) = \{\chi(1), -\chi(1)\}$. Легко видеть, что это справедливо также и при $\chi_2 = \{1_{G_2}\}$. Действительно, как было показано выше, $V(\chi_1) = \{\chi_1(1), -\chi_1(1)\}$, откуда следует $V(\chi) = \{\chi_1(1), -\chi_1(1)\} = \{\chi(1), -\chi(1)\}$. Пусть $g \in G$, $\chi(g) \ne 0$. Тогда $\chi(g) = \pm\chi(1)$, откуда следует, что $g \in Z(\chi)$. Обратно, если $g \in Z(\chi)$, то $\chi(g) \ne 0$. Таким образом, $Z(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) \ne 0\}$, т. е. χ исчезает на $G \setminus Z(\chi)$. Отсюда следует $|V(\chi_{Z(\chi)})| = |V(\chi)| = 2$. С другой стороны, $\chi_{Z(\chi)} = \lambda\chi(1)$, где $\lambda \in \mathrm{Lin}(Z(\chi))$. Так как $|V(\lambda)| = |V(\chi_{Z(\chi)})| = 2$, то $V(\lambda) = \{1, -1\}$, откуда следует $|Z(\chi) : Z(\lambda)| = 2$. Замечая, что $\ker\lambda = \ker\chi$, получаем $|Z(\chi) : \ker\chi| = 2$, откуда заключаем, как и при доказательстве леммы 6, что $G/\ker\chi$ — 2-группа. Таким образом, $G/\ker\chi$ является 2-группой для любого $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$. Так как $\bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)} \ker\chi = 1$, отсюда вытекает, что G — 2-группа, что противоречит допущению о группе G. Таким образом, группа G неразложима. Лемма доказана.

Нам понадобится также следующее утверждение из статьи [2].

Лемма 8. *Пусть G — СМ-группа с тривиальным центром. Тогда G разлагается в прямое произведение групп, каждая из которых изоморфна одной из групп Фробениуса $\Phi_{2\cdot 3^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, Φ_{72}.*

Доказательство теоремы. Пусть G — X_2-группа, не являющаяся 2-группой. Тогда по леммам 6 и 7 $Z(G) = 1$ и G — неразложима. Так как согласно лемме 3 G является СМ-группой, то в силу леммы 8 G изоморфна одной из групп Фробениуса $\Phi_{2\cdot 3^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, Φ_{72}. То, что последние являются X_2-группами, проверяется непосредственно: если $G \cong \Phi_{2\cdot 3^n}$ и $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$, то $V(\chi) = \{a, -1\}$, где $a \in \{1, 2\}$; если $G \cong \Phi_{72}$ и $\chi \in \mathrm{Irr}^{\#}(G)$, то $V(\chi) = \{2, -2\}$ если χ неточен, и $V(\chi) = \{8, -1\}$, если χ точен. Теорема доказана.

1. *Berkovich J., Chillag D., Zhmud E. M.* Finite groups in which all non-linear characters have three distinct values // Houston J. Math. – To appear.
2. *Жмудь Э. М.* О строении конечных групп с однозначно порождаемыми нормальными делителями // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1977. – С. 54-72.
3. *Жмудь Э. М.* О конечных группах с однозначно порождаемыми нормальными делителями // Мат. сб. – 1967. – **72**, № 1. – С. 135-147.
4. *Жмудь Э. М.* Об одном классе конечных групп // Вест. Харьков. ун-та. – 1973. – №93, вып. 38. – С. 3-11.
5. *Жмудь Э. М.* О конечных группах, обладающих единственным минимальным нормальным делителем и единственным классом изоморфных неприводимых представлений // Там же. – 1967. – **33**. – С. 16–19.

Получено 15.12.93