УДК 517.949

І. І. Клевчук, канд. фіз.-мат. наук (Чернів. ун-т)

БІФУРКАЦІЯ СТАНУ РІВНОВАГИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ

A singularly perturbed system of periodic difference-differential equations is considered. A representation of an integral manifold of this system is obtained. The bifurcation from an equilibrium point to an invariant torus, and subfurcation of a periodic solution are obtained.

Розглядається система сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь з періодичною правою частиною. Одержано зображення інтегрального многовиду цієї системи, досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків.

1. Вступ. Нехай задана система сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + M(t)y(t) + N(t)y(t-\varepsilon\Delta) + F\big(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)\big),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y(t) + C(t)\dot{y}(t-\varepsilon\Delta) + D(t)x(t) + G\big(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)\big), \tag{1}$$

де ε — малий додатний параметр; $x \in R^m$, $y \in R^n$; $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і $D(t)$ — двічі неперервно диференційовні періодичні матриці періоду 2π, а функції F і G мають період 2π відносно t і чотири рази неперервно диференційовні за всіма аргументами. Крім того, в деякому околі початку координат вірна нерівність

$$|F(t,x,y,z)| + |G(t,x,y,z)| \le K\big(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2\big), \quad K > 0.$$

Припустимо, що виконується умова

1) всі корені характеристичного рівняння

$$\det\big(B(t) + C(t)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E\big) = 0$$

лежать в півплощині $\operatorname{Re}\lambda \le -2\lambda_0 < 0$.

Розглянемо рівняння

$$\big(B(t) + C(t)\big)y + D(t)x + G(t,x,y,y) = 0. \tag{2}$$

За теоремою про неявну функцію в деякому околі початку координат існує розв'язок $y = \psi(t,x)$ рівняння (2); функція $\psi(t,x)$ двічі неперервно диференційовна відносно t і чотири рази неперервно диференційовна відносно x, причому $\psi(t,0) = 0$.

Згідно з [1] при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, існує інтегральний многовид системи (1), що може бути поданий у вигляді $y_t = \psi(t,x) + \xi(t,x,\varepsilon)$, де $\xi(t,x,0) = \xi(t,0,\varepsilon) = 0$. Тут y_t — елемент простору $C = C[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$, функція $\xi(t,x,\varepsilon) \in C$ неявно залежить від аргументу θ. Позначимо

$$\eta(t,x,\varepsilon) = \psi(t,x) + \xi(t,x,\varepsilon)|_{\theta=0}, \quad \zeta(t,x,\varepsilon) = \psi(t,x) + \xi(t,x,\varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta}.$$

Тоді рівняння на многовиді для системи (1) набуде вигляду

$$\frac{d\chi}{dt} = L(t)\chi + M(t)\eta(t,\chi,\varepsilon) + N(t)\zeta(t,\chi,\varepsilon) + F\big(t,\chi,\eta(t,\chi,\varepsilon),\zeta(t,\chi,\varepsilon)\big). \tag{3}$$

При $\varepsilon = 0$ рівняння (3) співпадає з рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + (M(t) + N(t))\psi(t,x) + F(t, x, \psi(t,x), \psi(t,x)). \tag{4}$$

Для кожного розв'язку $(x(t), y(t))$ системи (1) існує розв'язок $\chi(t)$ рівняння (3) такий, що справедлива оцінка

$$|x(t) - \chi(t)| + |y_t - \psi(t, \chi(t)) - \xi(t, \chi(t), \varepsilon)| \le K_1 \exp(-\lambda_0 t/(2\varepsilon)),$$

де $t \ge \sigma$, $K_1 > 0$.

В роботі [1] досліджено біфуркацію стану рівноваги автономної сингулярно збуреної системи з малим сталим загаюванням. У даній роботі розглянуто сингулярно збурену систему типу (21) із [1] у більш загальному випадку, коли права частина є 2π-періодичною відносно t. Досліджено біфуркацію стану рівноваги системи (1).

2. Побудова інтегрального многовиду лінійної системи. З метою лінеаризації рівняння (3) побудуємо інтегральний многовид лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + M(t)y(t) + N(t)y(t - \varepsilon\Delta),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y(t) + C(t)y(t - \varepsilon\Delta) + D(t)x(t).$$

Ця система рівносильна системі

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= L(t)x(t) + M(t)y(t) + N(t)y(t - \varepsilon\Delta), \\ y_t &= T(t,\sigma)y_\sigma + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)\,ds, \end{aligned} \tag{5}$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\varepsilon\Delta \le \theta < 0$, $X_0(0) = E$, E — одинична матриця; $T(t,s)$ — оператор зсуву за розв'язками рівняння $\varepsilon\, dy/dt = B(t)y(t) + C(t)y(t - \varepsilon\Delta)$. Оператор $T(t,s)$ залежить від ε, причому із леми А. Халаная [2] випливає оцінка

$$|T(t,s)\varphi| \le \bar{k}_1 |\varphi| \exp(-\lambda_0(t-s)/\varepsilon), \tag{6}$$

де $\varphi \in C$, $t \ge s$.

Лема. *Нехай виконується умова* 1, *а матриці* $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, *їх перші та другі похідні рівномірно обмежені на всій осі. Тоді інтегральний многовид системи* (5) *можна зобразити у вигляді* $y_t = h(t)x + f(t,\theta,\varepsilon)x + O(\varepsilon^2)$, *де* $h(t) = -[B(t) + C(t)]^{-1}D(t)$, $f(t,\theta,\varepsilon) = \varepsilon[B(t) + C(t)]^{-1}[E + \Delta C(t)]\varphi(t) + \theta\varphi(t)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$, $\varphi(t) = h'(t) + h(t)L(t) + h(t)[M(t) + N(t)] \times h(t)$.

Доведення. Враховуючи, що $T(t,s) = T(t, s+\tau)T(s+\tau, s)$, $\tau > 0$, $t > s + \tau$, одержуємо

$$\frac{d}{ds}T(t,s)E = \lim_{\tau\to 0}\{[T(t,s+\tau)E - T(t,s)E]/\tau\} =$$

$$= T(t,s)\lim_{\tau\to 0}\{[E - T(s+\tau,s)E]/\tau\} = -T(t,s)X_0[B(s) + C(s)]/\varepsilon.$$

У другому рівнянні системи (5) зробимо заміну $y_t = z_t + h(t)x$, де $h(t) = -[B(t) + C(t)]^{-1}D(t)$. В результаті одержимо рівняння

$$z_t + h(t)x(t) = T(t,\sigma)z_\sigma + T(t,\sigma)h(\sigma)x(\sigma) + \frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0 D(s)x(s)\,ds.$$

Справджується рівність

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_\sigma^t T(t,s)X_0D(s)x(s)\,ds = -\int_\sigma^t \frac{d}{ds}[T(t,s)][B(s)+C(s)]^{-1}D(s)x(s)\,ds =$$

$$= h(t)x(t) - T(t,\sigma)h(\sigma)x(\sigma) + \int_\sigma^t T(t,s)\frac{d}{ds}[h(s)x(s)]\,ds.$$

Звідси знаходимо

$$z_t = T(t,\sigma)z_\sigma + \int_\sigma^t T(t,s)[h'(s)x(s) + h(s)x'(s)]\,ds.$$

Тому система (5) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + [M(t)+N(t)]h(t)x(t) + M(t)z(t) + N(t)z(t-\varepsilon\Delta),$$

$$z_t = T(t,\sigma)z_\sigma + \int_\sigma^t T(t,s)[\varphi(s)x(s) + h(s)M(s)z(s) + h(s)N(s)z(s-\varepsilon\Delta)]\,ds, \tag{7}$$

де $\varphi(s) = h'(s) + h(s)L(s) + h(s)[M(s)+N(s)]h(s)$.

Знайдемо зображення інтегрального многовиду системи (7) з точністю до членів порядку ε:

$$z_t = g(t,\varepsilon)x, \quad g(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^t T(t,s)\varphi(s)K(s,t)\,ds,$$

де $g: R\times[0,\varepsilon_0]\to C$, $K(s,t)$ — фундаментальна матриця системи

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + [M(t)+N(t)]h(t)x.$$

Покладемо

$$f(t,\theta,\varepsilon) = \varepsilon[B(t)+C(t)]^{-1}[E+\Delta C(t)]\varphi(t) + \theta\varphi(t).$$

Тоді

$$\frac{d}{ds}[T(t,s)]f(s,\theta,\varepsilon) = \lim_{\tau\to 0}\{[T(t,s+\tau)f(s,\theta,\varepsilon) - T(t,s)f(s,\theta,\varepsilon)]/\tau\} =$$

$$= T(t,s)\lim_{\tau\to 0}\{[f(s,\theta,\varepsilon) - T(s+\tau,s)f(s,\theta,\varepsilon)]/\tau\} = T(t,s)\varphi(s).$$

Звідси одержимо

$$g(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^t \frac{d}{ds}[T(t,s)]f(s,\theta,\varepsilon)K(s,t)\,ds = f(t,\theta,\varepsilon) -$$

$$-\int_{-\infty}^t T(t,s)\left\{\frac{\partial f(s,\theta,\varepsilon)}{\partial s}K(s,t) + f(s,\theta,\varepsilon)[L(s)+(M(s)+N(s))h(s)]K(s,t)\right\}ds.$$

Оскільки матриці $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, їх перші та другі похідні рівномірно обмежені на всій осі, то із нерівності (6) випливає оцінка

$$|g(t,\varepsilon)-f(t,\theta,\varepsilon)| \le \nu\varepsilon^2, \quad t\in R, \quad \nu>0.$$

Отже, інтегральний многовид системи (7) можна наближено подати у вигляді $z_t = f(t,\theta,\varepsilon)x$. Тому інтегральний многовид системи (5) можна зобразити у вигляді

$$y_t = h(t)x + f(t,\theta,\varepsilon)x + O(\varepsilon^2).$$

Лема доведена.

3. Дослідження біфуркації стану рівноваги. Рівняння на многовиді системи (5) з точністю до членів порядку ε набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + [M(t)+N(t)]h(t)x + \varepsilon M(t)[B(t)+C(t)]^{-1}(E+$$

$$+\Delta C(t))\varphi(t)x + \varepsilon N(t)[B(t)+C(t)]^{-1}(E-\Delta B(t))\varphi(t)x. \tag{8}$$

Рівняння (8) є лінійним диференціальним рівнянням з періодичними коефіцієнтами. Нехай виконується умова

2) оператор монодромії для рівняння (8) має пару коренів $\exp[\alpha(\varepsilon)\pm \pm i\beta(\varepsilon)]$, $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)>0$, $\beta(0)>0$, а решта його коренів лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda\le -2\lambda_1<0$.

Тоді згідно з теоремою Флоке – Ляпунова існує невироджена матриця $H(t, \varepsilon)$, $H(t+2\pi,\varepsilon)=H(t,\varepsilon)$, така, що заміна

$$x = H(t,\varepsilon)[u, \bar{u}, v]^T \tag{9}$$

зводить рівняння (8) до вигляду

$$\frac{du}{dt} = (\alpha(\varepsilon)+i\beta(\varepsilon))u, \quad \frac{d\bar{u}}{dt} = (\alpha(\varepsilon)-i\beta(\varepsilon))\bar{u}, \quad \frac{dv}{dt} = A(\varepsilon)v,$$

причому всі власні значення матриці $A(\varepsilon)$ лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda\le -2\lambda_1 < < 0$.

Виконавши заміну (9) у рівнянні (3), одержимо систему

$$\frac{du}{dt} = (\alpha(\varepsilon)+i\beta(\varepsilon))u + F_1(t,u,\bar{u},v,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = (\alpha(\varepsilon)-i\beta(\varepsilon))\bar{u} + \bar{F}_1(t,u,\bar{u},v,\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

$$\frac{dv}{dt} = A(\varepsilon)v + F_2(t,u,\bar{u},v,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

де $|F_1(t,u,\bar{u},v,\varepsilon)| + |F_2(t,u,\bar{u},v,\varepsilon)| \le k(|u|^2+|v|^2)$.

Тоді згідно з [3 – 5] існує інтегральний многовид системи (10), що може бути поданий у вигляді $v=S(t,u,\bar{u},\varepsilon)$. Поведінка розв'язків системи (10) на многовиді описується системою

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\varepsilon)+i\beta(\varepsilon))w + F_1(t,w,\bar{w},S(t,w,\bar{w},\varepsilon),\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = (\alpha(\varepsilon)-i\beta(\varepsilon))\bar{w} + \bar{F}_1(t,w,\bar{w},S(t,w,\bar{w},\varepsilon),\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \tag{11}$$

Для кожного розв'язку $(u(t), \bar{u}(t), v(t))$ системи (10) існує розв'язок $(w(t), \bar{w}(t))$ системи (11) такий, що справедлива оцінка [5, с. 55]

$$|u(t)-w(t)| + |v(t)-S(t, w(t), \overline{w}(t), \varepsilon)| \le M_1 \exp(-\lambda_1 t), \quad t \ge \sigma.$$

Нехай відсутній сильний резонанс, тобто для всіх цілих m_1, m_2, $0 < m_2 < 5$, виконується нерівність $m_2\beta(0) + m_1 \neq 0$. Зауважимо, що умова відсутності сильного резонансу накладає обмеження тільки на пару коренів оператора монодромії рівняння $dx/dt = L(t)x + [M(t)+N(t)]h(t)x$, що розміщені на одиничному колі. Перше рівняння системи (11) перетворимо з допомогою підстановки

$$w = p + W_2(t, p, \overline{p}, \varepsilon) + W_3(t, p, \overline{p}, \varepsilon), \tag{12}$$

де W_2 і W_3 — форми відповідно другого і третього порядку з періодичними коефіцієнтами.

Перетворення (12) можна підібрати так, що рівняння для p набуде вигляду [6, с. 1542]

$$\frac{dp}{dt} = [\alpha(\varepsilon) + i\beta(\varepsilon)]p + [\gamma(\varepsilon) + i\delta(\varepsilon)]p^2\overline{p} + P(t, p, \overline{p}, \varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

де $P(t+2\pi, p, \overline{p}, \varepsilon) = P(t, p, \overline{p}, \varepsilon)$, $P(t, p, \overline{p}, \varepsilon) = O(|p|^4)$ при $|p| \to 0$. Перейдемо до полярних координат, покладаючи $p = r\exp(i\varphi)$. Тоді одержимо дійсну систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)r^2 + \Phi(t, r, \varphi, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dr}{dt} &= \alpha(\varepsilon)r + \gamma(\varepsilon)r^3 + R(t, r, \varphi, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{13}$$

де $R(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^4)$, $\Phi(t, r, \varphi, \varepsilon) = O(|r|^3)$ при $|r| \to 0$.

Оскільки виконується умова 2, то при дослідженні на стійкість нульового розв'язку рівняння (4) маємо критичний випадок. Нехай нульовий розв'язок рівняння (4) асимптотично стійкий, причому питання про стійкість вирішується членами третього порядку, тобто $\gamma(0) < 0$.

Із [3, 6, 7] випливає, що при досить малому ε система (13) має інваріантний тор $S_\varepsilon = \{(t, \varphi, r)\colon t \in R,\ \varphi \in R,\ r = \rho(t, \varphi, \varepsilon)\}$. При цьому $\rho(t+2\pi, \varphi, \varepsilon) = \rho(t, \varphi, \varepsilon)$, $\rho(t, \varphi + 2\pi, \varepsilon) = \rho(t, \varphi, \varepsilon)$ і справджується рівність

$$\rho(t, \varphi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon N} + O(\varepsilon), \quad N = -\alpha'(0)/\gamma(0).$$

Поведінка розв'язків системи (13) на торі S_ε описується рівнянням

$$\frac{d\chi}{dt} = \beta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)\rho^2(t, \chi, \varepsilon) + \Phi(t, \rho(t, \chi, \varepsilon), \chi, \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \tag{14}$$

Для кожного розв'язку $(\varphi(t), r(t))$ системи (13), що задовольняє умову $0 < r(\sigma) < r_0$, знайдеться розв'язок $\chi(t)$ рівняння (14) такий, що справедлива оцінка

$$|\varphi(t) - \chi(t)| + |r(t) - \rho(t, \chi(t), \varepsilon)| \le M_2 \exp(-\varepsilon n_1 t),\ M_2 > 0,\ n_1 > 0,\ t \ge \sigma.$$

Тору S_ε відповідає інваріантний тор системи (11), що може бути зображений у вигляді

$$\begin{aligned} W(t, \varphi, \varepsilon) = {} & \rho(t, \varphi, \varepsilon)e^{i\varphi} + W_2(t, \rho(t, \varphi, \varepsilon)e^{i\varphi}, \rho(t, \varphi, \varepsilon)e^{-i\varphi}, \varepsilon) + \\ & + W_3(t, \rho(t, \varphi, \varepsilon)e^{i\varphi}, \rho(t, \varphi, \varepsilon)e^{-i\varphi}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Інваріантний тор системи (10) визначається функцією $V(t, \varphi, \varepsilon) = S(t, W(t, \varphi,$

$\varepsilon), \overline{W}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)$. Звідси одержимо зображення інваріантного тора системи (1)

$$X(t, \varphi, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)[W(t, \varphi, \varepsilon), \overline{W}(t, \varphi, \varepsilon), V(t, \varphi, \varepsilon)]^T,$$
$$Y(t, \varphi, \varepsilon) = \psi(t, X(t, \varphi, \varepsilon)) + \xi(t, X(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon). \tag{15}$$

Для кожного розв'язку $(w(t), \overline{w}(t))$ системи (11), $0 < |w(\sigma)| < w_1$, існує розв'язок $\chi(t)$ рівняння (14) такий, що справедлива оцінка $|w(t) - W(t, \chi(t), \varepsilon)| \le M_3 \exp(-n\varepsilon t)$. Звідси одержуємо нерівність $|u(t) - W(t, \chi(t), \varepsilon)| + |v(t) - V(t, \chi(t), \varepsilon)| \le M_4 \exp(-\lambda_1 t) + M_5 \exp(-n\varepsilon t)$. Тому існують числа $\varepsilon_1 > 0$, $r_2 > 0$ такі, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ для кожного розв'язку $(x(t), y_t)$ системи (1) з початковим значенням $(x(\sigma), y_\sigma)$, $0 < |x(\sigma)| + |y_\sigma| < r_2$, знайдеться розв'язок $\chi(t)$ рівняння (14) такий, що виконується оцінка

$$|x(t) - X(t, \chi(t), \varepsilon)| + |y_t - Y(t, \chi(t), \varepsilon)| \le$$
$$\le K_1 \exp(-\lambda_0 t/(2\varepsilon)) + K_2 \exp(-\lambda_1 t) + K_3 \exp(-n\varepsilon t), \quad t \ge \sigma. \tag{16}$$

Нехай $\nu(\varepsilon)$ — число обертання для рівняння (14). Тоді згідно з [3] маємо зображення

$$\nu(\varepsilon) = \beta(0) + \varepsilon\beta'(0) - \varepsilon\delta(0)\alpha'(0)/\gamma(0) + O(\varepsilon^{3/2})$$

і розв'язок рівняння (14) можна записати у вигляді

$$\chi(t, \varepsilon) = \nu(\varepsilon)t + c + f_1(t, \nu(\varepsilon)t + c, \varepsilon),$$

де c — довільна стала, а $f_1(t, \varphi, \varepsilon)$ — неперервна, періодична відносно t та φ функція з періодом 2π. Розв'язок рівняння (13), що лежить на торі, можна подати у вигляді $r(t, \varepsilon) = \rho(t, \chi(t, \varepsilon), \varepsilon) = \Lambda(t, \nu(\varepsilon)t + c, \varepsilon)$, де $\Lambda(t, \varphi, \varepsilon)$ — неперервна, періодична відносно t, φ функція з періодом 2π. Отже, число обертання $\nu(\varepsilon)$ є власною частотою для розв'язків на торі. Якщо власна частота $\nu(\varepsilon)$ ірраціональна, то кожний із цих розв'язків є квазіперіодичною функцією t з двома основними частотами 1 та $\nu(\varepsilon)$. Якщо число $\nu(\varepsilon)$ раціональне, то розв'язки, що лежать на торі S_ε, є періодичними з періодом, рівним знаменнику нескоротного дробу $\nu(\varepsilon)$.

Нехай виконується умова

$$\beta'(0) - \delta(0)\alpha'(0)/\gamma(0) \ne 0. \tag{17}$$

Тоді при досить малих ε функція $\nu(\varepsilon)$ буде монотонно зростаючою або монотонно спадною. Тому ця функція набуває кожного значення з деякого відрізка. Виберемо послідовність чисел ε_k, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, таку, що $\nu(\varepsilon_k) \ne \beta(0)$ і числа $\nu(\varepsilon_k)$ є раціональними. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(\varepsilon_k) = \beta(0)$ і знаменник T_k нескоротного дробу $\nu(\varepsilon_k)$ прямує до ∞ при $k \to \infty$. Отже, існує збіжна до нуля послідовність ε_k така, що при $\varepsilon = \varepsilon_k$ рівняння на торі S_ε, а отже, і рівняння (1) мають періодичні розв'язки, амплітуди яких прямують до нуля, а найменші періоди T_k необмежено зростають при $k \to \infty$. Таке явище називається субфуркацією періодичних розв'язків, а значення $\varepsilon = 0$ — точкою субфуркації [8].

Для квазіперіодичних розв'язків системи (1) на торі вірне зображення

$$X(t, \chi(t, \varepsilon), \varepsilon) = H(t, \varepsilon)[\sqrt{\varepsilon N}\, e^{i\nu(\varepsilon)t}, \sqrt{\varepsilon N}\, e^{-i\nu(\varepsilon)t}, 0]^T + O(\varepsilon),$$

$$Y(t, \chi(t, \varepsilon), \varepsilon) = h(t)X(t, \chi(t, \varepsilon), \varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай виконуються умови леми та умова 2, нульовий розв'язок рівняння* (4) *асимптотично стійкий і відсутній сильний резонанс. Тоді існує* $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *множина* $\{(t, \omega, \zeta): t \in R,\ \omega = X(t, \varphi, \varepsilon),\ \zeta = Y(t, \varphi, \varepsilon),\ \varphi \in R\}$, *де функції* $X(t, \varphi, \varepsilon)$, $Y(t, \varphi, \varepsilon)$ *визначені рівностями* (15), *є інваріантним тором системи* (1). *Крім того , існує* $r_2 > 0$ *таке, що для кожного розв'язку* $(x(t), y_t)$ *системи* (1), $0 < < |x(\sigma)| + |y_\sigma| < r_2$, *знайдеться розв'язок* $\chi(t)$ *рівняння* (14) *такий, що вірна оцінка* (16). *Якщо виконується також нерівність* (17), *то значення* $\varepsilon = 0$ *є точкою субфуркації періодичних розв'язків системи* (1).

Зауваження. Лему та теорему можна узагальнити на випадок, коли права частина системи (1) залежить від ε. При цьому інтегральний многовид лінійної системи можна будувати за такими ж формулами.

Як приклад розглянемо систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F_1(t, x, \varepsilon)\frac{dx}{dt} + F_2(t, x, \varepsilon)x + F_3(t, x, \varepsilon)y(t) + F_4(t, x, \varepsilon)y(t-\varepsilon) = 0,$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = -2y(t) + y(t-\varepsilon) + x, \tag{18}$$

де $F_k(t, x, \varepsilon) = a_k(\varepsilon) + b_k(\varepsilon)x^2 + c_k(t, x, \varepsilon)$, $c_k(t, x, \varepsilon) = o(|x|^2)$, $k = \overline{1,4}$, $\varepsilon > 0$ і функції $c_k(t, x, \varepsilon)$ періодичні відносно t з періодом 2π.

Рівняння на многовиді буде рівнянням Льєнара вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(a(\varepsilon) + b(\varepsilon)x^2 + c(t,x,\varepsilon)\right)\frac{dx}{dt} + \left(A(\varepsilon) + B(\varepsilon)x^2 + C(t,x,\varepsilon)\right)x = 0,$$

де $a(\varepsilon) = a_1(\varepsilon) - 2\varepsilon a_3(0) - 3\varepsilon a_4(0) + o(\varepsilon)$, $b(0) = b_1(0)$, $A(\varepsilon) = a_2(\varepsilon) + a_3(\varepsilon) + a_4(\varepsilon) + o(\varepsilon)$, $B(0) = b_2(0) + b_3(0) + b_4(0)$, $c(t, x, \varepsilon) = o(|x|^2)$, $C(t, x, \varepsilon) = o(|x|^2)$.

Із теореми випливає, що за умов $a(0) = 0$, $A(0) > 0$, $A(0) \neq (k/3)^2, (k/4)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, $a'(0) < 0$, $b(0) > 0$ існує стійкий інваріантний тор системи (18). Якщо виконується також умова $A'(0)b(0) \neq 3B(0)a'(0)$, то значення $\varepsilon = 0$ є точкою субфуркації періодичних розв'язків системи (18).

1. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И., Клевчук И. И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 335–340.
2. *Халанай А.* Периодические и почти периодические решения некоторых сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Rev. Math. Pures at Appl. – 1963. – **8**, № 2. – P. 285–292.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
4. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
5. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
6. *Бибиков Ю. Н.* Бифуркация типа Хопфа для квазипериодических движений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 9. – С. 1539–1544.
7. *Самойленко А. М., Полеся И. В.* Рождение инвариантных множеств в окрестности положения равновесия // Там же. – 1975. – **11**, № 8. – С. 1409–1415.
8. *Козякин В. С.* Субфуркация периодических колебаний // Докл. АН СССР. – 1977. – **232**, № 1. – С. 25–27.

Одержано 20.01.94