УДК 517. 925.51

И. Е. Витриченко, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

К УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Sufficient conditions for Lyapunov stability of a trivial solution of a nonautonomous equation of order n is obtained in the case when a root of the boundary characteristic equation equals to zero and has multiplicity greater than 1.

Одержано достатні умови стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку неавтономного рівняння n-го порядку в критичному випадку кратного нульового кореня граничного характеристичного рівняння.

1. Постановка задачи. Исследуется устойчивость по Ляпунову [1] при $t\uparrow\omega$ тривиального решения дифференциального уравнения (д. у.) вида

$$y^{(n)}+\sum_{s=1}^{n-1}p_s(t)y^{(n-s)}+p_n(t)y = F(t,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \tag{1}$$

$$t\in\Delta=[a,\omega[,\ -\infty<a<\omega\le+\infty,\ p_s:\ \Delta\to\mathbb{C},\ s=\overline{1,n},\ F:\ \Delta\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C},$$

где $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^n$ — соответственно множество комплексных чисел и n-мерное комплексное эвклидово пространство и выполняются условия:

1) $p_s\in C^2_\Delta,\ p_s\equiv\pi^s\left[p_s^0+o_s(1)\right],\ t\uparrow\omega,\ \pi:\ \Delta\to]0,+\infty[,\ \ p_s^0\in\mathbb{C},\ \ s=\overline{1,n}$;

2) уравнение

$$\lambda^n+\sum_{s=1}^{n}p_s^0\lambda^{n-s} = 0$$

имеет $n_0,\ 1\le n_0\le n$, корней λ_s^0 с условием $\operatorname{Re}\lambda_s^0=0,\ s=\overline{1,n_0}$, и $n-n_0$ корней λ_k^0 с условием $\operatorname{Re}\lambda_k^0\le-\gamma,\ \gamma\in\ ]0,+\infty[,\ k=\overline{n_0+1,n}$;

3) $|F|\le L\left(|y|+\sum_{s=1}^{n-1}|y^{(s)}|\right)^{1+\alpha},\ L\in C_\Delta,\ L:\ \Delta\to[0,+\infty[,\ \alpha\in\ [0,+\infty[.$

Ниже приняты следующие обозначения и определения:

$$L_\Delta\ \equiv\ \left\{f:\Delta\to\mathbb{C},\int^{\omega}|f|\,dt<+\infty\right\};$$

$$\Omega\equiv|\pi''|\pi^{-2}+(\pi')^2\pi^{-3}+\sum_{s=1}^{n}\left(|\pi'|\pi^{-s-1}|p_s|+|p_s'|\pi^{-s}+\right.$$

$$\left.+|p_s\pi^{-s}-p_s^0|^2+|\pi'|\pi^{-2}|p_s\pi^{-s}-p_s^0|\right);$$

$$\Omega_0 \equiv L\pi^{-n}(\pi + \pi^{n-1})^{1+\alpha}; \quad \Omega_s \equiv \Omega_0 \pi^{-n_s - 1}, \ s = \overline{2, s_0};$$

$$\Omega_s^* \equiv \pi_s^{-n_s}\big[\,|\pi''|\pi^{-2} + |\pi_s''|\pi_s^{-2}\pi_{s+1}^{-1} + (\pi_s')^2\pi_s^{-3}\pi_{s+1}^{-1} +$$

$$+ |\pi_s'\pi_{s+1}'|(\pi_s\pi_{s+1})^{-2} + \sum_{k=1}^{n}(|p_k'|\pi^{-k} + |\pi'|\pi^{-k-1}|p_k| +$$

$$+ |\pi_k'|\pi_k^{-1}|p_k\pi^{-k} - p_k^0|)\big], \quad s = \overline{1, s_0};$$

$$X_{n_s} = \operatorname{col}(x_{1n_s}, \ldots, x_{n_s n_s}), \ X = \operatorname{col}(X_{n_1}, \ldots, X_{n_{s_0}}), Z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_n),$$

$$Y_{n_s} = \operatorname{col}(y_{1n_s}, \ldots, y_{n_s n_s}), \ Y = \operatorname{col}(Y_{n_1}, \ldots, Y_{n_{s_0}});$$

$$\| X_{n_s} \| = \sum_{k=1}^{n_s} |x_{kn_s}|, \quad \| X \| = \sum_{s=1}^{s_0} \| X_{n_s} \|;$$

P_{mn} — прямоугольная матрица размера $m \times n$, $P_{mm} \equiv P_m$;

$$\| P_{mn} \| = \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |p_{sk}|,$$

если $\| P_{mn} \| = \| p_{sk} \|$, $s = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$; E_m и H_m — соответственно матрицы единичная и сдвига размеров $m \times m$.

Определение 1. *Д. у. (1) имеет свойство* St *при* $t \uparrow \omega$, *если для любого* $\varepsilon \in]0, +\infty[$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что любое решение* $y = y(t)$ *д. у. (1) с начальным условием* $|y(T_\varepsilon)| < \delta_\varepsilon \pi(T_\varepsilon)$, $|y^{(s-1)}(T_\varepsilon)| < \delta_\varepsilon \pi^s(T_\varepsilon)$, $s = \overline{2, n}$, *удовлетворяет неравенствам* $|y(t)| < \varepsilon\pi$, $|y^{(s-1)}(t)| < \varepsilon\pi^s$, $s = \overline{2, n}$, *для всех* $t \in [T_\varepsilon, \omega[$.

Определение 2. *Д. у. (1) имеет свойство* $AsSt$ *при* $t \uparrow \omega$, *если выполняется определение* 1 *и* $\pi^{-1}y(t) = o(1)$, $\pi^{-s}y^{(s-1)}(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2, n}$.

Определение 3. *Д. у. (1) имеет свойство* $\overline{St}$ *при* $t \uparrow \omega$, *если определение* 1 *не выполняется*.

Определение 1′. *Дифференциальная система (д. с.) вида*

$$X' = S(t, X), \ S(t, \overline{0}) \equiv \overline{0}, \quad \overline{0} = \operatorname{col}(0, \ldots, 0), \tag{2}$$

имеет свойство St *при* $t \uparrow \omega$, *если для любого* $\varepsilon \in]0, +\infty[$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что любое решение* $X = X(t)$ *д. с. (2) с начальным условием* $\| X(T_\varepsilon) \| < \delta_\varepsilon$ *удовлетворяет неравенству* $\| X(t) \| < \varepsilon$ *для всех* $t \in [T_\varepsilon, \omega[$.

Определение 2′. *Д. с. (2) имеет свойство* $AtSt$ *при* $t \uparrow \omega$, *если выполняется определение* 1′ *и* $\| X(t) \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$.

Определение 3′. *Д. с. (2) имеет свойство* $\overline{St}$ *при* $t \uparrow \omega$, *если определение* 1′ *не выполняется*.

***Замечание* 1.** Полученные результаты эффективно применяются к д. у. (1), у которого коэффициенты имеют, например, вид

$$\pi \equiv t^{\alpha_0}, p_k \equiv t^{k\alpha_0}\Big[p_k^0 + q_k^0 t^{-\alpha_k}(\ln t)^{\beta_k}\sin t^{\gamma_k}\Big], \quad \alpha_0 \in]-\infty, +\infty[,$$

$$p_k^0, q_k^0 \in \mathbb{C}, \alpha_k \in]0, +\infty[, \ \beta_k \in]-\infty, +\infty[, \gamma_k \in]0, 1[, \ k = \overline{1, n}.$$

2. Свойства $St, A\,s\,St, \overline{S,t}$ д. с. специального вида. Рассмотрим д. с. специального вида

$$X'_{n_s} = \pi_s\left(\nu_s^0 E_{n_s} + P_{n_s}\right)X_{n_s} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{s_0} P_{n_s n_k} X_{n_k} + G_{n_s}(t, X), \quad s = \overline{1, s_0}, \tag{3}$$

где $\nu_s^0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\nu_s^0 \neq 0$, $\pi_s : \Delta \to]0, +\infty[$, $\| P_{n_s} \| \le P^0$, причем константа

$$P^0 = \max_{1\le s\le s_0} \sup_{t\in[t_0,\omega[} \| P_{n_s} \|$$

будет сколь угодно малой, если t_0 достаточно близко к ω,

$$\| G_{n_s}(t, X) \| \le L^*(t) \| X \|^{1+\alpha}, \quad L^* : \Delta \to [0, +\infty[, L^* \in C_\Delta, s = \overline{1, s_0}.$$

Теорема 1. *Пусть д. с.* (3) *такова, что*

1) $\operatorname{Re}\nu_s^0 \in\,]-\infty, 0[$, $\int^{\omega} \pi_s\, dt = +\infty$, $s = \overline{1, k_0}$, $\pi_k \in L_\Delta$, $k = \overline{k_0+1, s_0}$, $1 \le k_0 \le s_0$;

2) $$J_s \equiv \exp\left[\left(\operatorname{Re}\nu_s^0 + \varepsilon_0\right)\int_T^t \pi_s\, d\tau\right] \int_T^t \left(L^* + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{s_0} \| P_{n_s n_k} \| \right) \times$$

$$\times \exp\left[-\left(\operatorname{Re}\nu_s^0 + \varepsilon_0\right)\int_T^\tau \pi_s\, dt\right] d\tau = o_s(1), \quad t \uparrow \omega, \; s = \overline{1, s_0},$$

ε_0 — *достаточно малая положительная константа.*

Тогда д. с. (3) *имеет свойство St при $t \uparrow \omega$.*

При доказательстве используется лемма 3.1 из [2], впервые примененная О. Перроном [3], а затем Н. И. Гавриловым [4] и А. В. Костиным [5].

***Следствие* 1.** *Если д. с.* (3) *такова, что*

1) $\operatorname{Re}\nu_s^0 \in\,]-\infty, 0[$, $\int^{\omega} \pi_s\, dt = +\infty$, $s = \overline{1, k_0}$, $\pi_k \in L_\Delta$, $k = \overline{k_0+1, s_0}$, $1 \le k_0 \le s_0$;

2) $$\pi_s^{-1}\left(L^* + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{s_0} \| P_{n_s n_k} \| \right) = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

или

$$L^*, \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{s_0} \| P_{n_s n_k} \| \in L_\Delta, \quad s = \overline{1, k_0}, \; k_0 = s_0.$$

$$\left(L^* + \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{s_0} \| P_{n_s n_k} \| \in L_\Delta, \quad s = \overline{k_0+1, s_0}, \; k_0 < s_0 \right),$$

то д. с. (3) *имеет свойство St при $t \uparrow \omega$.*

При доказательстве используются оценки для J_s, $s = \overline{1, s_0}$, из [6, с. 11].

Теорема 2. *Пусть д. с.* (3) *такова, что*

1) $\operatorname{Re} \nu_s^0 \in \,]-\infty, 0[$, $\int\limits^{\omega} \pi_s \, dt = +\infty$, $\pi_1 \pi_s^{-1} = c_s + o_s(1)$, $t \uparrow \omega$, $c_s \in [0, +\infty[$, $s = \overline{1, s_0}$;

2) *существует* $\mu \in \,]0, +\infty[$ *такое, что* $\operatorname{Re} \nu_s^0 + \mu c_s \in \,]-\infty, 0[$,

$$J_s^* = \exp\left[(\operatorname{Re} \nu_s^0 + \mu c_s + \varepsilon_0) \int\limits_T^t \pi_s \, d\tau \right] \int\limits_T^t \left[\exp\left(-\mu\alpha \int\limits_T^{\tau} \pi_1 dt \right) L^* + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{s_0} \| P_{n_s n_k} \| \right] \times$$

$$\times \exp\left[-(\operatorname{Re} \nu_s^0 + \mu c_s + \varepsilon_0) \int\limits_T^{\tau} \pi_s \, d\tau \right] d\tau = o_s(1), \quad t \uparrow \omega, \; s = \overline{1, s_0},$$

ε_0 *— достаточно малая положительная постоянная.*

Тогда д. с. (3) *имеет свойство* $A\,s\,St$ *при* $t \uparrow \omega$.

Доказательство. В д. с. (3) выполним замену

$$X_{n_s} = \exp\left(-\mu \int\limits_T^t \pi_1 d\tau \right) Y_{n_s}, \quad s = \overline{1, s_0}.$$

Относительно Y_{n_s}, $s = \overline{1, s_0}$, получим д. с. вида

$$Y_{n_s}' = \pi_s \left[(\nu_s^0 + \mu c_s) E_{n_s} + P_{n_s}^* \right] Y_{n_s} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{s_0} P_{n_s n_k} Y_{n_k} + G_{n_s}^*(t, Y), \quad s = \overline{1, s_0},$$

где

$$P_{n_s}^* \equiv \mu o_s(1) E_{n_s} + P_{n_s}, \quad G_{n_s}^*(t, Y) \equiv \exp\left(\mu \int\limits_T^t \pi_1 d\tau \right) G_{n_s}\left[t, \exp\left(-\mu \int\limits_T^t \pi_1 d\tau \right) Y \right],$$

$$\| G_{n_s}^* \| \le \exp\left(-\mu\alpha \int\limits_T^t \pi_1 d\tau \right) L^* \| Y \|^{1+\alpha}, \quad s = \overline{1, s_0},$$

к которой применим результат теоремы 1.

Следствие 2. *Если д. с.* (3) *такова, что*

1) $\operatorname{Re} \nu_s^0 \in \,]-\infty, 0[$, $\int\limits^{\omega} \pi_s \, dt = +\infty$, $\pi_1 \pi_s^{-1} = c_s + o_s(1)$, $t \uparrow \omega$, $c_s \in [0, +\infty[$, $s = \overline{1, s_0}$;

2) *существует* $\mu \in \,]0, +\infty[$ *такая, что* $\operatorname{Re} \nu_s^0 + \mu c_s \in \,]-\infty, 0[$,

$$\pi_s^{-1} \left[\exp\left(-\mu\alpha \int\limits_T^t \pi_1 d\tau \right) L^* + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{s_0} \| P_{n_s n_k} \| \right] = o_s(1), \quad t \uparrow \omega,$$

или

$$\exp\left(-\mu\alpha\int_T^t \pi_1 d\tau\right) L^*, \quad \|P_{n_s n_k}\| \in L_\Delta, k = \overline{1, s_0}, k \neq s, s = \overline{1, s_0},$$

то д. с. (3) *имеет свойство* $A\ s\ St$ *при* $t \uparrow \omega$.

При доказательстве используются оценки для J_s^*, $s = \overline{1, s_0}$, из [6, с. 11].

Лемма 1. *Если д. с.* (2) *имеет свойство* St *при* $t \uparrow \omega$, *то любое решение* $X = X^*(t)$ *д. с.* (2) *с начальным условием* $X^*(T_0) = X(T_\varepsilon)$, $T_0 \in]T_\varepsilon, \omega[$, *удовлетворяет условию* $\| X^*(t) \| < \varepsilon$ *для всех* $t \in [T_0, \omega[$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует $T^* \in [T_0, \omega[$ такое, что $\| X^*(T^*) \| = \varepsilon$. Поскольку $X^*(t) = X(t - (T_0 - T_\varepsilon))$, то $\| X^*(T^*) \| = \| X^*(T^* - T_0 + T_\varepsilon)) \| = \varepsilon$, что противоречит неравенству $\| X(t) \| < \varepsilon$ для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$.

Теорема 3. *Пусть д. с.* (3) *такова, что*

1) $\operatorname{Re} \nu_1^0 \in]0, +\infty[$, $\int^\omega \pi_1 dt = +\infty$;

2) $\left(\|P_{n_1 n_k}\| + L^*\right) \exp\left(-\operatorname{Re} \nu_1^0 \int_T^t \pi_1 d\tau\right) \in L_\Delta$, $k = \overline{2, s_0}$.

Тогда д. с. (3) *имеет свойство* $\overline{St}$ *при* $t \uparrow \omega$.

Доказательство проводится методом от противного с использованием леммы 1.

3. Приведение д. у. (1) к д. с. специального вида (3). Лемма 2. *Если* $\pi'\pi^{-2} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *то преобразование* $y = \pi z_1$, $y^{(s-1)} = \pi^s z_s$, $s = \overline{2, n}$, *приводит д. у.* (1) *к д. с. вида*

$$Z' = \pi P Z + H, \tag{4}$$

где

$$P = \| p_{sk} \|, s, k = \overline{1, n}, \ p_{s, s+1} \equiv 1, s = \overline{1, n-1}, \ p_{ns} = -\pi^{-n+s-1} p_{n-s+1},$$

$$p_{ss} = -s\pi'\pi^{-2}, s = \overline{1, n-1}, \ p_{nn} = -\pi^{-1} p_1 - n\pi'\pi^{-2}, \ p_{sk} \equiv 0, s = \overline{1, n-2},$$

$$k = \overline{s+2, n}, \ p_{sk} \equiv 0, s = \overline{2, n-2}, k = \overline{1, s-1}, \ \det(P_0 - \lambda E_n) \equiv \lambda^n + \sum_{s=1}^n p_s^0 \lambda^{n-s},$$

$$P_0 = \lim_{t \uparrow \omega} P, \ \| H \| \leq M_0 \Omega_0 \| Z \|^{1+\alpha}, M_0 \in]0, +\infty[.$$

Доказательство совпадает с доказательством леммы 2.1 из [2].

Применяя к д. с. (4) метод обобщенных „срезающих" преобразований [7], получаем д. с. вида

$$X'_{n_s} = \pi_s \left(\nu_s^0 E_{n_s} + H_{n_s} + P_{n_s} \right) X_{n_s} + P_{n_s n} X + F_{n_s}, \quad s = \overline{1, s_0}, \ \sum_{s=1}^{s_0} n_s = n_0,$$

$$X'_{n_k} = \pi (\lambda_k^0 E_{n_k} + H_{n_k} + P_{n_k}) X_{n_k} + P_{n_k n} X + F_{n_k},$$

$$k = \overline{n_0 + 1, n_0 + k_0}, \ \sum_{k=n_0+1}^{n_0+k_0} n_k = n - n_0. \tag{5}$$

где $\pi_s : \Delta \to]0, +\infty[$, $s = \overline{1, s_0}$, — известные функции, причем $\pi_{s_0}\pi^{-1} = o(1)$, $\pi_{s-1}\pi_s^{-1} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{2, s_0}$; $\nu_s^0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\nu_s^0 \neq 0$, $s = \overline{1, s_0}$, — известные константы: $\| P_{n_s} \|$, $\| P_{n_k} \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$: $\| P_{n_s n} \|$, $\| P_{n_k n} \| = O(\Omega)$, $t \uparrow \omega$: $\| F_{n_s} \| \leq M_0 \Omega_s \| X \|^{1+\alpha}$, $s = \overline{1, s_0}$, $\| F_{n_k} \| \leq M_0 \Omega_0 \| X \|^{1+\alpha}$, $s = \overline{n_0 + 1, n_0 + k_0}$.

***Замечание* 2.** Если к д. с. (4) несколько раз применить преобразования из [7], то можно добиться, чтобы в д. с. (5) $\| P_{n_s n} \|$, $s = \overline{1, s_0}$, $\| P_{n_k n} \|$, $k = \overline{n_0 + 1, n_0 + k_0}$ убывали к нулю при $t \uparrow \omega$ достаточно быстро.

При выполнении условий $\pi_s^{-1} \| P'_{n_s} \|$, $\pi^{-1} \| P'_{n_k} \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{1, s_0}$, $k = \overline{n_0 + 1, n_0 + k_0}$, известное преобразование К. П. Персидского [8], не нарушая свойства St при $t \uparrow \omega$ д. с. (5), приводит ее к д. с. специального вида (3), у которой

$$s_0 = n, \ \pi \equiv \pi_{s_0}, \ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} \| P_{n_s n_k} \| = O(\Omega_s^*), \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \| P_{n_j n_k} \| = O(\Omega), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\| G_{n_s} \| \leq M_0 \Omega_s \| X \|^{1+\alpha}, \ \| G_{n_j} \| \leq M_0 \Omega_0 \| X \|^{1+\alpha}. \quad s = \overline{1, n_0}, \ j = \overline{n_0 + 1, n}.$$

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Харьков, 1982. – 471 с.
2. *Витриченко И. Е.* К устойчивости в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых корней одного неавтономного квазилинейного уравнения n-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, №12. – С. 2027–2046.
3. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differential gleichungen // Math. Z. – 1930. – **32**. – S. 703–728.
4. *Гаврилов Н. И.* Об устойчивости по Ляпунову нелинейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Одес. ун-та. Сер. мат. наук. – 1956. – **146**, вып. 6. – С. 7–11.
5. *Костин А. В.* Устойчивость и асимптотика почти треугольных систем: Дис … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1962. – 132 с.
6. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 290 с.
7. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному диагональному виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 1994. – **110**, – P. 59–65.
8. *Персидский К. П.* О характеристических числах дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер мат. и мех. – 1947. – № **42**, вып. 1. – С. 5–47.

Получено 09.08.93