УДК 519.21

А. М. Кулик, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УПРЕЖДАЮЩИМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

For a stochastic differential equation with an anticipating initial condition and localized Skorokhod stochastic integral, we give a sequence of stochastic integral-differential equations which approximates the initial equation. A sequence of solutions of these equations is obtained. Convergence of the sequence to a certain process implies that this process is a (generally speaking, local) solution of the initial equation.

Для стохастичного диференціального рівняння з попереджуючою початковою умовою та локалізованим стохастичним інтегралом Скорохода наведено апроксимуючу його послідовність стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь. Одержано послідовність розв'язків цих рівнянь, зі збіжності якої до деякого процесу випливає, що цей процес є (взагалі кажучи, локальним) розв'язком вихідного рівняння.

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с винеровским процессом $W = (W(t), t \in [0, 1])$ на нем. Рассмотрим стохастическое интегральное уравнение

$$x(t) = \eta(W) + \int_0^t b(x(s), s)\, dW(s) + \int_0^t a(x(s), s)\, ds, \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

где $\eta(\cdot)$ — измеримый функционал на $C_0([0, 1])$, $a, b \in C^2(\mathbb{R} \times [0, 1])$, а интеграл по dW в правой части — расширенный стохастический интеграл при отсутствии моментных ограничений, определяемый как локализация расширенного стохастического интеграла Скорохода [1]; при этом предполагается, что $\mathcal{F} = \sigma[W]$. Для уравнения (1) со стохастическим интегрированием по Скороходу в работах [2, 3] при стохастически дифференцируемом начальном условии η и достаточно гладких a и b получены локальное и глобальное решения в случаях произвольной функции b и функции b, линейной по первому аргументу, соответственно.

Целью настоящей статьи является построение последовательности решений уравнений

$$x_n(t) = \eta(W) + \int_0^t b(x_n(s), s) \int_0^1 h_n(\tau - s)\, dW(\tau)\, ds -$$

$$- \int_0^t b'_x(x_n(s), s) \int_0^1 Dx_n(s)(\tau) h_n(\tau - s)\, d\tau\, ds + \int_0^t a(x_n(s), s)\, ds, \tag{2}$$

$$n \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N},$$

сходящейся к решению уравнения (1); здесь $Dx_n(s)(\cdot)$ — стохастическая производная при отсутствии моментных ограничений случайной величины $x_n(s)$, а $\{h_n\}$ — некоторая δ-образная последовательность гладких функций. Метод получения решения (1) как предела решений аппроксимирующей (1) последовательности уравнений (2) представляет интерес в связи с перспективами его применения для решения уравнений вида (1) со стохастическим интегрированием по мерам, отличным от винеровской. Кроме того, изучение интегро-дифференциальных уравнений (2) имеет самостоятельное значение в силу существования ряда задач математической статистики, приводящих к уравнениям такого вида [4].

2. Далее будем обозначать через $C_H^1(C_0([0,1]),X)$ пространство отображений из $C_0([0,1])$ в банахово пространство X, имеющих непрерывную производную по подпространству

$$H = \left\{ f \in C_0([0,1]) \,\middle|\, f(s) = \int_0^s \dot{f}(\tau)\,d\tau,\ \dot{f} \in L_2([0,1]) \right\}$$

(см., например, [5]). Будем считать, что функции $\{h_n\} \subset C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяют условиям:

H1) $h_n \geq 0$;

H2) $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = 1$;

H3) $\exists\, \{d_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^+,\ d_n \to 0,\ n \to \infty,\ \operatorname{supp} h_n \subset (-d_n, 0)$;

а коэффициенты a и b — одному из условий:

C1) функция $b \in C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ линейна по первому аргументу и $a \in C_b^1 \cap C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$;

C2) $a, b \in C_b^1 \cap C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$, где через C_b^1 обозначено пространство функций, ограниченных и непрерывных вместе с производной.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* H1) – H3), *одно из условий* C1), C2) *и* $\eta(\cdot) \in C_H^1(C_0([0,1]))$. *Тогда существуют* $\{x,\ x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset C_H^1(C_0([0,1]),\ C([0,1]))$ *такие, что процессы* $x_n(\cdot) = x_n(W)(\cdot)$ *сходятся к процессу* $x(\cdot) = x(W)(\cdot)$ *как случайные элементы со значениями в* $C([0,1]$ *в среднем квадратическом вместе со своими стохастическими производными при отсутствии моментных ограничений на множествах вида* $\{W \in \mathcal{U}_k\}$, *где* $\mathcal{U}_k$ — *некоторая открытая окрестность произвольного компакта* $K \subset C_0([0,1])$. *При этом:*

I) *если выполнено условие* C1), *то процессы* $x_n(\cdot)$ *удовлетворяют* (2) *и процесс* $x(\cdot)$ *удовлетворяет* (1);

II) *если выполнено условие* C2), *то существует* $\tau \in C_H^1(C_0([0,1]))$, $\tau > 0$, *п. н. относительно меры Винера такое, что процессы* $x_n(\cdot)$ *и* $x(\cdot)$ *удовлетворяют* (2) *и* (1) *соответственно для каждого* $t \in [0,1]$ *для почти всех* ω *таких, что* $\tau(W(\omega)) > t$.

Доказательство. Решение (2) будем искать в виде $x_n(t) = x_n(W,t)$, где функционалы $x_n(\cdot,\cdot)$ на $C_0([0,1]) \times [0,1]$ удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial x_n(u,t)}{\partial t} + b_x'(x_n(u,t),t)\left\langle \hbar_n(t), \frac{\partial x_n(u,t)}{\partial u} \right\rangle = $$
$$= b(x_n(u,t),t) f_n(u,t) + a(x_n(u,t),t) \qquad (3)$$

и начальному условию

$$x_n(u,0) = \eta(u), \quad u \in C_0([0,1]); \qquad (4)$$

здесь

$$f_n(u,t) = -\int_0^1 h_n'(\tau - t)u(\tau)\,d\tau$$

и при каждом $t \in [0,1]$ функция $\hbar_n(t) \in C_0([0,1])$ задана соотношением

$$\hbar_n(t)(s) = \int_0^s h_n(\tau - t)\,d\tau, \quad s \in [0,1].$$

Обозначим через X пространство $[0,1] \times C_0([0,1]) \times \mathbb{R}$ и запишем уравнения характеристических кривых в X уравнения (3), $(t,u,x) = (t(r), u(r), x(r))$, $r \in [0,1]$:

$$\frac{dt(r)}{dr} = 1, \quad \frac{du(r)}{dr} = b_x'(x(r),t(r))\,\hbar_n(t(r)),$$

$$\frac{dx(r)}{dr} = b(x(r),t(r))\,f_n(u(r),t(r)) + a(x(r),t(r)), \quad r \in [0,1],$$

и значит, $t(r) = r$,

$$\begin{cases} \dfrac{du(r)}{dr} = b_x'(x(r),r)\hbar_n(r), \\ \dfrac{dx(r)}{dr} = b(x(r),r)f_n(u(r),r) + a(x(r),r), \quad r \in [0,1]. \end{cases} \tag{5}$$

Зафиксируем произвольную точку $\tilde{u} \in C_0([0,1])$ и найдем характеристическую кривую уравнения (3), удовлетворяющую начальному условию (4), такую, что $u(0) = \tilde{u}$. Из второго уравнения в (5) и краевого условия $x(0) = \eta(\tilde{u})$ получаем $x(r) = \tilde{X}(F_n(u(\cdot)), \eta(\tilde{u}))(r)$, $r \in [0,1]$ где через $\tilde{X}(f,\eta)$ для $f \in C_0^1([0,1])$, и $\eta \in \mathbb{R}$ обозначено решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'(s) = b(x(s),s)f'(s) + a(x(s),s), \quad s \in [0,1], \\ x(0) = \eta, \end{cases} \tag{6}$$

а через $F_n(u(\cdot))$ — зависящая от проекции кривой $\{(t(r), u(r), x(r)),\ r \in [0,1]\}$ на вторую координату функция

$$F_n(s) = \int_0^s f_n(u(\theta),\theta)\,d\theta, \quad s \in [0,1].$$

Лемма 1. *Для любых* $a, b \in C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ *таких, что функции* a, a_x', b, b_x', b_t' *ограничены на* $\mathbb{R} \times [0,1]$, *существует отображение* $X \in C^1(C_0([0,1]) \times \mathbb{R}, C([0,1]))$, *сужение которого на* $C_0^1([0,1]) \times \mathbb{R}$ *совпадает с* $\tilde{X}$.

Доказательство. Построим искомое отображение. Пусть функция $G(x,s,c)$, $x \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$, $c \in \mathbb{R}$, является решением краевой задачи

$$\begin{cases} G_x'(x,s,c) = b(G(x,s,c),s), \\ G(0,s,c) = c. \end{cases}$$

Поскольку $b \in C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$, $G \in C^2(\mathbb{R} \times [0,1] \times \mathbb{R})$, причем функции $Q(x,s,c) := G_s'(x,s,c)$ и $R(x,s,c) := G_c'(x,s,c)$ являются решениями краевых задач

$$\begin{cases} Q_x'(x,s,c) = b_x'(G(x,s,c),s)Q(x,s,c) + b_t'(G(x,s,c),s), \\ Q(0,s,c) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} R_x'(x,s,c) = b_x'(G(x,s,c),s)R(x,s,c), \\ R(0,s,c) = 1, \end{cases}$$

где

$$R(x,s,c) = \exp\left[\int_0^x b_x'(G(y,s,c),s)\right]dy,$$

$$Q(x,s,c) = R(x,s,c)\int_0^x b_t'(G(y,s,c),s)\exp\left[-\int_0^y b_x'(G(z,s,c),s)dz\right]dy.$$

При фиксированных $f \in C_0^1([0,1])$, $\eta \in \mathbb{R}$ решение (6) найдем в виде $x(s) = G(f(s),s,c(s))$, $s \in [0,1]$, где $c(\cdot) = c(f,\eta,\cdot) \in C_0^1([0,1])$ — неизвестная функция. Поскольку

$$x'(s) = G_x'(f(s),s,c(s))f'(s) + G_s'(f(s),s,c(s)) + G_c'(f(s),s,c(s))c'(s),$$

$$x(0) = G(f(0),0,c(0)) = G(0,0,c(0)) = c(0),$$

то, для того чтобы $x(\cdot)$ являлось решением (6), достаточно, чтобы $c(\cdot)$ удовлетворяло системе

$$\begin{cases} c'(s) = a\big(G(f(s),s,c(s)),s\big)\exp\left[-\int_0^{f(s)} b_x'(G(y,s,c(s)),s)dy\right] - \\ \qquad -\int_0^{f(s)} b_t'(G(y,s,c(s)),s)\exp\left[-\int_0^y b_x'(G(z,s,c(s)),s)dz\right]dy, \\ c(0) = \eta. \end{cases} \tag{7}$$

При каждых $(f,\eta) \in C_0([0,1]) \times \mathbb{R}$ система (7) имеет вид

$$\begin{cases} c'(s) = F(f)(c(s),s), \qquad s \in [0,1], \\ c(0) = \eta, \end{cases}$$

где функция $F(f)(x,s)$, $f \in C_0([0,1])$, $x \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$, при каждом f локально удовлетворяет условию Липшица по x и ограничена по модулю числом $B_1 \exp B_2 \|f\|$ (здесь и далее B_k, $k = 1, 2, \ldots$, — положительные константы), поэтому решение (7) $c(f,\eta,\cdot)$ существует и единственно при каждых $(f,\eta) \in C_0([0,1]) \times \mathbb{R}$. Более того, поскольку функция $F(f)(x,s)$ непрерывно дифференцируема по Фреше, а ее производная ограничена на $C_0([0,1]) \times \mathbb{R} \times [0,1]$ и локально удовлетворяет условию Липшица по x, решение (7) непрерывно дифференцируемо по Фреше по (f,η). Отображение

$$X\colon C_0([0,1]) \times \mathbb{R} \to C([0,1]), \quad X(f,\eta)(s) = G(f(s),s,c(f,\eta,s))$$

удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Учитывая явный вид функций F_n и f_n, получаем, чтозадача (5) с краевыми условиями $u(0) = \tilde{u}$, $x(0) = \eta(\tilde{u})$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} u(r) = \tilde{u} + \int_0^r b_x'(x(\tau),\tau)h_n(\tau)d\tau, \qquad r \in [0,1], \\ x(r) = X\Big(\int_0^1 h_n(\tau - \cdot)\tilde{u}(\tau)d\tau + \\ \qquad + \int_0^{\cdot}\int_0^\theta\int_0^1 h_n(\tau-\theta)h_n(\tau-\zeta)b_x'(x(\zeta),\zeta)d\tau d\zeta d\theta, \eta(\tilde{u})\Big)(r). \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим наряду с (8) систему

$$\begin{cases} u(r)(\cdot) = \tilde{u}(\cdot) + \int_0^{r\wedge\cdot} b'_x(x(\tau), \tau)\, d\tau, \\ x(r) = X\left(\tilde{u}(\cdot) + \frac{1}{2} \int_0^{\cdot} b'_x(x(\zeta), \zeta)\, d\zeta, \eta(\tilde{u}) \right)(r), \quad r \in [0, 1]. \end{cases} \tag{8'}$$

Лемма 2. *При всех* $\tilde{u} \in C_0([0, 1])$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *системы*(8) *и* (8′) *имеют единственные решения. Эти решения задают непрерывно дифференцируемые по подпространству* H *отображения* Y_n, $Y: C_0([0, 1]) \to C([0, 1], C_0([0, 1]) \times \mathbb{R})$, *причем значения отображений* Y_n *и их производных сходятся при* $n \to \infty$ *равномерно по* $\tilde{u}$, *лежащим в произвольном компакте из* $C_0([0, 1])$, *к значениям* Y *и* Y' *соответственно.*

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, решение (8), соответствующее $\tilde{u} \in C_0([0, 1])$, найдем как предел последовательных приближений:

$$u_0(r) = \tilde{u}, \quad x_0(r) = \eta(\tilde{u}), \quad r \in [0, 1], \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$\begin{cases} u_m(r) = \tilde{u} + \int_0^r b'_x(x_{m-1}(\tau), \tau) h_n(\tau)\, d\tau, & r \in [0, 1], \\ x_m(r) = X\Big(\int_0^1 h_n(\tau - \cdot) \tilde{u}(\tau)\, d\tau + \\ \quad + \int_0^{\cdot} \int_0^{\theta} \int_0^1 h_n(\tau - \theta) h_n(\tau - \zeta) b'_x(x_{m-1}(\zeta), \zeta)\, d\tau\, d\zeta\, d\theta, \eta(\tilde{u}) \Big)(r). \end{cases}$$

Отметим, что в силу ограниченности функции b'_x последовательность $\{(u_m, x_m)\}$ ограничена по норме в $C([0, 1], C_0([0, 1]) \times \mathbb{R})$. Поскольку при фиксированных $\tilde{x}$, r значение $X(f, \tilde{x})(r)$ зависит только от значений функции f на отрезке $[0, r]$, то, учитывая ограниченность производной по f от функционала X, получаем, что для всех $r \in [0, 1]$

$$|x_m(r) - x_{m-1}(r)| \le B_3 \sup_{s \in [0, r]} \int_0^s \int_0^{\theta} \int_0^1 h_n(\tau - \theta) h_n(\tau - \zeta) |x_{m-1}(\zeta) -$$

$$- x_{m-2}(\zeta)|\, d\tau\, d\zeta\, d\theta \le B_3 \sup_{s \in [0, r]} \int_0^s \int_0^1 h_n(\tau - \zeta) |x_{m-1}(\zeta) - x_{m-2}(\zeta)|\, d\tau\, d\zeta \le$$

$$\le B_3 \int_0^r |x_{m-1}(\zeta) - x_{m-2}(\zeta)|\, d\zeta,$$

где B_3 зависит только от $\tilde{u}$. Тогда

$$\| x_m - x_{m-1} \| \le \frac{B_3^m}{m!} \| x_1 - x_0 \|,$$

последовательность $\{x_m\}$ сходится в $C([0, 1])$ к некоторой функции x, а значит, и $\{u_m\}$ сходится в $C([0, 1], C_0([0, 1]))$ к некоторому u, причем пара (u, x) является решением системы (8). Из аналогичных оценок следует единственность решения. Таким же образом получаем значение $Y(\tilde{u})$ как предел последовательности приближений:

$$u_0(r) = \bar{u}, \quad x_0(r) = \eta(\bar{u}), \quad r \in [0, 1], \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$\begin{cases} u_m(r)(\cdot) = \bar{u}(\cdot) + \int\limits_0^{r \wedge \cdot} b'_x(x_{m-1}(\tau), \tau)\, d\tau, \\ x_m(r) = X\left(\bar{u}(\cdot) + \dfrac{1}{2} \int\limits_0^{\cdot} b'_x(x_{m-1}(\zeta), \zeta)\, d\zeta, \eta(\bar{u}) \right)(r), \qquad r \in [0, 1]. \end{cases}$$

В силу того, что $X \in C^1(C_0([0, 1]) \times \mathbb{R},\, C([0, 1]))$ каждый член последовательностей $\{(u_m, x_m)\}$, приближающих Y_n и Y, лежит как функционал от $\bar{u}$ в $C^1_H(C_0([0, 1]),\, C([0, 1]),\, C_0([0, 1]) \times \mathbb{R})$. В силу оценок, аналогичных приведенным выше, соответствующие последовательности производных равномерно сходятся при $m \to \infty$ по каждому компактному подмножеству $C_0([0, 1])$, откуда следует утверждение о непрерывной дифференцируемости функций Y_n и Y.

Легко проверить, что из выполнения условий H1) – H3) следует, что: а) для произвольного компакта $K_0 \subset C_0([0, 1])$

$$\int\limits_0^1 h_n(\tau - s) u(\tau)\, d\tau \to u(s), \quad n \to \infty,$$

равномерно по $s \in [0, 1]$, $u \in K_0$; б) для произвольного компакта $K \subset \subset C([0, 1])$

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^s h_n(\tau - \theta) u(\tau)\, d\theta\, d\tau \to \int\limits_0^{t \wedge s} u(\tau)\, d\tau, \quad n \to \infty,$$

равномерно по $t, s \in [0, 1]$, $u \in K$. Кроме того, поскольку

$$\left| \int\limits_0^s \int\limits_0^\theta \int\limits_0^1 h_n(\tau - \theta) h_n(\tau - \zeta) u(\zeta)\, d\tau\, d\zeta\, d\theta - \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^s h_n(\tau - \theta)\, d\theta \right] \left[\int\limits_0^s h_n(\tau - \zeta) u(\zeta)\, d\zeta \right] d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \left| \int\limits_0^s \int\limits_0^\theta \int\limits_0^1 h_n(\tau - \theta) h_n(\tau - \zeta) (u(\zeta) - u(\theta))\, d\tau\, d\zeta\, d\theta \right| \le \frac{1}{2} w(u, \alpha_n),$$

где $w(u, \alpha_n)$ — модуль непрерывности функции u, имеем: в) для произвольного компакта $K \subset C([0, 1])$

$$\int\limits_0^s \int\limits_0^\theta \int\limits_0^1 h_n(\tau - \theta) h_n(\tau - \zeta) u(\zeta)\, d\tau\, d\zeta\, d\theta \to \frac{1}{2} \int\limits_0^s u(\tau)\, d\tau, \quad n \to \infty,$$

равномерно по $u \in K$, $s \in [0, 1]$.

Пусть теперь K — произвольный компакт из $C_0([0, 1])$. В силу утверждения а) существует такой компакт $K_1 \subset C_0([0, 1])$, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u \in K$

$$\int\limits_0^1 h_n(\tau - \cdot) u(\tau)\, d\tau \in K_1,$$

в силу ограниченности функции b'_x существует такой компакт $K_2 \subset C_0([0, 1])$, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u \in K$, $x \in C([0, 1]$

$$\int_0^1 h_n(\tau-\cdot)u(\tau)\,d\tau + \int_0^{\cdot}\int_0^{\theta}\int_0^1 h_n(\tau-\theta)h_n(\tau-\zeta)b'_x(x(\zeta),\zeta)\,d\tau\, d\zeta\, d\theta \in K_2.$$

Тогда в силу непрерывности отображений η, X и b'_x существует компакт $K_3 \subset C([0,1])$ такой, что $\forall\ \tilde u \in K$, $n \in \mathbb{N}$ функция $b(\cdot) = b'_x(y_n(\tilde u)(\cdot),\cdot) \in$ $\in K_3$, здесь $\{y_n(\tilde u),\ n \in \mathbb{N},\ y(\tilde u)\} \subset C([0,1])$ таковы, что $Y_n(\tilde u) =$ $= (\nu_n(\tilde u), y_n(\tilde u))$, $n \in \mathbb{N}$, $Y(\tilde u) = (\nu(\tilde u), y(\tilde u))$. Аналогично оценкам доказательства существования решения (8) $\forall s \in [0,1]$ имеем

$$|y_n(\tilde u)(s) - y(\tilde u)(s)| \le B_4 \sup_{r\in[0,s]}\left|\int_0^1 h_n(\tau-r)\tilde u(\tau)\,d\tau - \tilde u(r) - \frac{1}{2}\int_0^r b'_x(y_n(\tilde u)(\tau),\tau)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^r\int_0^{\theta}\int_0^1 h_n(\tau-\theta)h_n(\tau-\zeta)b'_x(y_n(\tilde u)(\zeta),\zeta)\,d\tau\, d\zeta\, d\theta\right| +$$

$$+ B_4 \sup_{r\in[0,s]}\left|\frac{1}{2}\int_0^r b'_x(y_n(\tilde u)(\tau),\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^r b'_x(y(\tilde u)(\tau),\tau)\,d\tau\right| \le$$

$$\le B_4 \sup_{\tilde u\in K}\left\|\int_0^1 h_n(\tau-\cdot)\tilde u(\tau)\,d\tau - \tilde u(\cdot)\right\| + B_4 \sup_{b\in K_3}\left\|\int_0^{\cdot}\int_0^{\theta}\int_0^1 h_n(\tau-\theta)h_n(\tau-\zeta)b(\zeta)\,d\tau\, d\zeta\, d\theta -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^{\cdot} b(\tau)\,d\tau\right\| + B_5\int_0^s |y_n(\tilde u)(\tau) - y(\tilde u)(\tau)|\,d\tau =$$

$$= \beta_n(K) + B_5\int_0^s |y_n(\tilde u)(\tau) - y(\tilde u)(\tau)|\,d\tau,$$

где $\{\beta_n(K)\}$ — сходящаяся в силу утверждений а), в) к нулю последовательность. Отсюда по стандартной лемме Гронуолла – Беллмана (см., например, [6], 1, § 6) $\|y_n(\tilde u) - y(\tilde u)\| \to 0$, $n \to \infty$, равномерно по $\tilde u \in K$, откуда с помощью утверждения б) получаем, что $Y_n(\tilde u)$ сходится к $Y(\tilde u)$ равномерно по $\tilde u \in K$. Проводя аналогичные рассмотрения для производных, получаем, что Y'_n стремится к Y' равномерно на каждом компакте, откуда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 2 устанавливает гладкую параметризацию семейств характеристических кривых для задач (3), (4) с помощью параметра $\tilde u \in C_0([0,1])$ и описывает предельное поведение этих семейств при $n \to \infty$. Согласно методу характеристик решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (см., например, [7]) для решения задачи (3), (4) при фиксированном $n \in$ $\in \mathbb{N}$ достаточно разрешить уравнение $(t(r,\tilde u), u(r,\tilde u), x(r,\tilde u)) = (r, Y_n(\tilde u)(r))$ относительно переменной x, исключая из него параметры $\tilde u$ и r. В случае линейной функции $b(x,s) = xb(s)$ это достигается легко:

$$t(r,\tilde u) = r, \quad u(r,\tilde u) = \tilde u + \int_0^r b(\tau)\hbar_n(\tau)\,d\tau,$$

откуда

$$r = t, \quad \tilde u = u - \int_0^r b(\tau)\hbar_n(\tau)\,d\tau$$

и решение (3), (4) имеет вид

$$x_n(u,t) = y_n\left(u - \int_0^t b(\tau)\dot{h}_n(\tau)d\tau\right)(t),$$

причем в силу доказанного выше последовательность $\{x_n(\cdot,\cdot)\}$ сходится в $C(C_0([0,1])\times[0,1])$ к функционалу

$$x: (u,t) \mapsto y\left(u(\cdot) - \int_0^{\cdot\wedge} b(\tau)d\tau\right)(t).$$

Для рассмотрения нелинейного случая нам понадобится следующий результат. Обозначим через T_1, $T_{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, и T_2, $T_{2,n}$, $n\in\mathbb{N}$, отображения из $[0,1]\times C_0([0,1])$ в $[0,1]\times C_0([0,1])$ и $\mathbb{R}$ соответственно такие, что $\forall\, t\in[0,1]$, $\tilde{u}\in C_0([0,1])$, $(t, Y(\tilde{u})(t)) = (T_1(t,\tilde{u}), T_2(t,u))\in X$ и $(t, Y_n(\tilde{u})(t)) = \big(T_{1,n}(t,\tilde{u}), T_{2,n}(t,\tilde{u})\big)\in X$, $n\in\mathbb{N}$.

Лемма 3. *Существует* $\tau\in C_H^1(C_0([0,1]))$, $\tau>0$, *п. н. относительно меры Винера такое, что для каждой точки* (t,u) *множества* $\mathcal{U}=\{t<\tau(u)\}\subset[0,1]\times C_0([0,1])$ *существует единственное* $\tilde{u}\in C_0([0,1])$ *такое, что* $T_1(t,\tilde{u})=(t,u)$ *и* $\forall\, n\in\mathbb{N}$ *существует единственное* $\tilde{u}_n\in C_0([0,1])$ *такое, что* $T_{1,n}(t,\tilde{u}_n)=(t,u)$. *Задаваемые таким образом функции* $[T_1]^{-1}$ *и* $[T_{1,n}]^{-1}$, $n\in\mathbb{N}$, *имеют непрерывную по* (t,u) *производную (по подпространству* H*) по* u *и* $[T_{1,n}]^{-1}$ *сходятся к* $[T_1]^{-1}$ *вместе с производными по* u *равномерно на каждом подмножестве* $\mathcal{U}$, *имеющем компактную проекцию на вторую координату.*

Доказательство. Отображения T_1 и $T_{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, имеют вид

$$T_1(t,\tilde{u}) = \left(t, \tilde{u}(\cdot) + \int_0^{\cdot} d(\tilde{u},t)(s)ds\right), \quad T_{1,n}(t,\tilde{u}) = \left(t, \tilde{u}(\cdot) + \int_0^{\cdot} d_n(\tilde{u},t)(s)ds\right),$$

где

$$d_n: (\tilde{u},t) \mapsto \int_0^t b'_x(y_n(\tilde{u})(\tau),\tau)h_n(\cdot-\tau)d\tau, \quad d: (\tilde{u},t)\mapsto b'_x(y(\tilde{u})(\cdot),\cdot)\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)$$

— отображения из $C_0([0,1])\times[0,1]$ в $L_2([0,1])$, имеющие непрерывную производную (по подпространству H) по $\tilde{u}$ такие, что $d_n\to d$, $n\to\infty$, вместе с производными (по H) по $\tilde{u}$ равномерно на каждом компакте из $C_0([0,1])\times[0,1]$. При произвольных (t,u^*) уравнение $T_1(t,u)=(t,u^*)$, как только

$$t < \tau_1(u^*) = \inf\Big\{t\in[0,1]\,\big|\, \exists\,\tilde{u}\in C_0([0,1]),$$

$$\|\tilde{u}-u^*\|_H \le \sup_{x,s}|b'_x(x,s)|,\ \|d'_n(\tilde{u},t)\|_{H,L_2([0,1])} > \frac{1}{2}\Big\},$$

имеет согласно принципу сжимающих отображений единственное решение, которое находится как предел последовательности

$$\{(t, u_m),\ m \in \mathbb{Z}_+\} : u_0 = u^*,\quad u_m(\cdot) = u^*(\cdot) - \int_0^{\cdot} d(u_{m-1}, t)(s)\,ds$$

и имеет как функция от (t, u^*) непрерывную производную (по H) по u^*. Аналогичные результаты справедливы для функций $T_{1,n}$ на множествах $\{t < \tau_{1,n}(u^*)\}$, где

$$\tau_{1,n}(u^*) = \inf\Big\{t \in [0, 1] \,\Big|\, \exists\, \tilde{u} \in C_0([0, 1]),$$

$$\|\tilde{u} - u^*\|_H \le \sup_{x,s} |b'_x(x, s)|,\ \|d'_{nu}(\tilde{u}, t)\|_{H, L_2([0,1])} > \frac{1}{2}\Big\}.$$

Кроме того, учитывая явный вид функций d и d_n и используя утверждение б) доказательства леммы 2, получаем, что $[T_{1,n}]^{-1}$ сходятся к $[T_1]^{-1}$ вместе с производными (по H) по u равномерно на каждом подмножестве множества $\{t < \tau_2(u)\}$, имеющем компактную проекцию на $C_0([0, 1])$, где $\tau_2 : u \mapsto \inf\{\tau_1(u), \tau_{1,n}(u), n \in \mathbb{N}\}$ — отделенный от нуля в некоторой окрестности каждого компактного подмножества $C_0([0, 1])$ функционал. Выбирая теперь $\tau \in C^1_H(C_0([0, 1]))$ таким, чтобы $\forall\, u \in C_0([0, 1])$ $\tau(u) < \tau_2(u)$ и для почти всех $u \in C_0([0, 1])$ относительно меры Винера $\tau(u) > 0$, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Если функция $b(\cdot, \cdot)$ линейна по x, то в силу доказанного выше случайные процессы $x_n(\cdot) = x_n(W, \cdot)$ сходятся как элементы со значениями в $C([0, 1])$ к процессу $x(\cdot) = x(W, \cdot)$ вместе со своими стохастическими производными при отсутствии моментных ограничений и

$$\int_0^{\cdot} a(x_n(s), s)\,ds \to \int_0^{\cdot} a(x(s), s)\,ds$$

P-п. н. Кроме того, в силу равномерной сходимости на компактах вместе с производными функционалов x_n к x случайные процессы $b_n(\cdot) = b(x_n(W, \cdot), \cdot)$ сходятся P-п. н. к процессу $b(\cdot) = b(x(W, \cdot), \cdot)$ вместе со своими стохастическими производными и равномерно вместе с производными на множествах $\{W \in \mathcal{U}_k\}$, где $\mathcal{U}_k$ — некоторая окрестность произвольного компакта $K \subset C_0([0, 1])$, т. е. b_n сходятся вместе с производными к b в среднем квадратическом на каждом множестве $\{W \in \mathcal{U}_k\}$. Тогда, поскольку последовательность гауссовских сильных случайных операторов [8] $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, действующих на детерминированные функции $\varphi \in L_2([0, 1])$ по формуле

$$(A_n \varphi)(t) = \int_0^t \varphi(s) \int_0^1 h_n(\tau - s)\,dW(\tau)\,ds,$$

сходится к случайному оператору A, действующему на $\varphi \in L_2([0, 1])$ по формуле

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(s)\,dW(s),$$

то последовательность процессов [1]

$$(A_n b_n)(\cdot) = \int_0^{\cdot} b(x_n(s), s) \int_0^1 h_n(\tau - s)\, dW(\tau)\, ds -$$

$$- \int_0^{\cdot} b'_x(x_n(s), s) \int_0^1 Dx_n(s)(\tau) h_n(\tau - s)\, d\tau\, ds$$

сходится по вероятности в $L_2([0, 1])$ [9] к процессу

$$(Ab)(\cdot) = \int_0^{\cdot} b(x(s), s)\, dW(s),$$

откуда с учетом того, что функционалы $x_n(\cdot, \cdot)$ являются решениями задачи (3), (4), получаем

$$x(\cdot) = \eta(W) + \int_0^{\cdot} b(x(s), s)\, dW(s) + \int_0^{\cdot} a(x(s), s)\, ds$$

P-п. н., т. е. утверждение I теоремы доказано.

В случае нелинейного $b(\cdot, \cdot)$, полагая для $u \in C_0([0, 1])$, $t \in [0, 1]$

$$x(u, t) = T_2\left([T_1]^{-1}(t \wedge \tau(u), u)\right),$$

$$x_n(u, t) = T_{2,n}\left([T_{1,n}]^{-1}(t \wedge \tau(u), u)\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

получаем в силу аналогичных рассуждений утверждение II теоремы. Теорема доказана.

3. Замечания. 1. Можно показать, что в случае $\eta \equiv \text{const}$ функционал τ из утверждения II теоремы может быть выбран большим 1 и уравнения (2) задают глобальную упреждающую аппроксимацию диффузионного процесса, задаваемого уравнением (1).

2. Использование расширенного стохастического интеграла при отсутствии моментных ограничений вместо интеграла Скорохода позволяет избежать некоторых технических выкладок и опустить ограничения на рост начальных условий.

1. *Дороговцев А. А.* Стохастический анализ и случайные отображения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 118 с.
2. *Buckdahn R.* Skorohod stochastic differential equations of diffusion type // Probab. Theory and Related Fields. – 1992. – **93**, № 2. – P. 297–323.
3. *Buckdahn R.* Quasilinear partial stochastic differential equation without anticipation requirement. – Berlin, 1988. – 25 p. – (Preprint / Humbolt-Univ.; № 176).
4. *Дороговцев А. А.* Об одном типе стохастических интегро-дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. – (в печати).
5. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: в 2-х т. – Гостехтеоретиздат, 1951. – Т. 2. – 544 с.
8. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
9. *Дороговцев А. А.* Stochastic calculus and linear integral equations // Proceedings of the 6th USSR – Japan symposium on probability theory and mathematical statistics (Kiev, Aug. 5–10, 1991). – Singapore: World scientific publ. Co. Pte. Ltd., 1992. – P. 70–78.

Получено 11.04.94