УДК 519.21

В. С. Королюк, акад. (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Ю. В. Боровских, д-р физ.-мат. наук (С.-Петербург. транспорт. ин-т)

НОРМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРМАНЕНТОВ

We obtain an estimate for the convergence rate in the central limit theorem in the case of random permanents.

Одержана оцінка швидкої збіжності в центральній граничній теоремі для випадкових перманентів.

1. Введение и основной результат. Пусть имеется простая выборка ξ_j, $1 \le \le j \le n$, независимых одинаково распределенных случайных величин с $E\xi_j = = \mu$, $E(\xi_j - \mu)^2 = \sigma^2 > 0$. На этой выборке определим матрицу $m \times n$:

$$A_n^m = [\, a_{ij} = \xi_j;\ 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n \,]$$

и введем в рассмотрение случайный перманент этой матрицы [1]

$$\operatorname{Per} A_n^m(\xi) = \sum_{1 \le j_1 \ne \ldots \ne j_m \le n} \prod_{s=1}^{m} \xi_{j_s}.$$

Для $x \in R$ обозначим распределения

$$F_n(x) = P\left(\sqrt{n}\, n^{-[m]} \frac{\operatorname{Per} A_n^m(\xi) - \operatorname{Per} A_n^m(\mu)}{m\mu^{m-1}\sigma} < x \right),$$

где $\mu \ne 0$, и $F(x) = P(\tau < x)$, где τ — стандартная нормальная случайная величина.

В силу центральной предельной теоремы при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0 \tag{1}$$

для всех m и n таких, что $m n^{-1/2} \to 0$.

Рассмотрим вопрос о скорости убывания к нулю выражения (1) при тех же условиях на m и n. В [2] показано, что скорость убывания в (1) имеет порядок $O(m n^{-1/2})$, когда $m = O\left(\sqrt{n}\,(\ln n)^{-1}(\ln\ln n)^{-1}\right)$, $n \to \infty$, а из результатов [3] следует оценка $O(m n^{-1/2})$, если $m = O\left(\sqrt{n}\,(\ln n)^{-1}\right)$, $n \to \infty$.

Следующая теорема содержит основной результат данной работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия*

$$\mu \ne 0, \quad \beta = E|\xi_1 - \mu|^3 < \infty. \tag{2}$$

Тогда при всех $2 \le m \le \sqrt{n}$ *справедлива оценка*

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \le \left(\frac{48\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} + \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\beta}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}} + $$
$$+ \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3}{2} \right) \frac{\sigma}{\mu} + \frac{9}{8} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \frac{m}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma}{\mu} \frac{m}{\sqrt{n}} \right)^2 \exp\left(\left(\frac{\sigma}{\mu} \frac{m}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right). \tag{3}$$

2. Доказательство теоремы. По формуле декомпозиции (1.1.34) из [1, с. 15] запишем

$$n^{-[m]}\operatorname{Per} A_n^m(\xi) = \sum_{c=0}^{m} m^{[c]} n^{-[c]} \mu^{m-c} \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\xi-\mu)}{c!}. \tag{4}$$

Обозначим

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \mu),$$

$$\delta_n = \frac{m-1}{\sigma\mu(n-1)\sqrt{n}} \sum_{1\le i<j<n} (\xi_i-\mu)(\xi_j-\mu),$$

$$R_n = \frac{\sqrt{n}}{m\mu^{m-1}\sigma} \sum_{c=3}^{m} m^{[c]} n^{[-c]} \mu^{m-c} \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\xi-\mu)}{c!}.$$

Заметим, что $\mu^m = \operatorname{Per} A_n^m(\mu)/n^{[m]}$. В этих обозначениях перепишем (4):

$$\sqrt{n}\, n^{-[m]} \frac{\operatorname{Per} A_n^m(\xi) - \operatorname{Per} A_n^m(\mu)}{m\mu^{m-1}\sigma} = S_n + \delta_n + R_n.$$

Значит,

$$F_n(x) = P(S_n + \delta_n + R_n < x), \quad x \in R.$$

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \le \sup_x |P(S_n+\delta_n<x) - F(x)| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\mu} \frac{m}{\sqrt{n}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^2 \exp\left(\left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^2\right). \tag{5}$$

Доказательство. Сначала покажем, что справедливо неравенство

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \le \sup_x |P(S_n+\delta_n<x) - F(x)| + \Delta_1 + \Delta_2, \tag{6}$$

где

$$\Delta_1 \le \sup_x |F(x) - F(x + m\sigma/\mu\sqrt{n})|,$$

$$\Delta_2 \le P(|R_n| > m\sigma/\mu\sqrt{n})\}.$$

Действительно,

$$F_n(x) = P(S_n+\delta_n+R_n<x) =$$

$$= P\{(S_n+\delta_n<x-R_n)\cap(|R_n|\le m\sigma/\mu\sqrt{n})\} +$$

$$+ P\{(S_n+\delta_n<x-R_n)\cap(|R_n|> m\sigma/\mu\sqrt{n})\}.$$

Отсюда вытекает, во-первых,

$$F_n(x) \ge P\{(S_n+\delta_n<x-R_n)\cap(|R_n|\le m\sigma/\mu\sqrt{n})\} \ge$$

$$\le P\{(S_n+\delta_n<x-m\sigma/\mu\sqrt{n})\cap(|R_n|\le m\sigma/\mu\sqrt{n})\} \ge$$

$$\geq P(S_n + \delta_n < x - m\sigma/\mu\sqrt{n}) - P|R_n| > m\sigma/\mu\sqrt{n}),$$

и, во-вторых,

$$F_n(x) \leq P(S_n + \delta_n < x + m\sigma/\mu\sqrt{n}) + P(|R_n| > m\sigma/\mu\sqrt{n}).$$

Из последнего соотношения следует (6).

Оценка Δ_1. Из свойств функции $F(x)$ вытекает соотношение

$$\Delta_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\mu} \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$

Оценка Δ_2. Из неравенства Чебышева вытекает соотношение

$$\Delta_2 \leq \frac{\mu^2}{\sigma^2} \frac{n}{m^2} E R_n^2.$$

Заметим, что

$$E \operatorname{Per} A_n^{c_1}(\xi - \mu) \operatorname{Per} A_n^{c_2}(\xi - \mu) = \begin{cases} 0, & c_1 \neq c_2, \\ c!\, n^{|c|} \sigma^{2c}, & c_1 = c_2 = c. \end{cases}$$

Следовательно, по определению R_n

$$E R_n^2 = \frac{n\mu^2}{m\sigma^2} \sum_{c=3}^{m} \frac{m^{2|c|} n^{-|c|} \sigma^{2c} \mu^{-2c}}{c!}.$$

Здесь $m^{2|c|}/n^{|c|} \leq m^{2c}/n^c$. Тогда

$$E R_n^2 \leq \frac{n\mu^2}{m^2\sigma^2} \sum_{c=3}^{m} \frac{\left(\sigma m/\mu\sqrt{n}\right)^{2c}}{c!} = \left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^4 \sum_{c=0}^{m-3} \frac{\left(\sigma m/\mu\sqrt{n}\right)^{2c}}{(c+3)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^4 \sum_{c=0}^{\infty} \frac{\left(\sigma m/\mu\sqrt{n}\right)^{2c}}{c!} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^4 \exp\left(\left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^2\right).$$

В результате получаем

$$\Delta_2 \leq \frac{1}{6}\left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^2 \exp\left(\left(\frac{\sigma}{\mu}\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^2\right). \tag{8}$$

Из соотношений (6)–(8) следует (5).

Лемма 2. *Для всех* $2 \leq m \leq \sqrt{n}$ *справедливо неравенство*

$$\sup_x |P(S_n + \delta_n < x) - F(x)| \leq \left(\frac{48\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\right) \frac{\beta}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}} +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{\mu} + \frac{3}{2}\frac{\sigma}{\mu} + \frac{9}{8}\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right)\frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при выводе (6), получаем неравенство

$$\sup_x |P(S_n + \delta_n < x) - F(x)| \leq \sup_x |P(S_n + \delta_{nk} < x) - F(x)| + \Delta_1 + \Delta_3, \tag{10}$$

где Δ_1 определено в (6), а

$$\Delta_3 := P(|\delta_n - \delta_{nk}| > m\sigma/\mu\sqrt{n}),$$

$$\delta_{nk} := \frac{m-1}{\sigma\mu(n-1)\sqrt{n}} \sum_{1 \le i < j \le k} (\xi_i - \mu)(\xi_j - \mu),$$

$k = n - m[\sqrt{n}]$, а $[\sqrt{n}]$ обозначает целую часть $\sqrt{n}$.

Оценка $\boldsymbol{\Delta_3}$**.** Из неравенства Чебышева вытекает соотношение

$$\Delta_3 \le \frac{n}{m^2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} E(\delta_n - \delta_{nk})^2.$$

По определению

$$\delta_n - \delta_{nk} = \frac{m-1}{\sigma\mu(n-1)\sqrt{n}} \sum_{j=k+1}^{n} (\xi_j - \mu) \sum_{i=1}^{j-1} (\xi_i - \mu).$$

Используя эту формулу, имеем

$$E(\delta_n - \delta_{nk})^2 = \frac{(m-1)^2}{\sigma^2\mu^2(n-1)^2 n} \sum_{j=k+1}^{n} E(\xi_j - \mu)^2 \, E\left(\sum_{i=1}^{j-1} (\xi_i - \mu)\right)^2 =$$

$$= \frac{(m-1)^2}{\sigma^2\mu^2(n-1)^2 n} \sigma^4 \sum_{j=k+1}^{n} (j-1) = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{(m-1)^2(n-k)(n+k-1)}{(n-1)^2 n^2}.$$

Отсюда при $k = n - m[\sqrt{n}]$ и $\sqrt{n} \ge m \ge 2$

$$E(\delta_n - \delta_{nk})^2 \le \frac{\sigma^2}{\mu^2} \left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^3.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\Delta_3 \le \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

Рассмотрим, далее, первое слагаемое справа в (10). Оценим его, используя неравенство Эссена

$$\sup_x |P(S_n + \delta_{nk} < x) - F(x)| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left| E e^{it(S_n + \delta_{nk})} - e^{-t^2/2} \right| |t|^{-1} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{\pi}} T^{-1}, \tag{12}$$

где $T = \sqrt{n}\,\sigma^3/4\beta$.

Очевидно,

$$\left| E e^{it(S_n + \delta_{nk})} - e^{-t^2/2} \right| \le \left| E e^{it(S_n + \delta_{nk})} - E e^{itS_n} \right| + \left| E e^{itS_n} - e^{-t^2/2} \right|. \tag{13}$$

Пусть $\varphi(t) = E e^{it(\xi_1 - \mu)}$, $t \in R$. Так как $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены, то $E e^{itS_n} = \left(\varphi\left(t/\sigma\sqrt{n}\right)\right)^n$.

В области $|t| \le T$ по известным оценкам имеем

$$|\varphi(t)| \le e^{-(\sigma^2 t^2/3n)} \tag{14}$$

и

$$\left| E e^{itS_n} - e^{-t^2/2} \right| \le 16\sigma^{-3}\beta n^{-1/2} |t|^3 e^{-t^2/3}.$$

Значит,

$$\int_{-T}^{T} \left| Ee^{itS_n} - e^{-t^2/2} \right| |t|^{-1} dt \le 16\sigma^{-3}\beta n^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/3} dt = 24\sqrt{3\pi}\,\sigma^{-3}\beta n^{-1/2}. \tag{15}$$

Далее, используя формулу

$$e^{ix} = 1 + ix - x^2 \int_0^1 (1-u)\, e^{ixu} du, \quad x \in R,$$

получаем представление

$$Ee^{it(S_n+\delta_{nk})} - Ee^{itS_n} = itE\left(\delta_{nk} e^{itS_n}\right) - t^2 \int_0^1 E\left(\delta_{nk}^2 e^{it(S_n+\delta_{nk}u)}\right)(1-u)\, du.$$

По определению

$$E\left(\delta_{nk} e^{itS_n}\right) = \frac{m-1}{\sigma\mu(n-1)\sqrt{n}} \sum_{1\le i_1<i_2\le k} E\left((\xi_{i_1}-\mu)(\xi_{i_2}-\mu) \exp\left\{ \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \mu) \right\} \right).$$

Воспользовавшись независимостью, получим

$$E\left((\xi_{i_1}-\mu)(\xi_{i_2}-\mu) \exp\left\{ \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j-\mu) \right\} \right) =$$

$$= \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^{n-2} \left(E\left((\xi_1-\mu) \exp\left\{ \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} (\xi_1-\mu) \right\} \right) \right)^2.$$

Следовательно,

$$E\left(\delta_{nk} e^{itS_n}\right) = \frac{(m-1)k(k-1)}{2\sigma\mu(n-1)\sqrt{n}} \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right)^{n-2} \left(E\left((\xi_1-\mu)\exp\left\{\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}(\xi_1-\mu)\right\} \right) \right)^2. \tag{16}$$

Здесь согласно (10)

$$\left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right|^{n-2} \le \exp\left\{ -\frac{t^2(n-2)}{3n} \right\}$$

и, кроме того,

$$\left| E\left((\xi_1-\mu) \exp\left\{ \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} (\xi_1-\mu) \right\} \right) \right| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} |t|.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\left| E\left(\delta_{nk} e^{itS_n} \right) \right| \le \frac{(m-1)k(k-1)}{2(n-1)n\sqrt{n}} \frac{\sigma}{\mu} t^2 \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \frac{n-2}{n} \right\}.$$

в соответствии с которым можно записать

$$\int_{-T}^{T} \left| E\left(\delta_{nk} e^{itS_n}\right) \right| dt \le \frac{(m-1)k(k-1)}{2(n-1)n\sqrt{n}} \frac{\sigma}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \frac{n-2}{n} \right\} dt \le \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\mu} \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

Снова используя независимость, имеем

$$E\left(\delta_{nk}^2 e^{it\left(S_n + \delta_{nk} u\right)} \right) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^{n-k} E\left(\delta_{nk}^2 e^{it\delta_{nk} u} \exp\left\{ \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{k} (\xi_j - \mu) \right\} \right).$$

Значит, в области $|t| \le T$

$$\left| E\left(\delta_{nk}^2 e^{it\left(S_n + \delta_{nk} u\right)} \right) \right| \le E\delta_{nk}^2 \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \frac{n-k}{n} \right\}$$

и

$$E\delta_{nk}^2 \le \frac{(m-1)^2 k(k-1)}{2(n-1)^2 n} \frac{\sigma^2}{\mu^2}.$$

Тогда

$$\int_0^1 du\,(1-u) \int_{-T}^{T} dt\,|t| \left| E\left(\delta_{nk}^2 e^{it\left(S_n + \delta_{nk} u\right)} \right) \right| \le$$

$$\le \frac{(m-1)^2 k(k-1)}{4(n-1)^2 n} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt\,|t| \exp\left\{ -\frac{t^2}{3} \frac{n-k}{n} \right\} =$$

$$= \frac{(m-1)^2 k(k-1)}{4(n-1)^2 n} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \frac{3n}{n-k} \le \frac{9}{8} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Объединяя (12), (13) и (15)–(18), получаем

$$\sup_x |P(S_n + \delta_{nk} < x) - F(x)| \le \left(\frac{48\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} + \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \right) \frac{\beta}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma}{\mu} + \frac{9}{8} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right) \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Из (5) и (9) следует (3).

1. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Случайные перманенты. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – 134 с.
2. *Es A. J. van, Helmers R.* Elementary symmetric polynomials of increasing order // Prob. Th. Rel. Fields. – 1988. – **80**, № 1. – P. 21–75.
3. *Friedrich K. O.* A Berry–Esseen bound for functions of independent random variables // Ann. Statist. – 1989. – **17**, № 1. – P. 170–183.

Получено 23.06.94