УДК 517.95

Н. М. Задорожна, асп.,
Б. Й. Пташник, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ*

The time-nonlocal boundary-value problem for Petrovsky's parabolic equations of an arbitrary order with variable coefficients is considered. Conditions for existence and uniqueness of a classical solution of this problem are established. Metric theorems on estimates from below of small denominators, which appear in the construction of a solution, are proved.

Досліджується задача з нелокальними умовами за часовою координатою для параболічних за Петровським рівнянь довільного порядку зі змінними коефіцієнтами. Встановлюються умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Доводяться метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Нелокальні крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними почали досліджуватися в останні десятиріччя. Увага до них [1–9] пов'язана з тим, що вивчення в різних аспектах таких задач для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь стимулюється багатьма причинами: потребами загальної теорії крайових задач, теорією фізики плазми, вологопереносу, періодичних хвилеводів, теплопровідності та ін.

У багатьох випадках для гіперболічних та безтипних диференціальних рівнянь задачі з нелокальними умовами, що узагальнюють умови періодичності, взагалі, умовно-коректні, а питання про їх розв'язність пов'язане з проблемами малих знаменників (див. [4] і бібліографію в ній). Частково ці проблеми виникають і у випадку нелокальних задач для параболічних рівнянь [9].

У даній роботі розглядається задача з нелокальними умовами за часовою координатою для одного класу параболічних за І. Г. Петровським рівнянь зі змінними відносно x коефіцієнтами в паралелепіпеді. Встановлені умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі, а також доведені метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає однозначна розв'язність задачі для майже всіх (в розумінні міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та граничних умов.

1. В області

$$Q = \{(x, t): 0 \le t \le T,\ x \in \Pi\}, \quad \Pi = \{x \in \mathbb{R}^p: 0 \le x_r \le \pi,\ r = 1, \dots, p\},$$

розглядаємо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t}, L_1, \dots, L_p\right)u \equiv \sum_{b\alpha_0 + |\alpha| = bn} A_{\alpha_0;\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0} L_1^{\alpha_1} \dots L_p^{\alpha_p} u(t, x) = 0, \qquad (1)$$

$$M_j\left(\frac{\partial}{\partial t}; L_1, \dots, L_p\right)u \equiv$$

$$\equiv \sum_{\substack{b\alpha_0 + |\alpha| \le bn, \\ \alpha_0 < n}} d^j_{\alpha_0,\alpha} L_1^{\alpha_1} \dots L_p^{\alpha_p}\left(\left.\frac{\partial^{\alpha_0} u}{\partial t^{\alpha_0}}\right|_{t=0} - \nu \left.\frac{\partial^{\alpha_0} u}{\partial t^{\alpha_0}}\right|_{t=T}\right)^{\alpha_0} =$$

$$= \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \qquad (2)$$

$$L_r^m u\big|_{x_r = 0} = L_r^m u\big|_{x_r = \pi} = 0, \quad r = 1, \dots, p; \quad m = 0, 1, \dots, bn - 1, \qquad (3)$$

* Робота частково підтримана Фондом фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки та технологій.

де

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p;$$

$$L_r \equiv -\frac{\partial}{\partial x_r}\left(a_r(x_r)\frac{\partial}{\partial x_r}\right) + q_r(x_r);$$

$a_r(x_r) \in C^{2bn-1}[0,\pi]$, $q_r(x_r) \in C^{2bn-2}[0,\pi]$ — дійснозначні функції; $a_r(x_r) >$ > 0, $q_r(x_r) > 0$, $r = 1, \ldots, p$; $A_{\alpha_0,\alpha} \in \mathbb{R}$, $A_{n,(0)} = 1$; $\nu \neq 0$, $d^j_{\alpha_0,\alpha} \in C$, $b \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що оператор W — рівномірно $2b$-параболічний за І. Г. Петровським в області Q, тобто ξ-корені рівняння

$$\sum_{b\alpha_0+|\alpha|=bn} A_{\alpha_0,\alpha} \prod_{r=1}^{p} \left(a_r(x_r)\right)^{\alpha_r} \eta_r^{2\alpha_r} \xi^{\alpha_0} = 0 \tag{4}$$

для довільних $\eta \in \mathbb{R}^p$ і $x \in \Pi$ задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re}\xi_s(\eta) \leq -\delta|\eta|^{2b}, \quad \delta > 0, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Позначимо через $\{X_{k_r}(x_r)\}$, $\{\lambda_{k_r}\}$, $k_r \in \mathbb{N}$, відповідно нормовану систему власних функцій та множину власних значень задачі

$$L_r X(x_r) = \lambda X(x_r), \quad X(0) = X(\pi) = 0. \tag{6}$$

Відомо, що власні функції задачі (6) утворюють ортонормовану систему, яка є повною у просторі $L_2[0,\pi]$; при цьому для кожного $k_r \in \mathbb{N}$ справджуються оцінки

$$C_0 k_r^2 \leq \lambda_{k_r} \leq C_1 k_r^2, \tag{7}$$

$$\left|X_{k_r}^{(j)}(x_r)\right| \leq p_j \lambda_{k_r}^{j/2}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2bn, \tag{8}$$

де C_0, C_1, p_j, $j = 0, 1, \ldots, 2bn$, — додатні константи.

Очевидно, функції $X_k(x) = X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_p}(x_p)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, які утворюють повну ортонормовану систему у просторі $L_2(\Pi)$, є власними функціями задачі

$$Lu \equiv L_1 \ldots L_p u = \Lambda u, \quad u\big|_{\partial\Pi} = 0,$$

що відповідають власним значенням $\Lambda_k = \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_p}$.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_p=1}^{n} u_k(t) X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_p}(x_p). \tag{9}$$

Якщо ряд (9) рівномірно збіжний разом з усіма похідними за просторовими змінними до порядку $2(bn-1)$ включно, то функція $u(t,x)$ задовольняє умови (3); щоб функція (9) задовольняла рівняння (1) та умови (2), кожна з функцій $u_k(t)$ повинна бути розв'язком задачі

$$\left.\begin{aligned} &W\left(\frac{d}{dt}, \lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}\right) u_k(t) = 0, \\ &M_j\left(\frac{d}{dt}; \lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}\right) u_k(t) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

де $\varphi_{jk} = \int_{\Pi} \varphi_j(x)\, X_k(x)\, dx$.

Припустимо, що для довільного $\lambda_k = \left(\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}\right)$ всі корені $\mu_j(\lambda_k) \equiv \equiv \mu_j$, $j = 1, \ldots, n$, рівняння

$$W\left(\mu, \lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}\right) = 0 \tag{11}$$

прості; тоді розв'язок задачі (10) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{s=1}^{n} c_s\left(\lambda_k\right) \exp\left(\mu_s\left(\lambda_k\right) t\right), \tag{12}$$

де сталі $c_s(\lambda_k) \equiv c_s$ визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{b\alpha_0 + |\alpha| \le bn, \\ \alpha_0 < n}} d^j_{\alpha, \alpha_0} \lambda^{\alpha_1}_{k_1} \ldots \lambda^{\alpha_p}_{k_p} \mu_s^{\alpha_0} \left(1 - \nu \exp\left(\mu_s T\right)\right) c_s =$$

$$= \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, n; \quad \mu_s \equiv \mu_s(\lambda_k). \tag{13}$$

Визначник $\Delta(\lambda_k)$ системи (13) визначається формулами

$$\Delta(\lambda_k) = \prod_{s=1}^{n} \left(1 - \nu \exp\left(\mu_s T\right)\right) D\left(\lambda_k\right) \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\mu_j - \mu_i\right), \tag{14}$$

$$D(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{b(\alpha_0 - 1) + |\alpha| \le bn} d^j_{\alpha_0 - 1, \alpha} \lambda^{\alpha_1}_{k_1} \ldots \lambda^{\alpha_p}_{k_p} \right\|^{n}_{j, \alpha_0 = 1}. \tag{15}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1–3) у просторі* $C^{(n, 2bn)}(Q)$ *необхідно і достатньо, щоб для всіх векторів* λ_k *виконувалися умови*

$$1 - \nu \exp\left(\mu_s\left(\lambda_k\right) T\right) \ne 0, \quad s = 1, \ldots, n; \quad D(\lambda_k) \ne 0. \tag{16}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з ([4], розд. 2).

Зауваження. 1. Якщо $|\nu| \ge 1$, то перша з умов (16) виконується для всіх векторів λ_k; коли ж $|\nu| < 1$, то ця умова виконується для всіх λ_k таких, що

$$\sum_{r=1}^{p} \lambda^b_{k_r} > \left(\delta a_0 T\right)^{-1} \left|\ln|\nu|\right|,$$

де

$$a_0 = \left(\max_{1 \le r \le p} \left\{\max_{0 \le x_r \le \pi} a_r\left(x_r\right)\right\}\right)^{-b}.$$

2. Нехай в рівнянні (1) $q_r(x_r) \ge 0$ і число нуль є власним значенням задачі (6) для кожного r, $r = 1, \ldots, p$. Тоді для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови (16) $\left(\forall\ \lambda_k \ne (0, \ldots, 0)\right)$ та умова

$$\det \left\| (s-1)! \left(d^j_{s-1, 0}(1 - \nu) - \sum_{\alpha_0 = 0}^{s-2} d^j_{\alpha_0, \alpha} \frac{\nu}{\left(s - 1 - \alpha_0\right)!} T^{s-1-\alpha_0} \right) \right\|^{n}_{s, j = 1} \ne 0.$$

2. Нехай розв'язок задачі (1)–(3) єдиний. Тоді для кожного вектора λ_k система рівнянь (13) має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера, а розв'язок задачі (1)–(3) на основі формул (9), (12) зображається формально у вигляді

$$u(t,x) = \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_p=1}^{n} \sum_{j,m,r=1}^{n} (-1)^{n-m} D_{m,r}(\lambda_k)\, \varphi_{m,k}\, S_{n-r}^{j}(\lambda_k) \exp(\mu_j t) \times$$

$$\times \left(\left(1 - \nu \exp(\mu_j T)\right) \prod_{\substack{s=1,\\ s\neq j}}^{n} (\mu_j - \mu_s) D(\lambda_k) \right)^{-1} X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_p}(x_p), \qquad (17)$$

де $D_{m,r}(\lambda_k)$ — визначник, який одержується з $D(\lambda_k)$ шляхом викреслення m-го рядка і r-го стовпця; $S_{n-r}^{j}(\lambda_k)$ — сума всіляких добутків елементів $\mu_s(\lambda_k)$, $s = 1, \ldots, n$, $s \neq j$, взятих у кількості $(n-r)$.

Ряд (17), взагалі, розбіжний, бо величини $|D(\lambda_k)|$ і $|\mu_j(\lambda_k) - \mu_s(\lambda_k)|$, відмінні від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів λ_k. Тому питання існування розв'язку задачі пов'язане з проблемами малих знаменників.

Враховуючи структуру рівнянь (4) та (11), а також оцінки (5), одержуємо такі нерівності:

$$|\mu_j(\lambda_k)| \leq \kappa |\lambda_k|^b, \quad j = 1, \ldots, n; \quad \kappa > 0; \qquad (18)$$

$$\operatorname{Re}\mu_j(\lambda_k) \leq -\delta a_0 \sum_{r=1}^{p} \lambda_{k_r}^b, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (19)$$

де $|\lambda_k| = \lambda_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_p}$.

На основі (19) маємо, що для довільного $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ виконуються оцінки

$$\left|1 - \nu \exp\left(\mu_s(\lambda_k) T\right)\right| \geq \varepsilon_1, \quad s = 1, \ldots, n, \qquad (20)$$

для всіх λ_k, коли $|\nu| \leq 1 - \varepsilon_1$, і для таких λ_k, що

$$\sum_{r=1}^{p} \lambda_{k_r}^b \geq (\delta a_0 T)^{-1} \ln \frac{|\nu|}{1 - \varepsilon_1},$$

коли $|\nu| > 1 - \varepsilon_1$.

Розглянемо шкалу функціональних просторів

$$B_s^{\beta}(s > 0, \beta > 0) = \Bigg\{ \varphi(x) \in L_2(\Pi) \Bigg|$$

$$\varphi(x) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_p=1}^{\infty} \varphi_k X_{k_1}(x_1) \ldots X_{k_p}(x_p);$$

$$\|\varphi\|_{s,\beta} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_p=1}^{\infty} |\varphi_k| \exp\left(s \Lambda_k^{\beta}\right) < \infty \Bigg\}.$$

Зауважимо, що $B_s^{\beta} \subset U(A)$, $s > 0$, $\beta \geq 1$, де $U(A)$ — простір аналітичних векторів оператора A, породженого диференціальним виразом L і умовою $u|_{\partial\Pi} = 0$ [10].

Теорема 2. *Нехай існують додатні константи s_1, s_2, C_2, C_3 такі, що для всіх векторів λ_k, $|k| > K_2$, виконуються нерівності*

$$\prod_{\substack{s=1,\\ s\neq j}}^{n} \left|\mu_j(\lambda_k) - \mu_s(\lambda_k)\right| \geq C_2 |\lambda_k|^{-s_1}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

$$|D(\lambda_k)| \geq C_3 |\lambda_k|^{-s_2}. \tag{22}$$

Якщо $\varphi_j(x) \in B_s^b$, $j = 1, \ldots, n$, $s > \kappa\left(pC_1/C_0^p\right)^b T$, то в просторі $C^{(n,2bn)}(Q)$ існує розв'язок задачі (1)–(3), який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведення. Зауважимо, що для всіх векторів λ_k справджуються оцінки

$$|D_{m,r}(\lambda_k)| \leq C_4 |\lambda_k|^{b(n(n-1)/2+r-1)}, \quad m, r = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Крім того, з (7) випливає нерівність

$$\Lambda_k \geq \frac{C_0^p}{pC_1} |\lambda_k|. \tag{24}$$

На основі формули (17) та оцінок (8), (18)–(24) одержуємо

$$\|u\|_{C^{(n,2bn)}} \leq C_5 \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{|k|\leq K} |\varphi_{jk}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{|k|>K} \exp\left(\kappa\left(pC_1/C_0^p\right)^b \Lambda_k^b T\right) |\lambda_k|^{\eta} |\varphi_{jk}| \right\} \leq$$

$$\leq C_6 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{N}^p} |\varphi_{jk}| \exp\left(s\Lambda_k^b\right) = C_6 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{s,b},$$

де

$$K = \max\{K_1, K_2\}, \quad \eta = b\frac{n^2+7n-4}{2} + s_1 + s_2; \quad s > \kappa\left(\frac{pC_1}{C_0^p}\right)^b T.$$

Теорема доведена.

Зауваження 3. Розв'язок задачі (1)–(3) при виконанні умов теореми 2 належить простору $C^n\left([0,T], B_\varepsilon^b\right)$, $0 < \varepsilon < s - \kappa\left(pC_1/C_0^p\right)^b T$.

3. Проаналізуємо можливість виконання нерівностей (21), (22). Зобразимо визначник (15) у вигляді

$$D(\lambda_k) = \sum_{|r|\leq bn(1+n)/2} D_r \lambda_k^r$$

і нехай $\beta^{(1)} = \left(\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_h^{(1)}\right)$, $\beta^{(2)} = \left(\beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_h^{(2)}\right)$ — вектори, складені відповідно з дійсних і уявних частин коефіцієнтів D_r, де h — кількість цілочислових розв'язків нерівності $r_1 + \ldots + r_p \leq bn(1+n)/2$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^h$*) векторів* $\beta^{(1)}$ *та всіх* $\beta^{(2)}$ *(або для всіх* $\beta^{(1)}$ та майже всіх $\beta^{(2)}$*) нерівність* (22) *виконується при* $s_2 > p/2$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* λ_k.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.4 з ([4], розд. 2) з урахуванням оцінок (7).

Позначимо $y = (y_1, \ldots, y_\gamma)$ вектор, складений з коефіцієнтів $A_{\alpha_0, \alpha}$ рівняння (1), де γ — число всіх коефіцієнтів.

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\gamma$*) векторів* y *нерівності* (21) *виконуються при* $s_1 > (n-1)(p/4-b)$ *для всіх (крім скінченного числа) векторів* λ_k.

Доведення. Скористаємось методом доведення теореми 6 з [11]. Нехай $P(W)$ — дискримінант полінома $W(\mu, \lambda_k)$ з (11). Зобразимо цей поліном у вигляді

$$W(\mu : \lambda_k) \equiv \sum_{j=0}^{n} \mu^j P_j(\lambda_k : y),$$

де

$$P_j = \sum_{|\alpha| = b(n-j)} A_{j:\alpha} \lambda_{k_1}^{\alpha_1} \ldots \lambda_{k_p}^{\alpha_p}.$$

Позначимо через Y множину тих векторів y, які належать деякому паралелепіпеду $\Pi_\gamma = [\xi_0, \beta_0] \times \Pi_{\gamma-1} \subset \mathbb{R}^\gamma$, для яких нерівність

$$|P(W)| < |\lambda_k|^{-\sigma} \tag{25}$$

виконується для безмежного числа векторів λ_k, а через Y_k позначимо множину тих векторів y, для яких нерівність (25) справедлива при фіксованому λ_k. Нехай

$$\lambda_{k_1} = \max_{1 \leq s \leq p} \lambda_{k_s}, \quad \xi = A_{0, bn, 0, \ldots, 0} \neq 0,$$

що не обмежує загальності. Тоді, враховуючи зображення дискримінанта $P(W)$ через коефіцієнти $P_j(\lambda_k, y)$ полінома $W(\mu, \lambda_k)$ [4], можемо записати, що $P(W) = \pm n^n P_0^{n-1} + F$, де F містить степені P_0 нижчі, ніж $(n-1)$. Оскільки P_0 лінійно залежить від ξ, то

$$\left| \frac{\partial^{n-1} P(W)}{\partial \xi^{n-1}} \right| = n^n (n-1)!\, \lambda_{k_1}^{bn(n-1)}.$$

На основі леми 2 з [11] одержуємо, що міра множини Y_k^1 тих значень $\xi \in [\xi_0, \beta_0]$, які задовольняють (25) (при фіксованих інших коефіцієнтах рівняння (1) і векторі λ_k), має таку оцінку:

$$|Y_k^1| \leq C_7 |\lambda_k|^{(-\sigma - bn(n-1))/(n-1)}. \tag{26}$$

Інтегруючи (26) за паралелепіпедом $\Pi_{\gamma-1}$, одержуємо нерівність

$$|Y_k| \leq C_8 |\lambda_k|^{(-\sigma-bn(n-1))/(n-1)}. \tag{27}$$

Враховуючи оцінки (7) та (27), одержуємо, що ряд $\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_p=1}^{\infty} |Y_k|$ збігається при $\sigma > (n-1)(p/2-bn)$. Тоді на основі леми 1 [11] маємо, що міра множини Y дорівнює нулеві. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\gamma}$) векторів y при $\sigma > (n-1)(p/2-bn)$ виконується нерівність, протилежна до нерівності (25). Використовуючи зображення дискримінанта $P(W)$ через корені полінома $W(\mu, \lambda_k)$, маємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\gamma}$) векторів y нерівність

$$\prod_{1 \leq s < m \leq n} \left|\mu_m(\lambda_k) - \mu_s(\lambda_k)\right|^2 \geq |\lambda_k|^{-(n-1)(p/2-bn)-\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2 > 0, \tag{28}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів λ_k.

Із нерівності (28) та оцінок (18) випливає твердження теореми.

***Зауваження* 4.** Результати роботи перенесені на випадок неоднорідного рівняння вигляду (1) з правою частиною $f(t,x)$, де $f(t,x) \in C\left([0,T], B_s^b\right)$, $s > \kappa\left(pC_1 / C_0^p\right)^b T$, та на випадок системи параболічних рівнянь вигляду (1).

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
2. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1926–1936.
3. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292–296.
4. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
5. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.
6. *Муравей Л. А., Филиновский А. В.* Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 10. – С. 1479–1512.
7. *Шханукова М. М.* О некоторых нелокальных задачах для параболического уравнения с переменными коэффициентами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 145–147.
8. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 6. – С. 122–129.
9. *Задорожна Н.* Крайова задача для параболічних рівнянь із загальними нелокальними умовами // Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь: Тези допов. всеукр. наук. конф. (Дрогобич, 25–27 січня, 1994 р.). – Київ, 1994. – С. 55.
10. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
11. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

Одержано 24.11.94