УДК 519.21

Д. В. Гусак, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПЕРЕТИН РІВНЯ ПРОЦЕСАМИ, ЩО ЗАДАЮТЬСЯ СУМАМИ ВИПАДКОВОГО ЧИСЛА ДОДАНКІВ

We study the joint distribution of the boundary functionals connected with the crossing of a positive (negative) level by the process, which consists of the homogeneous Poisson process and the process defined by sums of a random number of continuously distributed terms.

Вивчається сумісний розподіл граничних функціоналів, пов'язаних з перетином додатного та від'ємного рівня процесом, що складається з однорідного процесу Пуассона та процесу, який задається сумою випадкового числа неперервно розподілених доданків.

Для процесів з незалежними приростами та процесів на скінченному однорідному ланцюзі Маркова різні граничні функціонали вивчалися в роботах, наведених в [1, 2]. В [3, 4] досліджувались розподіли цих функціоналів для процесу, що задається сумою випадкового числа доданків, і подібного процесу з лінійною компонентою. Для випадку, коли лінійна компонента замінюється монотонним процесом Пуассона, в [5] розглядався розподіл екстремумів.

Граничні розподіли моменту і величини першого перестрибу через нескінченно віддалений рівень для півмарковського випадкового блукання, одна компонента якого є процес Пуассона з додатними стрибками, а друга — неоднорідний процес з від'ємними стрибками, досліджувалися в [6–9]. У цих роботах для вивчення вказаних розподілів використовується допоміжний ланцюг Маркова, побудований на суперпозиції двох процесів відновлення.

На відміну від [6–8] у даній роботі неоднорідний процес, що задається сумою випадкового числа доданків, має стрибки довільного знаку. Для процесу, що складається з неоднорідного процесу й однорідного монотонного процесу Пуассона, вивчається розподіл моменту та величини першого перестрибу та стрибка, що накриває даний рівень, без застосування допоміжного ланцюга Маркова. Замість цього для досліджуваних функціоналів використовуються (як і в [5]) дещо ускладнені стохастичні зображення, на основі яких виводяться інтегральні рівняння. Як і в [1, 2, 5], відповідно адаптувавши методику розв'язування інтегральних рівнянь на півосі з [9] до імовірнісних граничних задач, на основі виведених інтегральних рівнянь одержимо співвідношення граничних функціоналів.

Нехай $\xi(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t)$ $(\xi(0)=0, t\geq 0)$, де $\xi_1(t)$ — пуассонівський процес з додатними стрибками:

$$\{\xi'_k\}_{k>0}: F_1(x) = P\{\xi'_k < x\},\ \varphi_1(\alpha) = Ee^{i\alpha\xi'_k},\ Ee^{i\alpha\xi_1(t)} = e^{t\psi(\alpha)},\ \ \operatorname{Im}\alpha \geq 0.$$

Кумулянта $\psi(\alpha)$ задається за допомогою $\varphi_1(\alpha)$ та параметра c_1 показникового розподілу інтервалів η'_k між стрибками: $\psi_1(\alpha) = c_1(\varphi_1(\alpha)-1)$.

Процес $\xi_2(t)$ не залежить від $\xi_1(t)$ і задається за допомогою двох незалежних між собою послідовностей

$$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}: F(x) = P\{\xi_k < x\},\ (-\infty < x < \infty),\ \varphi(\alpha) = Ee^{i\alpha\xi_k},\quad \operatorname{Im}\alpha \geq 0,$$

$$\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}: G(x) = P\{\eta_k < t\},\quad t\geq 0,\qquad g(s) = Ee^{-s\eta_k},\quad s>0,$$

відповідно незалежних у кожній послідовності однаково і неперервно розподілених випадкових величин. Позначимо

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k,\quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\eta_k,\quad S'_n = \sum_{k=1}^{n}\xi'_k,\quad \sigma'_n = \sum_{k=1}^{n}\eta'_k.$$

$$\nu(t) = \max\{n: \sigma_n < t\}, \quad \nu_1(t) = \max\{n: \sigma'_n < t\},$$

$$\xi_1(t) = \sum_{k=0}^{\nu_1(t)} \xi'_k, \quad \xi_2(t) = \sum_{k=0}^{\nu(t)} \xi_k, \quad S_0 = \sigma_0 = S'_0 = \sigma'_0 = 0.$$

Процес $\xi(t)$ задовольняє стохастичне співвідношення

$$\xi(t) \doteq \begin{cases} \xi_1(t), & \eta_1 > t, \\ \xi_1(\eta_1) + \xi_1 + \xi(t-\eta_1), & \eta_1 \le t, \end{cases}$$

($\xi \doteq \zeta$ означає, що ξ і ζ однаково розподілені), з якого для характеристичної функції $\Phi_t(\alpha) = E\exp\{i\alpha\xi(t)\}$ випливає інтегральне рівняння

$$\Phi_t(\alpha) = e^{t\psi(\alpha)}(1-G(t)) + \varphi(\alpha)\int_0^t e^{u\psi(\alpha)}\Phi_{t-u}(\alpha)\,dt. \tag{1}$$

Після інтегрального перетворення по $t \ge 0$ на основі (1) встановлюється, що

$$\Phi(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi(\theta_s)} \overset{\text{def}}{=} s\int_0^\infty e^{-st}\Phi_t(\alpha)\,dt = Ee^{i\alpha\xi_1(\theta_s)}\,\frac{1-g(s-\psi(\alpha))}{1-\varphi(\alpha)g(s-\psi(\alpha))}$$

(θ_s — показниково розподілена випадкова величина, незалежна від $\xi_{1,2}(t)$, з параметром $s>0$).

Відповідно з [5] позначимо

$$\xi^*_k = \xi_k + \xi_1(\eta_k), \quad \xi_1(\eta_k) \doteq \xi_1(\sigma_k) - \xi_1(\sigma_{k-1}), \quad k>0,$$

$$S^*_n = \sum_{k=0}^{n} \xi^*_k, \quad \xi_*(t) = S^*_{\nu(t)},$$

і основні результати подамо в термінах компонент факторизації допоміжного процесу $\xi_*(t)$ з характеристичною функцією

$$\Phi_*(s,\alpha) = s\int_0^\infty e^{-st}Ee^{i\alpha\xi_*(t)} = \frac{1-g(s)}{1-\varphi(\alpha)g(s-\psi(\alpha))}.$$

Факторизаційні компоненти визначаються розподілами основних функціоналів процесу $\xi_*(t)$:

$$\xi^+_*(t) = \sup_{0\le u\le t}\xi_*(u), \quad \xi^-_*(t) = \inf_{0\le u\le t}\xi_*(u).$$

Позначимо через $\mathbf{\Phi}_c$ клас функцій, що описуються перетвореннями Фур'є функцій

$$V(x)\in L_1(-\infty,\infty), \quad v(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\{i\alpha x\}V(x)\,dx;$$

$$\mathbf{\Phi}_c = \{c + v(\alpha)\} \quad (\operatorname{Im}\alpha = 0, \ c \ne 0)$$

і відповідно позначимо підкласи $(\pm\operatorname{Im}\alpha \ge 0)$

$$\mathbf{\Phi}^{\pm}_c = \{c + v_\pm(\alpha)\}, \quad v_\pm(\alpha) = \pm\int_0^{\pm\infty} e^{i\alpha x}V(x)\,dx.$$

Зауважимо, що перетворення Фур'є ядра інтегрального рівняння (1) визначає функцію

$$k(s,\alpha) = 1-\varphi(\alpha)g(s-\psi(\alpha)) \in \mathbf{\Phi}_c \quad (\operatorname{Im}\alpha = 0)$$

або нормовану функцію

$$k_*(s,\alpha) = \frac{k(s,\alpha)}{k(s,0)} = \frac{k(s,\alpha)}{1-g(s)} \in \mathbf{\Phi}_c, \quad k_*(s,0) = 1,$$

яка зустрічається при вивченні розподілів всіх граничних функціоналів для $\xi(t)$. Справедлива [5] така лема.

Лема 1. *Для* $\Phi_*(s,\alpha) = E\exp\{i\alpha\xi_*(\theta_s)\}$ *має місце розклад*

$$\Phi_*(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)} \quad (\operatorname{Im}\alpha = 0). \tag{2}$$

$$Ee^{i\alpha\xi_*^\pm(\theta_s)} = [k_*^\pm(s,\alpha)]^{-1} \in \mathbf{\Phi}_c^\pm,$$

$$k_*^+(s,\alpha) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-sy}\int_0^\infty (1-e^{i\alpha x})P\{S_n^* \in dx, \sigma_n \in dy\}\right\},$$

$$k_*^-(s,\alpha) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-sy}\int_{-\infty}^0 (1-e^{i\alpha x})P\{S_n^* \in dx, \sigma_n \in dy\}\right\}.$$

У наших твердженнях ми користуватимемося позначеннями операцій проектування для функцій

$$q(\alpha) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}Q(x)\,dx \in \mathbf{\Phi}_c \quad (\operatorname{Im}\alpha = 0),$$

$$q_\pm^0(\alpha) = [q(\alpha)]_\pm^0 = c \pm \int_0^{\pm\infty} e^{i\alpha x}Q(x)\,dx,$$

$$q_\pm(\alpha) = [q(\alpha)]_\pm = \pm\int_0^{\pm\infty} e^{i\alpha x}Q(x)\,dx.$$

Лема 2. *Якщо* $a > 0$, *то*

$$\begin{aligned} &[q(\alpha)(a-i\alpha)^{-1}]_+^0 = (a-i\alpha)^{-1}(q_-(-ia)+q_+^0(\alpha)), \\ &[q(\alpha)(a-i\alpha)^{-1}]_- = (a-i\alpha)^{-1}(q_-(\alpha)-q_-(-ia)). \end{aligned} \tag{3}$$

Доведення базується на безпосередньому обчисленні односторонніх перетворень Фур'є для згортки показникової функції e^{-ax} $(x>0)$ з $Q(x)$:

$$K(x) = \int_{-\infty}^{x} Q(x)e^{-a(x-z)}\,dz.$$

Зокрема,

$$\int_0^\infty e^{i\alpha x}K(x)\,dx = \int_0^\infty e^{(i\alpha-a)x}\int_{-\infty}^0 Q(z)\,e^{az}\,dz +$$

$$+\int_0^\infty Q(z)e^{az}dz\int_z^\infty e^{(i\alpha-a)x}dx = (a-i\alpha)^{-1}(q_-(-ia)+q_+(\alpha)).$$

Звідси випливає перше співвідношення в (3). Друге співвідношення в (3) доводиться аналогічно.

Введемо позначення для досліджуваних функціоналів

$$\tau^+(x) = \inf\{t:\xi(t)>x\},\quad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x))-x \quad (x>0),$$

$$\tau^-(x) = \inf\{t:\xi(t)<x\},\quad \gamma^-(x) = \xi(\tau^-(x))-x \quad (x<0),$$

$$\xi^+(t) = \sup_{0\le u\le t}\xi(u),\quad \xi^-(t) = \inf_{0\le u\le t}\xi(u),$$

$$\gamma_+(x) = x-\xi(\tau^+(x)-0),\quad \bar{\gamma}(x) = \gamma^+(x)+\gamma_+(x) \quad (x>0),$$

$$\gamma_-(x) = x-\xi(\tau^-(x)-0),\quad \underline{\gamma}(x) = \gamma^-(x)+\gamma_-(x) \quad (x<0).$$

В стохастичних співвідношеннях для цих функціоналів ми використовуємо відповідні функціонали процесу $\xi_1(t)$ $(z>0)$

$$\tau'(z) \doteq \begin{cases}\eta_1, & \xi_1' > z,\\ \eta_1+\tau'(z-\xi_1'), & \xi_1'\le z,\end{cases} \quad \gamma'(z) \doteq \begin{cases}\xi'-z, & \xi_1'>z,\\ \gamma'(z-\xi_1'), & \xi_1'\le z.\end{cases} \tag{4}$$

Лема 3. *Для твірної функції пари* $\{\tau'(z),\gamma'(z)\}$

$$A(u,z,x) = E[\exp\{-u\gamma'(z)\},\tau'(z)<x]$$

інтегральне перетворення

$$a(u,\alpha,x) = \int_0^\infty e^{i\alpha z}A(u,z,x)\,dz$$

визначається співвідношенням

$$a(u,\alpha,x) = \frac{\psi(\alpha)-\psi(iu)}{\psi(\alpha)}\,\frac{e^{\psi(\alpha)x}}{u+i\alpha}. \tag{5}$$

Доведення. На основі (4) виводиться рівняння

$$A(u,z,x) = (1-e^{-c_1x})E[\exp\{u(z-\xi_1')\},\ \xi_1'>z]+$$

$$+\int_0^z\int_0^x c_1e^{-c_1v}\,dv\,A(u,z-y,x-v)\,dF_1(y) \quad (x,z>0),$$

яке після одностороннього перетворення Фур'є по $z>0$ набуває вигляду

$$a(u,\alpha,x) = (1-e^{-c_1x})\frac{\varphi_1(\alpha)-\varphi_1(iu)}{u+i\alpha}+c_1\int_0^x e^{-c_1v}\varphi_1(\alpha)a(u,\alpha,x-v)\,dv.$$

Застосувавши інтегральне перетворення по $x>0$, знаходимо

$$\tilde{a}(u,\alpha,p) = \int_0^\infty e^{-px}a(u,\alpha,x)\,dx = \frac{c_1p^{-1}}{p-\psi(\alpha)}\,\frac{\varphi_1(\alpha)-\varphi_1(iu)}{u+i\alpha}.$$

Звідси після обернення по p випливає формула (5).

Тепер розглянемо сумісну твірну функцію

$$v_z^+(s,u) = E[\exp\{-s\tau^+(z) - u\gamma^+(z)\}, \tau^+(z) < \infty] = E[e^{-u\gamma^+(z)}, \xi^+(\theta_s) > z].$$

При умові

$$E\xi^+(\theta_s) < \infty \tag{6}$$

для неї існує інтегральне перетворення по $z > 0$

$$v^+(s,\alpha,u) = \int_0^\infty e^{i\alpha z} v_z^+(s,u)\,dz \quad (\operatorname{Im}\alpha \ge 0).$$

Позначимо

$$W_1(x,u) = \int_x^\infty e^{u(x-z)} dF_1(z), \quad W_+(x,u) = \int_x^\infty e^{u(x-z)} dF(z);$$

$$w_1(\alpha,u) = \frac{\varphi_1(\alpha) - \varphi_1(iu)}{u + i\alpha}, \quad w_+(\alpha,u) = \frac{\varphi_+(\alpha) - \varphi_+(iu)}{u + i\alpha}.$$

Теорема 1. *Твірна функція* $v^+(s,\alpha,u)$ *при умові* (6) *визначається співвідношенням*

$$v^+(s,\alpha,u) = \frac{g(s-\psi(\alpha))}{1-g(s)} E e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)} \times$$

$$\times \left[E e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)} \left(\frac{g^{-1}(s-\psi(\alpha)) - 1}{s - \psi(\alpha)} c_1 w_1(\alpha,u) + w_+(\alpha,u) \right) \right]_+^0. \tag{7}$$

Доведення. Надалі для спрощення покладаємо $\xi_1 = \xi$, $\xi_1' = \xi'$, $\eta_1 = \eta$, $\eta_1' = \eta'$. Для $\{\tau^+(z), \gamma^+(z)\}$ запишемо стохастичні зображення, які містять в собі відповідні функціонали $\xi_1(t)$: $\tau'(z), \gamma'(z)$:

$$\tau^+(z) = \begin{cases} \tau'(z), & \xi_1(\eta) > z, \\ \eta, & \xi_* > z,\ \xi_1(\eta) \le z, \\ \eta + \tau^+(z - \xi_*), & \xi_* \le z,\ \xi_1(\eta) \le z, \end{cases}$$
$$\gamma^+(z) = \begin{cases} \gamma'(z), & \xi_1(\eta) > z, \\ \xi_* - z, & \xi_* > z,\ \xi_1(\eta) \le z, \\ \gamma^+(z - \xi_*), & \xi_* \le z,\ \xi_1(\eta) \le z. \end{cases} \tag{8}$$

На основі (8) встановлюється, що $v_z^+(s,u) = I_1 + I_2 + I_3$ $(I_k = I_k(s,z,u))$, де

$$I_1 = E[e^{-u\gamma'(z)}, \xi_1(\theta_s) > z, \xi_1(\eta) > z] =$$

$$= E[e^{-u\gamma'(z)}, \theta_s < \eta, \xi_1(\theta_s) > z] + E[e^{-u\gamma'(z)}, \theta_s > \eta, \xi_1(\eta) > z] =$$

$$= s\int_0^\infty dG(y) \int_0^y e^{-sy} A(u,z,x)\,dx + \int_0^\infty dG(y) e^{-sy} A(u,z,x).$$

З леми 3 випливає

$$\bar{I}_1 = \int_0^\infty e^{i\alpha z} I_1(s,z,u)\,dz = \frac{\psi(\alpha)-\psi(iu)}{u+i\alpha}\,\frac{1-g(s-\psi(\alpha))}{s-\psi(\alpha)}.$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо $I_{2,3}$ та їх перетворення $\bar{I}_{2,3}$:

$$I_2 = E[e^{-s\eta-u(\xi_*-z)},\ \xi_*>z,\ \xi_1(\eta)<z] =$$

$$= \int_0^\infty dG(y)\,e^{-sy}\int_0^z dP\{\xi_1(y)<x\}E[e^{-u(\xi+x-z)},\xi>z-x],$$

$$\bar{I}_2 = g(s-\psi(\alpha))(\varphi_+(\alpha)-\varphi_+(iu))(u+i\alpha)^{-1};$$

$$I_3 = E[e^{-s(\eta+\tau^+(z-\xi_*))-u\gamma^+(z-\xi_*)},\ \xi_*<z,\ \xi_1(\eta)<z];$$

$$\bar{I}_3 = \int_0^\infty dG(y)\,Ee^{i\alpha\xi_1(y)}\int_0^\infty e^{i\alpha z-sy}E[e^{-s\tau^+(z-\xi_*)-u\gamma^+(z-\xi_*)},\ \xi_*<z]\,dz.$$

Оскільки

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z}\int_{-\infty}^z v^+_{z-x}(s,u)\,dF(x)\,dz = [\varphi(\alpha)v^+(s,\alpha,u)]_+^0,$$

то з $\bar{I}_3$ після відповідних перетворень маємо зображення

$$\bar{I}_3 = g(s-\psi(\alpha))[\varphi(\alpha)v^+(s,\alpha,u)]_+^0,$$

а рівняння для $v^+(s,\alpha,u)$ запишеться таким чином:

$$v^+(s,\alpha,u) = c_1 w_1(\alpha,u)(s-\psi(\alpha))^{-1}(1-g(s-\psi(\alpha))+$$

$$+g(s-\psi(\alpha))w_+(\alpha,u)+g(s-\psi(\alpha))[\varphi(\alpha)v^+(s,\alpha,u)]_+^0.$$

Його можна подати у вигляді

$$v^+(s,\alpha,u)k(s,\alpha) = c_1 w_1(\alpha,u)(s-\psi(\alpha))^{-1}(1-g(s-\psi(\alpha))+$$

$$+g(s-\psi(\alpha))w_+(\alpha,u)-g(s-\psi(\alpha))[\psi(\alpha)v^+(s,\alpha,u)]_-. \tag{9}$$

Зауважимо, що при $\operatorname{Im}\alpha\geq 0$, $s>0$ $g(s-\psi(\alpha))\neq 0$ і

$$g(s-\psi(\alpha)) = E\exp\{-s\eta+i\alpha\xi_1(\eta)\} =$$

$$= g(s+c_1)+\int_{+0}^\infty e^{i\alpha x}E[e^{-s\eta},\xi_1(\eta)\in dx]\in \mathbf{\Phi}_c^+ \quad (c\neq 0).$$

Згідно з лемою Вінера – Леві [9] $g^{-1}(s-\psi(\alpha))\in \mathbf{\Phi}_c^+$. З цих міркувань випливає, що рівняння (9) можна переписати у вигляді

$$\frac{v^+(s,\alpha,u)k_*(s,\alpha)}{g(s-\psi(\alpha))(1-g(s))} = w_1(\alpha,u)(s-\psi(\alpha))^{-1}(g^{-1}(s-\psi(\alpha))-1)+$$

$$+w_+(\alpha,u)-[\varphi(\alpha)v^+(s,\alpha,u)]_-. \tag{10}$$

де обидві частини належать $\mathbf{\Phi}_c$ з ядром $k_*(s,\alpha)$ зліва. На основі факторизаційного розкладу (2) з (10) випливає співвідношення

$$\frac{v^+(s,\alpha,u)(1-g(s))}{g(s-\psi(\alpha))Ee^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}} = Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}\left\{c_1 w_1(\alpha,u)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{g^{-1}(s-\psi(\alpha))-1}{s-\psi(\alpha)} + w_+(\alpha,u) - [\psi(\alpha)v^+(s,\alpha,u)]_-\right\}.$$

Застосувавши до обох частин останнього проекційний оператор $[\ ]_+^0$, одержимо формулу (7).

Якщо $c_1 = \psi(\alpha) \equiv 0$, то (7) спрощується і набуває вигляду

$$v^+(s,\alpha,u) = g(s)(1-g(s))^{-1}Ee^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}[w_+(\alpha,u)Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}]_+^0, \tag{11}$$

що узгоджується з одержаним в [3] результатом. Поклавши в (11)

$$\varphi_+(\alpha) = ap_+(a-i\alpha)^{-1} \tag{11'}$$

(це означає, що додатна частина стрибків процесу $\xi_2(t)$ показниково розподілена з параметром $a>0$), одержимо

$$w_+(\alpha,u) = ap_+(a-i\alpha)^{-1}(u+a)^{-1} \quad (p_+ = P\{\xi>0\})$$

і застосувавши лему 2, знаходимо проекцію по α

$$[ap_+(a-i\alpha)^{-1}(u+a)^{-1}Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}]_+^0 = ap_+[(u+a)(a-i\alpha)]^{-1}Ee^{a\xi_*^-(\theta_s)},$$

а замість (11) одержимо співвідношення

$$v^+(s,\alpha,u) = g(s)(1-g(s))^{-1}Ee^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}Ee^{a\xi_*^-(\theta_s)}ap_+[(u+a)(a-i\alpha)]^{-1},$$

в якому легко здійснити обернення по u і по α

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z}E[e^{-s\tau^+(z)},\gamma^+(z)>x]\,dz = \frac{g(s)}{1-g(s)}\frac{p_+e^{-ax}}{a-i\alpha}Ee^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}Ee^{a\xi_*^-(\theta_s)}. \tag{12}$$

Враховуючи, що

$$v^+(s,\alpha,0) = g(s)p_+[(1-g(s))(a-i\alpha)]^{-1}Ee^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}Ee^{a\xi_*^-(\theta_s)},$$

з (12) випливає незалежність $\tau^+(z)$ і $\gamma^+(z)$, а оберненню

$$v_z^+(s,0) = E\exp\{-s\tau^+(z)\}$$

відповідає згортка розподілу $\xi_*^+(\theta_s)$ з експонентою e^{-ax} $(x>0)$

$$\begin{gathered} E[e^{-s\tau^+(z)},\gamma^+(z)>z] = Ee^{-s\tau^+(z)}e^{-ax} \quad (x,z>0), \\ Ee^{-s\tau^+(z)} = \frac{g(s)p_+}{1-g(s)}Ee^{a\xi_*^-(\theta_s)}\int_0^z e^{-a(z-y)}dP\{\xi_*^+(\theta_s)<y\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Оскільки для $c_1=0$ $\xi(t)=\xi_2(t)=\xi_*(t)$, $\xi^\pm(t)=\xi_*^\pm(t)$, то з останнього співвідношення в (13) випливає, що при $\varphi_+(\alpha)=ap_+(a-i\alpha)^{-1}$

$$Ee^{-u\xi^+(\theta_s)} = \frac{(1-g(s))(a+u)}{(1-g(s))(a+u) + g(s)p_+uEe^{u\xi^-(\theta_s)}} = \frac{p_0^+(s)(u+a)}{u+p_0^+(s)a},$$
$$p_0^+(s) = P\{\xi^+(\theta_s)=0\} = \lim_{u\to\infty} Ee^{-u\xi^+(\theta_s)} = \frac{1-g(s)}{1-g(s) + p_+g(s)Ee^{a\xi^-(\theta_s)}}. \tag{14}$$

Зауважимо, що в [10, с. 42] для розподілу $\{\tau^+(z), \gamma^+(z)\}$ одержано співвідношення у вигляді ряду кратних інтегралів і порівняти його з (7) неможливо. Однак формула (7) узгоджується зі співвідношенням (1) в [7] після відповідних перепозначень з урахуванням умови, що процес $\xi_2(t)$ має стрибки одного знаку. При цій умові (7) набуває вигляду

$$v^+(s,\alpha,u) = \frac{g(s-\psi(\alpha))}{1-g(s)} Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)} \times$$
$$\times \left[Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)} \frac{g^{-1}(s-\psi(\alpha)) - 1}{s-\psi(\alpha)} c_1 w_1(\alpha, u) \right]_+^0. \tag{15}$$

Якщо крім того, що $p_+=0$, покласти $\varphi_1(\alpha) = b(b-i\alpha)^{-1}$, то $w_1(\alpha,u) = b[(b+u)(b-i\alpha)]^{-1}$, і проекція в (15) згідно з лемою 2 спрощується:

$$\left[Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)} \frac{c_1 b}{s-\psi(\alpha)} \frac{g^{-1}(s-\psi(\alpha)) - 1}{(b+u)(b-i\alpha)} \right]_+^0 =$$
$$= c_1 b[(b+u)(b-i\alpha)]^{-1}[q_-(s,-ib) + q_+^0(s,\alpha)],$$

де

$$q(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}(s-\psi(\alpha))^{-1}(g^{-1}(s-\psi(\alpha))-1).$$

Тепер (15) перепишеться таким чином:

$$v^+(s,\alpha,u) = c_1 bg(s-\psi(\alpha))[(b+u)(b-i\alpha)(1-g(s))]^{-1} \times$$
$$\times Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}[q_-(s,-ib) + q_+^0(s,\alpha)]. \tag{16}$$

Співвідношення (16) легко обернути по u і, враховуючи, що

$$v^+(s,\alpha,0) = \int_0^\infty e^{i\alpha z} P\{\xi^+(\theta_s) > z\}\, dz = \frac{c_1 g(s-\psi(\alpha))}{(1-g(s))(b-i\alpha)} \times$$
$$\times Ee^{i\alpha\xi_*(\theta_s)}[q_-(s,-ib) + q_+^0(s,\alpha)],$$

одержуємо

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z} E[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z) > x]\, dz = e^{-bx} \int_0^\infty e^{i\alpha z} Ee^{-s\tau^+(z)} dz. \tag{17}$$

З зображення для $v^+(s,\alpha,0)$ при $\alpha\to 0$ випливає

$$E\xi^+(\theta_s) = c_1 g(s)(1-g(s))^{-1}(q_-(s,-ib) + q_+^0(s,\alpha)).$$

Виключаючи з (16) $q_-(s,-ib)$, знаходимо ще одне зображення

$$v^{+}(s,\alpha,u) = \frac{b}{b+u}\frac{g(s-\psi(\alpha))}{b-i\alpha}Ee^{i\alpha\xi_{*}^{-}(\theta_s)}\times$$

$$\times\left[bg^{-1}(s)E\xi^{+}(\theta_s)+c_1\left(1-g(s)\right)^{-1}\left(q_{+}^{0}(s,\alpha)-q_{+}^{0}(s,0)\right)\right]. \tag{18}$$

Порівнюючи результати, що випливають з (13) та (17), приходимо до такого висновку. Показниковий розподіл додатної частини стрибків процесу $\xi_2(t)$ так само, як і стрибків пуассонівського процесу $\xi_1(t)$, забезпечує незалежність $\tau^{+}(z)$ та $\gamma^{+}(z)$ і перестриб $\gamma^{+}(z)$ має показниковий розподіл у випадку, коли або $c_1=0$ або $p_{+}=0$.

Щодо випадку, коли $c_1p_{+}\neq 0$, то з теореми 1 на основі проведених вище міркувань випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо в умовах теореми* 1 $c_1p_{+}\neq 0$ *і для стрибків процесу* $\xi_{1,2}(t)$ *виконується умова*

$$\varphi_1(\alpha) = b(b-i\alpha)^{-1},\quad \varphi_{+}(\alpha) = p_{+}a(a-i\alpha)^{-1},\quad p_{+} = P\{\xi>0\}, \tag{19}$$

то

$$v^{+}(s,\alpha,u) = \frac{g(s-\psi(\alpha))}{1-g(s)}Ee^{i\alpha\xi_{*}^{-}(\theta_s)}\left\{\frac{bc_1}{(b+u)(b-i\alpha)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[q_{-}(s,-ib)+q_{+}^{0}(s,\alpha)\right]+Ee^{a\xi_{*}^{-}(\theta_s)}\frac{ap_{+}}{(u+a)(a-i\alpha)}\right\}, \tag{20}$$

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z}E[e^{-s\tau^{+}(z)},\gamma^{+}(z)>x]\,dz = \frac{g(s-\psi(\alpha))}{1-g(s)}Ee^{i\alpha\xi_{*}^{-}(\theta_s)}\times$$

$$\times\left\{\frac{c_1e^{-bx}}{b-i\alpha}\left[q_{-}(s,-ib)+q_{+}^{0}(s,\alpha)\right]+\frac{p_{+}e^{-ax}}{a-i\alpha}Ee^{a\xi_{*}^{-}(\theta_s)}\right\}. \tag{21}$$

Якщо $c_1=0$, *то при умові* (19) *справедливі співвідношення*

$$E[e^{-s\tau^{+}(z)},\gamma^{+}(z)>x] = e^{-ax}Ee^{-s\tau^{+}(z)},$$

$$Ee^{-s\tau^{+}(z)} = P\{\xi^{+}(\theta_s)>z\} = q^{+}(s)e^{-azp_0^{+}(s)}, \tag{22}$$

$$q_0^{+}(s) = 1-p_0^{+}(s) = P\{\xi^{+}(\theta_s)=0\};\quad x>0,\quad z>0.$$

Якщо $p_{+}=0$, *то при цій же умові для* $\varphi_1(\alpha)$ *розподіл пари* $\{\tau^{+}(z),\gamma^{+}(z)\}$ *визначається співвідношенням* (17).

Доведення. Для встановлення (20) досить повторити міркування, використані при доведенні формул (12) та (17). А співвідношення (21) випливає з (20) після обернення по u. Відносно обернення по α зауважимо, що розподіл

$$P\{\xi^{+}(\theta_s)>z,\ \gamma^{+}(z)>x\} = E[e^{-s\tau^{+}(z)},\gamma^{+}(z)>x]$$

є складною згорткою розподілу $\xi_{*}^{+}(\theta_s)$ та інших функцій, у тому числі й експонент e^{-ax} $(x>0)$, e^{-bx} $(x>0)$.

При умові $c_1=0$ друге співвідношення в (22) випливає з (13) і обернення в (14) по u. Таким чином, ми одержали аналог співвідношення (3.61) з [1] для максимуму однорідного процесу з незалежними приростами.

Щодо випадку $p_+ = 0$, то одержані співвідношення (17), (18) свідчать лише про показниковий розподіл $\gamma^+(z)$. Для обчислення розподілу $\tau^+(z)$ ця умова не дає спрощення, оскільки в проекційні члени формул (17), (18) $\varphi_1(\alpha)$ входить під знак функції $g(g(s-\psi(\alpha)))$. Умова (19) не дає спрощення і для обчислення факторизаційної компоненти $Ee^{i\alpha\xi_+^*(\theta_s)}$, якщо не накладати на $G(t)$ певні обмеження.

Розглянемо тепер момент першого перетину від'ємного рівня $z<0$ і перший перестриб через нього $\{\tau^-(z), \gamma^-(z)\}$. Справедливі стохастичні співвідношення

$$\tau^-(z) \doteq \begin{cases} \eta_1, & \xi_* < z, \\ \eta + \tau^-(z-\xi_*), & \xi_* \geq z, \end{cases} \quad \gamma^-(z) \doteq \begin{cases} \xi_* - z, & \xi_* < z, \\ \gamma^-(z-\xi_*), & \xi_* \geq z. \end{cases} \tag{23}$$

Позначимо через

$$w_-(s, \alpha, u) = (u - i\alpha)^{-1} E[e^{-s\eta}(e^{i\alpha\xi_*} - e^{u\xi_*}), \xi_* < 0] \tag{23'}$$

функцію, яка є інтегральним перетворенням згортки

$$W_-(s, x, u) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u(x-y)} E[e^{-s\eta}, \xi_* \in dy] \quad (x<0).$$

Теорема 2. *Інтегральне перетворення твірної функції пари* $\{\tau^-(z), \gamma^-(z)\}$

$$v^-(s, \alpha, u) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha z} E[e^{-s\tau^-(z)+u\gamma^-(z)}]\, dz$$

при умові $E|\xi^-(\theta_s)| < \infty$ *визначається співвідношенням*

$$v^-(s, \alpha, u) = (1-g(s))^{-1} Ee^{i\alpha\xi_*(\theta_s)}[w_-(s, \alpha, u) Ee^{i\alpha\xi_+^*(\theta_s)}]_-^0. \tag{24}$$

Доведення. З (23) випливає, що

$$v_z^-(s, u) = Ee^{-s\tau^-(z)+u\gamma^-(z)} \quad (z<0,\ \mathrm{Re}\, u \leq 0)$$

задовольняє співвідношення

$$v_z^-(s, u) = \int_{-\infty}^{z} E[e^{-s\eta+u(y-z)}, \xi_* \in dy] +$$

$$+ \int_{z}^{\infty} E[e^{-s(\eta+\tau^-(z-y))+u\gamma^-(z-y)}, \xi_* \in dy],$$

з якого після одностороннього перетворення по $z<0$ маємо рівняння

$$v^-(s, \alpha, u) = (i\alpha - u)^{-1} E[e^{-s\eta}(e^{i\alpha\xi_*} - e^{u\xi_*}), \xi_* < 0] +$$

$$+ [\varphi(\alpha) g(s-\psi(\alpha)) v^-(s, \alpha, u)]_-^0.$$

Його можна переписати таким чином:

$$v^-(s, \alpha, u) k(s, \alpha) = w_-(s, \alpha, u) - [\varphi(\alpha) g(s-\psi(\alpha)) v^-(s, \alpha, u)]_+. \tag{25}$$

На основі факторизаційного розкладу (2) і перетворень, подібних до тих, що використовувались при доведенні теореми 1, встановлюється формула (24).

Наслідок 2. *Якщо за умов теореми 2 виконується умова*

$$\varphi_-(\alpha) = p_- b(b+i\alpha)^{-1}, \quad b>0, \quad p_- = P\{\xi<0\} > 0, \tag{26}$$

то $v^-(s,\alpha,u)$ *визначається співвідношенням*

$$v^-(s,\alpha,u) = p_- bg(s-\psi(ib))[(1-g(s))(b+u)(b-i\alpha)]^{-1} \times$$

$$\times Ee^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}Ee^{-b\xi_*^+(\theta_s)}, \tag{27}$$

з якого після послідовних обернень маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\alpha z}E[e^{-s\tau^-(z)}, \gamma^-(z)<x]\,dz = p_- bg(s-\psi(ib)) \times$$

$$\times [(1-g(s))(b-i\alpha)]^{-1}e^{bx}Ee^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}Ee^{-b\xi_*^+(\theta_s)}; \tag{28}$$

$$P\{\xi^-(\theta_s)<z,\ \gamma^-(z)<x\} = p_- g(s-\psi(ib))(1-g(s))^{-1}e^{bx}\times$$

$$\times Ee^{-b\xi_*^+(\theta_s)}\int\limits_z^{\infty} e^{b(z-y)}P\{\xi^-(\theta_s)\in dy\} \quad (z<0,\ x<0); \tag{29}$$

$$E[e^{-s\tau^-(z)}, \gamma^-(z)<x] = P\{\gamma^-(z)<x\}Ee^{-s\tau^-(z)} =$$

$$= q_0^-(s)\,e^{bx+bzp_0^-(s)}, \quad p_0^-(s) = P\{\xi^-(\theta_s)=0\}, \quad q_0^-(s) = 1-p_0^-(s). \tag{30}$$

Доведення. Зауважимо, що згідно з [11] $\xi_*^-(\theta_s) \doteq \xi^-(\theta_s)$ і при $c_1=0$, і при $c_1>0$. Тому в факторизаційному розкладі (2) можна замінити $E\exp\{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)\}$ на $E\exp\{i\alpha\xi^-(\theta_s)\}$, а значить, у формулах (27), (28) фігурує залежність від $\xi^-(\theta_s)$.

За умови (26) в зображенні (23′) маємо

$$E[e^{-s\eta+i\alpha\xi_*}, \xi_*<0] = [\varphi_-(\alpha)g(s-\psi(\alpha))]_-^0 = \frac{p_- b}{b+i\alpha}\,g(s-\psi(ib)).$$

Це випливає з того, що по аналогії з лемою 2 проекцію вигляду $[q_+(\alpha)(b+i\alpha)^{-1}]_-^0$ легко обчислити, оскільки їй відповідає згортка

$$R_-(x) = \int\limits_0^{\infty} Q_+(y)e^{b(x-y)}dy = e^{bx}q_+(ib) \quad (x<0)$$

з одностороннім перетворенням Фур'є

$$r_-(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\alpha x}R(x)\,dx = q_+(ib)(b+i\alpha)^{-1}. \tag{31}$$

Це означає, що $[\varphi_-(\alpha)g(s-\psi(\alpha))]_-^0 = p_- b(b+i\alpha)^{-1}g(s-\psi(ib))$ і відповідно

$$w_-(s,\alpha,u) = \frac{p_- bg(s-\psi(ib))}{(b+i\alpha)(b+u)}.$$

Отже, формула для $v^-(s,\alpha,u)$ має вигляд

$$v^-(s,\alpha,u) = p_- b(1-g(s))^{-1}Ee^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}\left[Ee^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)}\frac{g(s-\psi(ib))}{(b+i\alpha)(b+u)}\right]_-^0. \tag{32}$$

Подібно до (31) остання проекція спрощується:

$$\left[Ee^{i\alpha\xi_+^*(\theta_s)} \frac{g(s-\psi(ib))}{(b+i\alpha)(b+u)} \right]_-^0 = Ee^{-b\xi_+^*(\theta_s)} \frac{g(s-\psi(ib))}{(b+u)(b+i\alpha)},$$

тому з (32) випливає формула (27). Після обернення по u з неї одержимо (28), а після обернення по α — формулу (29).

З формули (29) маємо

$$P\{\xi^-(\theta_s)<z,\ \gamma^-(z)<x\} = P\{\xi^-(\theta_s)<z\}P\{\gamma^-(z)<x\} = P\{\xi^-(\theta_s)<z\}e^{bx}, \tag{33}$$

при $x=0$

$$P\{\xi^-(\theta_s)<z\} = \frac{p_- g(s-\psi(ib))}{1-g(s)} Ee^{-b\xi_+^*(\theta_s)} \int_z^0 e^{b(z-y)} P\{\xi^-(\theta_s)\in dy\}.$$

З останнього співвідношення після перетворення Лапласа по $z<0$ одержимо

$$u^{-1}(1-Ee^{u\xi^-(\theta_s)}) = \frac{p_- g(s-\psi(ib))}{1-g(s)} Ee^{u\xi^-(\theta_s)} Ee^{-b\xi_+^*(\theta_s)},$$

тобто

$$Ee^{u\xi^-(\theta_s)} = \frac{(1-g(s))(b+u)}{(1-g(s))b + u\left[1-g(s)-p_- g(s-\psi(ib))Ee^{-b\xi_+^*(\theta_s)}\right]}, \tag{34}$$

$$p_0^-(s) = \lim_{u\to\infty} Ee^{u\xi^-(\theta_s)} = (1-g(s))[1-g(s)-p_- g(s-\psi(ib))Ee^{-b\xi_+^*(\theta_s)}]^{-1}.$$

Тепер (34) можна переписати у вигляді

$$Ee^{u\xi^-(\theta_s)} = p_0^-(s)(u+b)(b p_0^-(s)+u)^{-1}.$$

Після обернення по u одержимо розподіл

$$P\{\xi^-(\theta_s)<z\} = q_0^-(s)e^{zbp_0^-(s)} \quad (z<0). \tag{35}$$

Із співвідношень (33) та (35) випливає формула (30).

Порівнюючи результати для розподілу максимуму при умові (19) і мінімуму при умові (26), знаходимо, що розподіл мінімуму залишається показниковим з атомом у нулі при $c_1=0$ і при $c_1>0$. В той же час показниковий розподіл максимуму зберігається лише при $c_1=0$.

Розглянемо випадок, коли $\xi_1(t)=at$, $\xi(t)=at+\xi_2(t)$, $a<0$. Тоді [4] справедливі стохастичні співвідношення

$$\tau^+(z) \doteq \begin{cases} za^{-1}, & a\eta > z, \\ \eta, & a\eta+\xi > z,\ a\eta \le z, \\ \eta+\tau^+(z-a\eta-\xi), & a\eta+\xi \le z,\ a\eta \le z; \end{cases}$$

$$\gamma^+(z) \doteq \begin{cases} 0, & a\eta > z, \\ \xi+a\eta-z, & a\eta+\xi > z,\ a\eta \le z, \\ \gamma^+(z-a\eta-\xi), & a\eta+\xi \le z,\ a\eta \le z, \end{cases} \tag{36}$$

з яких неважко вивести рівняння для $v_-(s,u)=E\exp\{-s\tau^+(z)-\gamma^+(z)u\}$:

$$v_z(s,u) = e^{-sza^{-1}}\,\overline{G}(za^{-1}) + \int_0^{a^{-1}z} e^{-sy-u(ay-z)} E[e^{-u\xi}, \xi > z - ay]\, dG(y) +$$

$$+ \int_0^{a^{-1}z} e^{-sy} dG(y) \int_{-\infty}^{z-ay} v_{z-ay-v}(s,u)\, dF(v), \quad z>0, \quad \overline{G}(t) = 1 - G(t). \tag{37}$$

Зауважимо, що для

$$\xi_*(t) = \sum_{k=0}^{\nu(t)} \xi_k^* \quad \xi_k^* \doteq \xi_k + \xi_1(\sigma_k) - \xi_1(\sigma_{k-1}), \quad k > 1.$$

Теорема 3. *Твірна функція пари* $\{\tau^+(z), \gamma^+(z)\}$ *при умові* (6) *та умові*

$$\lim_{u\to\infty} u g(u) = c_+ > 0$$

визначається співвідношенням

$$v^+(s,\alpha,u) = \frac{g(s-i\alpha a)}{1-g(s)} E e^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)} \times$$

$$\times \left\{ P\{\xi_*^-(\theta_s) = 0\} c_+^1 + [w_+(\alpha,u) E e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}]_+^0 \right\}. \tag{38}$$

Якщо виконується умова $\varphi_+(\alpha) = a' p_+ (a' - i\alpha)^{-1}$, *то*

$$v^+(s,\alpha,u) = g(s - i\alpha a)(1-g(s))^{-1} E e^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)} \times$$

$$\times [E e^{a'\xi_*^-(\theta_s)} a' p_+ (u+a')^{-1} (a' - i\alpha)^{-1} + c_+^{-1} P\{\xi_*^-(\theta_s) = 0\}]. \tag{39}$$

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z} E[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z) > x]\, dz = \frac{g(s-i\alpha a)}{1-g(s)} \frac{p_+ e^{-a'x}}{a' - i\alpha} E e^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)} E e^{a'\xi_*^-(\theta_s)} \tag{40}$$

Доведення. Одностороннім перетворенням по $z > 0$ рівняння (37) зводиться до рівняння

$$v^+(s,\alpha,u) = a(s-i\alpha a)^{-1}(1 - g(s-i\alpha a)) +$$

$$+ g(s-i\alpha a) w_+(\alpha,u) + g(s-i\alpha a)[\varphi(\alpha) v^+(s,\alpha,u)]_+^0,$$

яке можна переписати таким чином:

$$\frac{v^+(s,\alpha,u) k(s,\alpha)}{g(s-i\alpha a)} = \frac{a}{s-i\alpha a}(g^{-1}(s-i\alpha a) - 1) + w_+(\alpha,u) - [\varphi(\alpha) v^+]_-.$$

За допомогою міркувань, аналогічних тим, що застосовувалися при доведенні теореми 1, одержуємо співвідношення

$$v^+(s,\alpha,u) = (1-g(s))^{-1} g(s-i\alpha a) E e^{i\alpha\xi_*^+(\theta_s)} \times$$

$$\times \left[E e^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)} \left(\frac{a}{s-i\alpha a}(g^{-1}(s-i\alpha a) - 1) + w_+(\alpha,u) \right) \right]_+^0. \tag{41}$$

Оскільки за умовою теореми

$$\lim_{i\alpha\to-\infty} (s-i\alpha a) g(s-i\alpha a) = \lim_{u\to\infty} u g(u) = c_+ > 0,$$

то за лемою 2

$$[(s-i\alpha a)^{-1}(g^{-1}(s-i\alpha a)-1)Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}]_+^0 = c_+^{-1}P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\} +$$

$$+[(s-i\alpha a)^{-1}(g^{-1}(s-i\alpha a)-1)Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}]_+ = c_+^{-1}P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\} +$$

$$+(s-i\alpha a)^{-1}Ee^{sa^{-1}\xi_*(\theta_s)}(g^{-1}(0)-1) = c_+^{-1}P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\}.$$

Тому з (41) випливає формула (38).

Слід зауважити, що при наявності похідної $G'(t)$ майже скрізь при $t>0$ та при умові $G'(+0)>0$

$$\lim_{u\to\infty} ug(u) = \lim_{u\to\infty} u \fint_0^\infty e^{-ut}G'(t)\,dt =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \fint_0^\infty e^{-y}G'(yu^{-1})\,dy = G'(+0) = c_+ > 0.$$

Символ $\fint$ означає, що з області інтегрування викинуті точки, де не існує $G'(t)$. Якщо $\varphi_+(\alpha)=a'(a'-i\alpha)^{-1}p_+$, то згідно з лемою 2 спрощується проекція в (38), оскільки

$$w_+(\alpha,u) = a'p_+(a'-i\alpha)^{-1}(u+a')^{-1}.$$

Таким чином, ми одержимо формулу (39), яка допускає обернення по u і приводить до співвідношення (40). Його обернення по α дається нижче.

Наслідок 3. *При виконанні згаданої вище умови на $G(t)$ та умови (6) для процесу $\xi(t)=at+\xi_2(t)$ $(a>0)$ перестриб $\gamma^+(z)$ набуває значення 0 з додатною ймовірністю і*

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z}E[e^{-s\tau^+(z)};\gamma^+(z)=0]\,dz = \frac{g(s-i\alpha a)P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\}}{c_+(1-g(s))}\,Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}. \quad (42)$$

Якщо $\varphi_+(\alpha)=a'p_+(a'-i\alpha)^{-1}$ $(p_+>0)$, то

$$E[e^{-s\tau^+(z)};\gamma^+(z)=0] = \frac{P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\}}{c_+(1-g(s))}\fint_0^z e^{-s(z-y)/a}G'\left(\frac{z-y}{a}\right)dP\{\xi_*^+(\theta_s)<y\}, \quad (43)$$

$$E[e^{-s\tau^+(z)};\gamma^+(z)>x] = p_+c_+Ee^{a'(\xi_*^-(\theta_s)-x)}[P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\}]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^z E[e^{-s\tau^+(z-y)};\gamma^+(z-y)=0]e^{-a'y}\,dy \quad (z,x>0). \quad (44)$$

Доведення. Нагадаємо, що односторонньому перетворенню Фур'є

$$w_+(\alpha,u) = \frac{\varphi_+(\alpha)-\varphi_+(iu)}{u+i\alpha}$$

відповідає функція

$$w_+(x,u) = \int_x^\infty e^{u(x-z)}\,dF(z).$$

Тому

$$[Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}w_+(\alpha,u)]_+^0 = [Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}w_+(\alpha,u)]_+ \xrightarrow[u\to\infty]{} 0.$$

Здійснивши граничний перехід по $u\to\infty$ в (38), одержимо (42). Якщо $\varphi_+(\alpha)$ задовольняє умову (11′), то з (42) і (40) після обернення по α випливають формули (43) і (44). При цьому враховується, що згідно з (42) формула (40) набуває вигляду

$$\int_0^\infty e^{i\alpha z}E[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z)>x]\,dz = \frac{c_+p_+e^{-a'x}}{(a'-i\alpha)P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\}}\times$$

$$\times Ee^{a'\xi_*^-(\theta_s)}\int_0^x e^{i\alpha z}E[e^{-s\tau^+(z)}, \gamma^+(z)=0]\,dz.$$

Звідси після обернення по α випливає (44), причому для $\gamma^+(z)\to\gamma^+(+0)=0$. Тому справа в (44) під знаком імовірності знаходиться неможлива подія і перехід до границі в (44) при $z\to 0$ не має сенсу.

Всі результати для $\{\tau^-(z),\gamma^-(z)\}$ при $z<0$ з теореми 2 й наслідку 2 без змін переносяться на процес $\xi(t)$ з лінійною компонентою з урахуванням того, що процес $\xi_*(t)$ утворюється сумами з доданків $\xi_k^* \doteq \xi_* = \xi + a\eta$. З цих результатів варто відзначити співвідношення (30), оскільки при $a>0$ $\tau^-(0)$ і $\gamma^-(0)$ мають невироджений розподіл. Згідно з (30) при умові (26) справедливе співвідношення

$$E[e^{-s\tau^-(0)}, \gamma^-(0)<x] = q_0^-(s)e^{bx}, \quad q_0^-(s) = P\{\xi^-(\theta_s)<0\}. \tag{45}$$

З теорем 1 – 3 неважко вивести співвідношення для розподілу $\xi^+(\theta_s)$ та $\xi^-(\theta_s)$. Зокрема, для $\xi^+(\theta_s)$ справедливе таке твердження.

Наслідок 4. *За умов теореми* 1

$$Ee^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = 1 + i\alpha g(s-\psi(\alpha))(1-g(s))^{-1}Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}\times$$

$$\times\left[Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}\left(c_1w_1(\alpha,0)\frac{g^{-1}(s-\psi(\alpha))-1}{s-\psi(\alpha)} + w_+(\alpha,0)\right)\right]_+^0, \tag{46}$$

де $w_1(\alpha,0)$, $w_+(\alpha,0)$ *є односторонніми перетвореннями Фур'є функції*

$$W_1(x,0) = \overline{F}_1(x) = P\{\xi_1'>x\},\quad W_+(x,0) = F(x) = P\{\xi_1>x\}\quad (x>0).$$

За умов теореми 3

$$Ee^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = 1 + i\alpha\frac{g(s-i\alpha a)}{1-g(s)}Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}\times$$

$$\times\left[c_+^{-1}P\{\xi_*^-(\theta_s)=0\} + [Ee^{i\alpha\xi_*^-(\theta_s)}w_+(s,\alpha)]_+^0\right]. \tag{47}$$

Доведення цих тверджень випливає з теореми 1 та 3, якщо в (7) та (38) покласти $u=0$ і врахувати, що

$$v^+(s,\alpha,0) = \frac{1}{i\alpha}[Ee^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}-1].$$

Відповідно при умові (19) замість (46) і (47) можна одержати спрощені співвідношення для $E\exp\{i\alpha\xi^+(\theta_s)\}$, які випливають з наслідків 1 та 3 при $u=0$.

Розглянемо знову випадок, коли $\xi_1(t)$ — процес Пуассона з кумулянтою $\varphi(\alpha)$, і сумісний розподіл $\{\tau^+(z), \gamma^+(z), \gamma_+(z)\}$ моменту першого перестрибу $\tau^+(z)$, величини перестрибу $\gamma^+(z)$ і недострибу $\gamma_+(z)$ через рівень $z>0$. Нам будуть потрібні співвідношення для $\{\tau'(z), \gamma'(z), \gamma_1(z)\}$ — трійки відповідних функціоналів процесу $\xi_1(t)$. На основі стохастичних зображень (4) і співвідношення для недострибу

$$\gamma_1(z) = \begin{cases} z, & \xi_1 > z, \\ \gamma_1(z-\xi_1), & \xi_1 \le z, \end{cases}$$

майже по аналогії з лемою 3 для

$$A(u,v,z,x) = E[e^{-u\gamma'(z)-v\gamma_1(z)}, \tau'(z)<x].$$

Встановлюється така лема.

Лема 4. *Інтегральне перетворення*

$$a(u,v,\alpha,x) = \int_0^\infty e^{i\alpha z} A(u,v,z,x)\,dx$$

визначається співвідношенням

$$a(u,v,\alpha,x) = c_1 w_1(\alpha,u,v)\psi^{-1}(\alpha)(e^{x\psi(\alpha)}-1) \quad (x>0), \tag{48}$$

де

$$w_1(\alpha,u,v) = \frac{\varphi_1(\alpha+iv)-\varphi_1(iu)}{i\alpha+u-v}$$

є одностороннім перетворенням Фур'є для функції

$$W_1(x,u,v) = \int_x^\infty e^{(u-v)x-uz}\,dF_1(z) \quad (x>0).$$

Доведення опирається на інтегральне рівняння

$$a(u,v,\alpha,x) = (1-e^{-c_1x})w_1(\alpha,u,v)+c_1\varphi_1(\alpha)\int_0^x e^{-c_1y}a(u,v,x-y)\,dy,$$

яке неважко вивести з зображення для $\gamma_1(z)$ та з (4).

За аналогією з $W_1(x,u,v)$, $w_1(\alpha,u,v)$ введемо функції

$$W_+(x,u,v) = \int_x^\infty e^{(u-v)x-uz}\,dF(z) \quad (x>0),$$
$$w_+(\alpha,u,v) = \frac{\varphi_+(\alpha+iv)-\varphi_+(iu)}{i\alpha+u-v} \quad (\operatorname{Im}\alpha\ge 0). \tag{49}$$

Щоб одержати співвідношення для твірної функції

$$v_z^+(s,u,v) = E[e^{-s\tau^+(z)-u\gamma^+(z)-v\gamma_+(z)}, \tau^+(z)<x],$$

скористуємося співвідношенням (8) та стохастичним зображенням

$$\gamma_+(z) = \begin{cases} \gamma_1(z), & \xi_1(\eta) > z, \\ z - \xi_1(\eta), & \xi_1(\eta) \le z, \ \xi_* > z, \\ \gamma_+(z - \xi_*), & \xi_* \le z, \ \xi_1(\eta) \le z, \end{cases}$$

з яких випливає

$$v_z^+(s, u, v) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (I_{1,2,3} = I_{1,2,3}(s, z, u, v)), \tag{50}$$

де

$$I_1 = E[\exp\{-u\gamma'(z) - v\gamma_1(z)\}, \ \xi_1(\theta_s) > z, \ \xi_1(\eta) > z],$$

$$I_2 = E[\exp\{-s\eta - u(\xi_* - z) - v(z - \xi_1(\eta))\}, \ \xi_1(\eta) \le z, \ \xi_* > z],$$

$$I_3 = E[\exp\{-s(\eta + \tau^+(z - \xi_*) - u\gamma_+(z - \xi_*) - v\gamma_+(z - \xi_*)\}, \ \xi_* \le z, \ \xi_1(\eta) \le z].$$

Теорема 4. *За умови* (6) *справедливе співвідношення*

$$v^+(s, \alpha, u, v) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{i\alpha z} v_z^+(s, u, v)\, dz = \frac{g(s - \psi(\alpha))}{1 - g(s)} E e^{i\alpha \xi_*^+(\theta_s)} \times$$

$$\times \left[E e^{i\alpha \xi_*^-(\theta_s)} \left(c_1 \frac{g^{-1}(s - \psi(\alpha)) - 1}{s - \psi(\alpha)} w_1(\alpha, u, v) + w_+(\alpha, u, v) \right) \right]_+^0. \tag{51}$$

Для $\{\tau^+(z), \bar\gamma(z)\}$, *де* $\bar\gamma(z)$ *— перший стрибок, що накриває рівень* $z > 0$, *виконується співвідношення*

$$\bar v^+(s, \alpha, u, v) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{i\alpha z} E e^{-s\tau^+(z) - u\bar\gamma(z)} dz = \frac{g(s - \psi(\alpha))}{1 - g(s)} E e^{i\alpha \xi_*^+(\theta_s)} \times$$

$$\times \left[E e^{i\alpha \xi_*^-(\theta_s)} \left(c_1 \frac{g^{-1}(s - \psi(\alpha)) - 1}{s - \psi(\alpha)} \overline{w}_1(\alpha, u) + \overline{w}_+(\alpha, u) \right) \right]_+^0, \tag{52}$$

$$\overline{w}_1(\alpha, u) = w_1(\alpha, u, u), \quad \overline{w}_+(\alpha, u) = w_+(\alpha, u, u),$$

$$\overline{W}_1(x) = \int_x^\infty e^{-uz} dF_1(z), \quad \overline{W}_+(x) = \int_x^\infty e^{-uz} dF(z).$$

Доведення. Після інтегрального перетворення по $z \ge 0$ з (50) випливає

$$\tilde I_1 = \int_0^\infty e^{i\alpha z} I_1(s, z, u, v)\, dz = \frac{sc_1(1 - g(s - \psi(\alpha)))}{s - \psi(\alpha)} w_1(u, v, \alpha),$$

$$\tilde I_2 = g(s - \psi(\alpha)) w_+(u, v, \alpha),$$

$$\tilde I_3 = g(s - \psi(\alpha)) [\varphi(\alpha) v^+(s, \alpha, u, v)]_+^0.$$

Отже, для $v^+(s, \alpha, u, v)$ одержимо рівняння

$$v^+(s, \alpha, u, v) k(s, \alpha) g^{-1}(s - \psi(\alpha)) = -[\varphi(\alpha) v^+(s, \alpha, u, v)]_- +$$

$$+ c_1 E e^{i\alpha \xi_1(\theta_s)} (g^{-1}(s - \psi(\alpha)) - 1) w_1(s, \alpha, u, v) + w_+(s, \alpha, u, v),$$

з якого аналогічно з теоремою 1 одержимо співвідношення (51). Щоб одержати співвідношення (52) для $\{\tau^+(z), \overline{\gamma}(z)\}$, де $\overline{\gamma}(z)$ — стрибок, що накриває рівень $z>0$, достатньо в (51) покласти $u=v$. При $v=0$ з (51) випливає співвідношення для $\{\tau^+(z), \gamma^+(z)\}$ (див. (7)). При $u=0$ з (51) одержимо співвідношення для $\{\tau^+(z), \gamma_+(z)\}$, де $\gamma_+(z)$ — недостриб черз рівень $z>0$.

Зрозуміло, що при умові (19) неважко одержати спрощені відповідно співвідношення, в яких легко здійснити обернення по u і по v.

На закінчення зауважимо, що використане в [6–8] припущення про наявність нуля для функції $k(s,\alpha)$ ($k_*(s,\alpha)$) в окремих випадках, що розглядались в наслідках 1–3, підтверджується. З результатів наслідків для цього нуля випливає відповідна імовірнісна інтерпретація. Зокрема, з наслідку 2 і формул (34), (35) маємо

$$k_*(s,-iu) = [Ee^{u\xi_*(\theta_s)}]^{-1} = \frac{bp_0^-(s)+u}{p_0^-(s)(u+b)Ee^{u\xi_*^+(\theta_s)}},$$

$$-u_s = b\,p_0^-(s) = bP\{\xi_*^-(\theta_s)=0\}, \quad k_*(s,-iu_s) = 0.$$

1. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
2. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса случайных процессов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1980. – 28 с.
3. *Гусак Д. В.* О граничных функционалах для сумм случайного числа слагаемых // Аналитические методы исследования в теории вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 20–35.
4. *Гусак Д. В.* Факторизационные тождества для сумм случайного числа слагаемых // Прикладные задачи теории вероятностей. – Киев: Ин-т математики АН УСССР, 1982. – С. 25–44.
5. *Гусак Д. В.* Распределение экстремумов для процесса, определяемого суммами случайного числа слагаемых // Аналитические методы в теории надежности. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 45–55.
6. *Королюк В. С., Пирлиев Б.* Случайные блуждания на суперпозиции двух процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 433–436.
7. *Братийчук Н. С., Пирлиев Б.* О величине перескока уровня случайным блужданием на суперпозиции двух процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 689–695.
8. *Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Предельная теорема для момента достижения и величины перескока уровня регенерирующим полумарковским блужданием // Теория случайных процессов и ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 41–48.
9. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 5. – С. 3–120.
10. *Насирова Т. И.* Процессы полумарковского блуждания. – Баку: Элм, 1984. – 170 с.
11. *Gusak D. V., Rozumenko A. M.* On extremum of integer-valued processes defined by sums of a random number of addenda // Random operators and stochastic equations. – 1995. – **3**, № 1. – P. 85–98.

Одержано 03.01.94