УДК 519.21

Е. Ю. Канева, асп. (С.-Петербург. транспорт. ун-т)

СЛУЧАЙНЫЕ ПЕРМАНЕНТЫ СМЕШАННЫХ МНОГОВЫБОРОЧНЫХ МАТРИЦ

Under certain conditions, the weak convergence of random permanents is considered.

За деяких умов розглянута слабка збіжність випадкових перманентів.

Пусть $\xi_j^{(n)}$, $1 \le j \le n$, — простая выборка в схеме серий со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathcal{X})$, $P_n(B) = P\left(\xi_j^{(n)} \in B\right)$, $B \in \mathcal{X}$. Предполагается, что эта выборка относится к схеме пуассоновской аппроксимации, т. е. при $n \to \to \infty$ $\lambda_n(B) = nP_n(B) \to \lambda(B)$, $B \in \mathcal{X}$. Введем в рассмотрение k-блочную функциональную матрицу

$$A_n^m(\Phi_1, \ldots, \Phi_k) = \begin{bmatrix} A_n^{m_1}(\Phi_1) \\ \vdots \\ A_n^{m_k}(\Phi_k) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $m = m_1 + \ldots + m_k$,

$$A_n^{m_s}(\Phi_s) = \left[a_{ij} = \Phi_s\left(\xi_j^{(n)}\right),\ 1 \le i \le m_s,\ 1 \le j \le n\right], \quad s = 1, \ldots, k,$$

$\Phi_s \colon X \to R$ — непрерывная функция с компактным носителем.

Далее, пусть задана k-мерная случайная выборка $\varepsilon_s = (\varepsilon_{sj}, 1 \le j \le n)$, $1 \le \le s \le k$, независимых ε_{sj} в совокупности случайных величин и одинаково распределенных при каждом фиксированном s, кроме того, $E\varepsilon_{sj} = \mu_s$, $0 < \sigma_s^2 = = E(\varepsilon_{sj} - \mu_s)^2 < \infty$, т. е. при $n \to \infty$

$$n^{-1/2}\sigma_s^{-1} \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_{sj} - \mu_s) \Rightarrow \tau_s,$$

где τ_s, $1 \le s \le k$, — взаимно независимые стандартные нормальные случайные величины.

По этой выборке образуем k-блочную матрицу

$$A_n^m(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \begin{bmatrix} A_n^{m_1}(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ A_n^{m_k}(\varepsilon_k) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где

$$A_n^{m_s}(\varepsilon_s) = \left[a_{ij} = \varepsilon_{sj},\ 1 \le i \le m_s,\ 1 \le j \le n\right]$$

— матрица размерности $m_s \times n$, $s = 1, \ldots, k$.

Введем в рассмотрение сумму матриц (1) и (2):

$$A_n^m(\varepsilon + \Phi) = A_n^m\left(\varepsilon_1/\sigma_1\sqrt{n} + \Phi_1, \ldots, \varepsilon_k/\sigma_k\sqrt{n} + \Phi_k\right) =$$
$$= A_n^m\left(\varepsilon_1/\sigma_1\sqrt{n}, \ldots, \varepsilon_k/\sigma_k\sqrt{n}\right) + A_n^m\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_k\right). \tag{3}$$

Цель данной работы — изучение слабой сходимости перманента $\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \Phi)$ матрицы $A_n^m(\varepsilon + \Phi)$ в (3). Методы доказательства основаны на результатах работ [1, 2].

2. Предельные теоремы. Мы будем рассматривать случаи как фиксированных степеней m_s, так и $m_s \to \infty$, $s = 1, \ldots, k$, при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Если $m_s = 0$ и m_s фиксированы, $s = 1, \ldots, k$, то при $n \to \infty$ справедлива слабая сходимость*

$$\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \Phi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{c=0}^{m} \sum_{d_1+\ldots+d_k=c} \prod_{s=1}^{k} m_s^{[d_s]} I_c^{\nu}\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_k\right) \frac{\prod_{s=1}^{k} H_{m_s-d_s}\left(\tau_s\right)}{\prod_{s=1}^{k} d_s!}, \tag{4}$$

где $H_{m_s-d_s}(\tau_s)$ — полиномы Эрмита,

$$I_c^{\nu}\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_k\right) = \int_{X^c} \prod_{s=1}^{k} \prod_{r=c_{s-1}+1}^{c_s} \Phi_s\left(x_r\right) \prod_{s=1}^{c} \nu\left(dx_s\right)$$

— стохастический интеграл Ито–Пуассона, $c_s = d_1 + \ldots + d_s$, $s = 1, \ldots, k$; $c_0 = 0$, $c_k = c$.

Доказательство. Применим теорему 2 из [2] при $\delta_s \to \Phi_s$, $\varepsilon_s \to \varepsilon_s/\sigma_s\sqrt{n}$. Поэтому по формуле (10) из [2] с учетом (3) имеем

$$\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \Phi) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{c=0}^{m} \sum_{d_1+\ldots+d_k=c} \prod_{s=1}^{k} m_s^{[d_s]} \sum_{q^{(1)} \subset Q_{d_1}} \prod_{s=1}^{d_1} \Phi_1\left(\xi_{q_s^{(1)}}^{(n)}\right) \times$$
$$\times \sum_{q^{(2)} \subset Q_{d_2}^{c_1}\left(q^{(1)}\right)} \prod_{s=1}^{d_2} \Phi_2\left(\xi_{q_s^{(2)}}^{(n)}\right) \ldots \sum_{q^{(k)} \subset Q_{d_k}^{c_{k-1}}\left(q^{(1)}, \ldots, q^{(k-1)}\right)} \prod_{s=1}^{d_k} \Phi_k\left(\xi_{q_s^{(k)}}^{(n)}\right) \times$$
$$\times \operatorname{Per} A_{n-c}^{m-c}\left(\varepsilon_1/\sigma_1\sqrt{n}, \ldots, \varepsilon_k/\sigma_k\sqrt{n}; q\right). \tag{5}$$

По теореме 3.4.3 из [1, с. 63] при $n \to \infty$

$$\operatorname{Per} A_{n-c}^{m-c}\left(\varepsilon_1/\sigma_1\sqrt{n}, \ldots, \varepsilon_k/\sigma_k\sqrt{n}; q\right) \Rightarrow \prod_{s=1}^{k} H_{m_s-d_s}\left(\tau_s\right). \tag{6}$$

Далее, по теореме 1.1.1 из [1, с. 11] о декомпозиции перманента запишем формулу

$$\sum_{q^{(1)} \subset Q_{d_1}} \prod_{s=1}^{d_1} \Phi_1\left(\xi_{q_s^{(1)}}^{(n)}\right) \sum_{q^{(2)} \subset Q_{d_2}^{c_1}\left(q^{(1)}\right)} \prod_{s=1}^{d_2} \Phi_2\left(\xi_{q_s^{(2)}}^{(n)}\right) \ldots$$

$$\ldots \sum_{q^{(k)} \subset Q_{d_k}^{c_{k-1}}\left(q^{(1)},\ldots,q^{(k-1)}\right)} \prod_{s=1}^{d_k} \Phi_k\left(\xi_{q_s^{(k)}}^{(n)}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{Per} A_n^c\left(\Phi_1,\ldots,\Phi_k\right)}{\prod_{s=1}^k d_s!}. \tag{7}$$

Ввиду теоремы 2.2.6 из [1, с. 32] при $n \to \infty$ имеем

$$\operatorname{Per} A_n^c\left(\Phi_1,\ldots,\Phi_k\right) \Rightarrow I_c^{\nu}\left(\Phi_1,\ldots,\Phi_k\right). \tag{8}$$

Из (5)–(8) следует (4).

Теорема 2. *Пусть* $\mu_s = 0$, m_s *фиксированы,* $s = 1, \ldots, k$, *и* $E\Phi = (E\Phi_1, \ldots, E\Phi_k)$, *где*

$$E\Phi_s = \int_X \Phi_s(x)\, P_n(dx) = n^{-1}\lambda_n(\Phi_s), \quad s = 1, \ldots, k.$$

Тогда при $n \to \infty$ *имеет место слабая сходимость*

$$\operatorname{Per} A_n^m(\varepsilon + \Phi - E\Phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{c=0}^{m} \sum_{d_1+\ldots+d_k=c} \prod_{s=1}^{k} m_s^{[d_s]} I_c^{\overline{\nu}}\left(\Phi_1,\ldots,\Phi_k\right) \frac{\prod_{s=1}^k H_{m_s-d_s}\left(\tau_s\right)}{\prod_{s=1}^k d_s!}, \tag{9}$$

при этом $\overline{\nu} = \nu - \lambda$ — *центрированная пуассоновская случайная мера.*

Доказательство. Сначала применяем теорему 2 из [2] при $\delta_s \to \Phi_s - E\Phi_s$, $\varepsilon_s \to \varepsilon_s / \sigma_s\sqrt{n}$. В результате получаем формулу, аналогичную (5), где вместо Φ_s всюду $\Phi_s - E\Phi_s$. Значит, если применить теорему 2.2.6 из [1, с. 32], в соответствии с которой

$$\operatorname{Per} A_n^c\left(\Phi_1 - E\Phi_1, \ldots, \Phi_k - E\Phi_k\right) \Rightarrow I_c^{\overline{\nu}}\left(\Phi_1,\ldots,\Phi_k\right),$$

и учесть соотношение (6), то получим (9).

Теорема 3. *Если* $\mu_s = 0$ *и при* $n \to \infty$

$$b_{ns} = m_s / n \to b_s, \quad 0 < b_s < 1, \quad s = 1, \ldots, k,$$

то справедлива слабая сходимость

$$n^{-[m]} \operatorname{Per} A_n^m(1 + \varepsilon + \Phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left(\sum_{s=1}^{m}\left(\tau_s b_s - b_s^2/2\right)\right) \exp\left(\int_X \ln\left(1 + \sum_{s=1}^{k} b_s \Phi_s(x)\right)\nu(dx)\right). \tag{10}$$

Доказательство. По формуле декомпозиции (4) из [2, с. 35]

$$n^{-[m]} \operatorname{Per} A_n^m(1 + \varepsilon + \Phi) =$$

$$= \sum_{c=0}^{m} n^{-[c]} \sum_{d_1+\ldots+d_k=c} \prod_{s=1}^{k} m_s^{[d_s]} \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon + \Phi)}{\prod_{s=1}^k d_s!}. \tag{11}$$

Путем преобразования правой части соотношение (11) допускает представление

$$n^{-[m]}\operatorname{Per} A_n^m(1+\varepsilon+\Phi) =$$

$$= \sum_{c=0}^{m} \sum_{d_1+\ldots+d_k=c} \prod_{s=1}^{k} b_{ns}^{d_s} \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon+\Phi)}{\prod_{s=1}^{k} d_s!} + \Delta_n, \tag{12}$$

где $\Delta_n \xrightarrow{P} 0$, $n\to\infty$. Сумма в (12) совпадает с производящей функцией перманента, т. е. (см. теорему 1.2.1 из [1, с. 16])

$$\sum_{c=0}^{n} \sum_{d_1+\ldots+d_k=c} \prod_{s=1}^{k} b_{ns}^{d_s} \frac{\operatorname{Per} A_n^c(\varepsilon+\Phi)}{\prod_{s=1}^{k} d_s!} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}\left(1+\sum_{s=1}^{k} b_{ns}\left(\varepsilon_{sj}/\sigma_s\sqrt{n}+\Phi_s\left(\xi_j^{(n)}\right)\right)\right).$$

Кроме того, в условиях теоремы справедлива слабая сходимость

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\sum_{s=1}^{k} b_{ns}\left(\varepsilon_{sj}/\sigma_s\sqrt{n}+\Phi_s\left(\xi_j^{(n)}\right)\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left(\sum_{s=1}^{k}\left(\tau_s b_s - b_s^2/2\right)\right) \exp\left(\int_X \ln\left(1+\sum_{s=1}^{k} b_s\Phi_s(x)\right)\nu(dx)\right)$$

что и доказывает (10).

Теорема 4. *Если* $\mu_s = 0$ *и при* $n\to\infty$

$$b_{ns} = m_s/n \to b_s, \quad 0 < b_s < 1, \quad s = 1,\ldots,k,$$

то имеет место слабая сходимость

$$n^{-[m]}\operatorname{Per} A_n^m(1+\varepsilon+\Phi-E\Phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left(\sum_{s=1}\left(\tau_s b_s - b_s^2/2\right)\right)\times$$

$$\times \exp\left(-\sum_{s=1} b_s\lambda(\Phi_s) + \int_X \ln\left(1+\sum_{s=1} b_s\Phi_s(x)\right)\nu(dx)\right).$$

Доказательство. Достаточно применить формулу декомпозиции (4) из [2, с. 35], а затем использовать рассуждения, приведенные при выводе (10).

1. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Случайные перманенты. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – 134 с.
2. *Канева Е. Ю.* Декомпозиция перманента k-мерной проекционной матрицы // Докл. АН Украины. – 1992. – № 11. – С. 34–37.

Получено 23.06.94