УДК 519.21

Е. В. Сугакова, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОЦЕНКИ В ТЕОРЕМЕ РЕНЬИ ДЛЯ РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛАГАЕМЫХ

For the sum of a geometrical number of differently distributed random variables, we obtain estimates for the rate with which the distribution function converges to a special function in the case when the parameter of the geometric distribution tends to zero. The problem, closely related to the geometric summation and concerning nonhomogeneous thinning flows, is also considered.

Знайдені оцінки швидкості збіжності функції розподілу суми геометричного числа різнорозподілених випадкових величин до функції спеціального вигляду у випадку, коли параметр геометричного розподілу прямує до нуля. Окремо розглядається задача, тісно пов'язана з геометричним сумуванням — дослідження збіжності неоднорідних рідіючих потоків.

Пусть $\{\xi_i, i \geq 0\}$ — последовательность независимых случайных величин с общим средним $E\xi_i = 1$ для всех $i \geq 1$; ν — геометрическая случайная величина с функцией распределения $P\{\nu = k\} = \theta(1-\theta)^k$, $k \geq 0$, $0 < \theta < 1$, не зависящая от последовательности $\{\xi_i\}$. Положим $\tau = \sum_{i=0}^{\nu} \xi_i$.

Асимптотическое поведение случайной величины $\theta\tau$ при $\theta \to 0$ в различных постановках изучалось многими авторами. Например, в [1–3] получены равномерные и неравномерные оценки скорости сходимости $\theta\tau$ к экспоненциальной случайной величине. Однако все эти оценки предполагают одинаковую распределенность ξ_i. Данная статья обобщает результат, полученный в [4], на неоднородный случай. Предлагаются оценки скорости сходимости функции распределения $\theta\tau$ к функции специального вида в терминах теории восстановления с последующим применением к случаю, когда ξ_i ограничены. Отдельно рассмотрена задача, тесно связанная с геометрическим суммированием — исследование сходимости неоднородных редеющих потоков.

Рассмотрим „считающий" процесс $\nu(t)$, задаваемый последовательностью $\{\xi_i, i \geq 0\}$:

$$\nu(t) = \begin{cases} \max\left\{ n: \sum_{i=0}^{n} \xi_i \leq t \right\} + 1, & \text{если } \xi_0 \leq t, \\ 0, & \text{если } \xi_0 > t. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим $H(t) = E\nu(t)$, $D(t) = E(\nu(t) - H(t))^2$. Предположим, что $D(t) < \infty$.

Теорема 1. *Для всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$|P\{\theta\tau > t\} - (1-\theta)^{H(t/\theta)}| \leq \frac{\theta^2}{2(1-\theta)^2} e^{-\alpha t} D\left(\frac{t}{\theta}\right) + 2P\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\}, \tag{2}$$

где α — произвольное число из интервала $(0, 1-\theta/t)$.

Доказательство. Используем представление, вытекающее из определения функции распределения $\theta\tau$:

$$P\{\theta\tau > t\} = E(1-\theta)^{\nu(t/\theta)}.$$

Тогда

$$|P\{\theta\tau > t\} - (1-\theta)^{H(t/\theta)}| \leq (1-\theta)^{H(t/\theta)} \left| E\left[(1-\theta)^{\nu(t/\theta) - H(t/\theta)} - \right.\right.$$

$$-1-\ln(1-\theta)\left(\nu\left(\frac{t}{\theta}\right)-H\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)\Big]I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right)\geq\frac{\alpha t}{\theta}\right\}\Bigg|+$$

$$+(1-\theta)^{H(t/\theta)}\Bigg|E\Big[(1-\theta)^{\nu(t/\theta)-H(t/\theta)}-1-$$

$$-\ln(1-\theta)\left(\nu\left(\frac{t}{\theta}\right)-H\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)\Big]I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right)<\frac{\alpha t}{\theta}\right\}\Bigg|=A+B, \tag{3}$$

где $I\{S\}$ обозначает индикатор события S, α — произвольное число, $0<\alpha<$ $<1-\theta/t$.

Оценим A с помощью разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Обозначив $\Delta=\nu(t/\theta)-H(t/\theta)$, получим

$$A=(1-\theta)^{H(t/\theta)}\left|E\left[(1-\theta)^{\Delta}-1-\ln(1-\theta)\Delta\right]I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right)\geq\frac{\alpha t}{\theta}\right\}\right|=$$

$$=(1-\theta)^{H(t/\theta)}\left|E\left(\frac{\Delta^2\ln^2(1-\theta)}{2}(1-\theta)^{\eta}I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right)\geq\frac{\alpha t}{\theta}\right\}\right)\right|,$$

где η — некоторая случайная величина такая, что

$$\min(0,\ \Delta)\leq\eta\leq\max(0,\ \Delta).$$

Заметим, что для функции $H(t)$ выполняется соотношение $H(t)\geq t-1$. Это вытекает из равенства

$$\sum_{i=0}^{\nu(t)-1}\xi_i=t+\zeta_t, \tag{4}$$

где ζ_t — остаточное время в процессе $\nu(t)$. Найдем математическое ожидание от левой и правой частей (4). Учитывая то, что $E\zeta_t\geq 0$, получаем

$$E\sum_{i=0}^{\nu(t)}\xi_i\geq t.$$

Теперь используем теорему Колмогорова – Прохорова [5, с. 88].

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_i,\ i\geq 1\}$ *— последовательность независимых случайных величин, целочисленная неотрицательная случайная величина* ν *не зависит от будущего, т. е. для любого* n *событие* $\{\nu\leq n\}$ *не зависит от* $F_{n+1,\infty}$, *где* $F_{n+1,\infty}$ *—* σ*-алгебра, порожденная случайными величинами* $\xi_{n+1},\xi_{n+2},\ldots$ *. Тогда*

$$E\sum_{i=0}^{\nu}\xi_i=\sum_{k=1}^{\infty}P\{\nu\geq k\}E\xi_k.$$

Для рассматриваемого $\nu(t)+1$ — момент остановки, т. е. случайная величина, не зависящая от будущего. Поэтому заключаем, что

$$E\sum_{i=0}^{\nu(t)}\xi_i=E\sum_{i=0}^{\nu(t)+1}\xi_{i-1}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{\nu(t)+1\geq k\}E\xi_{k-1}=H(t)+1.$$

Итак, при $\nu(t/\theta)\geq\alpha t/\theta$ можно написать цепочку оценок

$$\eta + H\left(\frac{t}{\theta}\right) \ge \min\left(H\left(\frac{t}{\theta}\right), \nu\left(\frac{t}{\theta}\right)\right) \ge \min\left(H\left(\frac{t}{\theta}\right), \frac{\alpha t}{\theta}\right) \ge \frac{\alpha t}{\theta}.$$

С учетом соотношения $-\ln(1-\theta) \le \theta/(1-\theta)$ оценим A:

$$A \le \frac{\ln^2(1-\theta)}{2} E\left\{\nu^2(1-\theta)^{\alpha t/\theta} I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) \ge \frac{\alpha t}{\theta}\right\}\right\} \le \frac{\theta^2}{2(1-\theta)^2} e^{-\alpha t} D\left(\frac{t}{\theta}\right). \tag{5}$$

Теперь оценим B:

$$B = E\left|\left[(1-\theta)^{\nu(t/\theta)} - (1-\theta)^{H(t/\theta)} - \ln(1-\theta)\left(\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - H\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)(1-\theta)^{H(t/\theta)}\right] I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\}\right| \le$$

$$\le E\left|\left[(1-\theta)^{\nu(t/\theta)} - (1-\theta)^{H(t/\theta)}\right] I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\}\right| +$$

$$+ (-\ln(1-\theta))(1-\theta)^{H(t/\theta)} E\left|\left[H\left(\frac{t}{\theta}\right) - \nu\left(\frac{t}{\theta}\right)\right] I\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\}\right|.$$

Так как для $\nu(t/\theta) < \alpha t/\theta$ выполняется

$$\left|H\left(\frac{t}{\theta}\right) - \nu\left(\frac{t}{\theta}\right)\right| \le H\left(\frac{t}{\theta}\right),$$

то, используя неравенство

$$\exp(-x) < \frac{r!}{x^r} \tag{6}$$

для $r = 1$, можем оценить B:

$$B \le EI\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\} + (-\ln(1-\theta))(1-\theta)^{H(t/\theta)} H\left(\frac{t}{\theta}\right) EI\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\}\left(1 + (-\ln(1-\theta)) H\left(\frac{t}{\theta}\right)\exp\left(\ln(1-\theta) H\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)\right) <$$

$$< 2P\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta}\right\}. \tag{7}$$

Подставляя (5) и (7) в (3), получаем (2).

Теперь рассмотрим применение теоремы 1 к случаю, когда $\{\xi_i\}$ — последовательность ограниченных случайных величин. Сначала докажем лемму, позволяющую оценить первые два момента „считающего" процесса при некотором условии „старения", налагаемом на $\{\xi_i\}$.

Лемма. *Предположим, что последовательность $\{\xi_i\}$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{i,x\ge 0} E(\xi_i - x / \xi_i > x) = \sup_{i,x\ge 0} \frac{1}{\overline{G}_i(x)} \int_x^\infty \overline{G}_i(v)\,dv \le a < \infty, \tag{8}$$

где $a \ge 1$ — некоторая константа, $\overline{G}_i(x) = P\{\xi_i \ge x\}$. Тогда для математического ожидания и дисперсии „считающего" процесса $\nu(t)$, задаваемого (1), выполняются оценки

1) $t - 1 \le H(t) \le t + a$;

2) $D(t) \le t(4a+3) + 2a^2 + 3a - 1$.

Доказательство. Проанализируем более тщательно соотношение (4). Вычислив математическое ожидание от левой и правой частей (4) и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем

$$H(t) + 1 = t + E\zeta_t. \tag{9}$$

Оценим сверху $E\zeta_t$:

$$E\zeta_t = \int_0^\infty P\{\zeta_t \geq u\}\,du = \int_0^\infty P\left\{\sum_{i=0}^{\nu(t)} \xi_i - t \geq u \,/\, \sum_{i=0}^{\nu(t)} \xi_i > t\right\}du =$$

$$= \int_0^\infty P\left\{\xi_{\nu(t)} \geq u + \left(t - \sum_{i=0}^{\nu(t)-1} \xi_i\right) / \, \xi_{\nu(t)} > t - \sum_{i=0}^{\nu(t)-1} \xi_i\right\}du.$$

Вследствие того, что $\xi_{\nu(t)}$ и $\sum_{i=0}^{\nu(t)-1} \xi_i$ независимы, получаем

$$E\zeta_t \leq \int_0^\infty \sup_{i,x\geq 0} P\{\xi_i \geq u + x / \xi_i > x\}\,du \leq a.$$

Из оценок для $E\zeta_t$ и (9) вытекает утверждение 1 леммы.

Докажем теперь оценку для дисперсии $\nu(t)$. Для удобства введем следующие обозначения:

$$S_i = \sum_{j=0}^{i-1} \xi_j, \quad S_i^{[j]} = \sum_{n=j+1}^{j+i} \xi_n.$$

Тогда

$$E\nu^2(t) = E\left(\sum_{i=1}^\infty I\{S_i < t\}\right)^2 =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^\infty I\{S_i < t\} + 2\sum_{j=1}^\infty \sum_{j=1}^{i} I\{(S_j < t) \cap (S_i < t)\}\right) =$$

$$= H(t) + 2E\sum_{i=1}^\infty iI\{S_i < t\} = H(t) + 2\sum_{i=1}^\infty iP\{S_i < t\}. \tag{10}$$

Рассмотрим второе слагаемое в сумме:

$$S = \sum_{i=1}^\infty iP\{S_i < t\} = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^{i} P\{S_i < t\} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=j}^\infty P\{S_i < t\} =$$

$$= H(t) + \sum_{j=2}^\infty \sum_{i=j}^\infty P\{S_i < t\} = H(t) + \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=j}^\infty P\{S_i < t\} =$$

$$= H(t) + \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty P\{S_{i+j} < t\} = H(t) + \sum_{j=1}^\infty \int_0^t \sum_{i=1}^\infty P\{S_i^{[j]} < t - u\}\,dP\{S_j < u\} =$$

$$= H(t) + \sum_{j=1}^\infty \int_0^t E\nu^{[j]}(t-u)\,dP\{S_j < u\},$$

где $\nu^{[j]}(t)$ — „считающий" процесс, задаваемый последовательностью $\{\xi_i, i \geq$

$\geq j+1\}$. Но эта последовательность тоже удовлетворяет условию (8). Следовательно, для процесса $\nu^{[j]}(t)$ выполняется оценка 1 леммы:

$$S \leq H(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (t-u+a)\,dP\{S_j < u\} =$$

$$= H(t) + \int_0^t (t-u+a)\,dH(u) \leq \frac{t^2}{2} + t(2a+1) + a^2 + a. \qquad (11)$$

Теперь, учитывая соотношения (10), (11) и оценки для $H(t)$, оценим дисперсию $\nu(t)$:

$$D(t) = E\nu^2(t) - H^2(t) \leq t + a + 2\left(\frac{t^2}{2} + t(2a+1) + a^2 + a\right) - (t-1)^2 =$$

$$= t(4a+3) + 2a^2 + 3a - 1.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $0 < \xi_i < a < \infty$ *для некоторой константы* $a > 1$ *и всех* $i \geq 0$. *Тогда для* $t > \max(\theta a, \theta a/(a-1))$ *справедливо неравенство*

$$|P\{\theta\tau > t\} - (1-\theta)^{H(t/\theta)}| \leq \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} e^{-t/a}((4a+3)t + (2a^2+3a-1)\theta). \quad (12)$$

Доказательство. Используем теорему 1 в несколько модифицированном виде. Пусть $\alpha t/\theta \geq 1$. Если в неравенстве (3) события $\nu(t/\theta) \gtrless \alpha t/\theta$ заменить на события $\nu(t/\theta) \gtrless \alpha t/\theta - 1$ и провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, то получим

$$|P\{\theta\tau > t\} - (1-\theta)^{H(t/\theta)}| \leq \frac{\theta^2}{2(1-\theta)^3} e^{-\alpha t} D\left(\frac{t}{\theta}\right) + 2P\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{\alpha t}{\theta} - 1\right\}. \quad (13)$$

Подставим $\alpha = 1/a$ в (13) и рассмотрим второе слагаемое:

$$P\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{t}{a\theta} - 1\right\} = P\left\{\sum_{i=0}^{[t/(a\theta)]-1} \xi_i \geq \frac{t}{\theta}\right\}.$$

Но

$$\sum_{i=0}^{[t/(a\theta)]-1} \xi_i < \left[\frac{t}{a\theta}\right] a \leq \frac{t}{\theta}.$$

Следовательно,

$$P\left\{\nu\left(\frac{t}{\theta}\right) < \frac{t}{a\theta} - 1\right\} = 0.$$

Теперь заметим, что для $\{\xi_i\}$ выполняется условие (8):

$$\sup_{i,x\geq 0} E(\xi_i - x/\xi_i > x) \leq a.$$

Применяя лемму, получаем (12).

Замечание. В условиях следствия справедлива равномерная оценка

$$|P\{\theta\tau > t\} - (1-\theta)^{H(t/\theta)}| \leq \frac{\theta}{2(1-\theta)^3}(6a^2 + 6a - 1),$$

которая вытекает из неравенства (12) с использованием оценки (6).

Как известно, исследование сумм случайного числа случайных величин тесно связано с задачей сходимости редеющих потоков. Оказывается, использование условия (8), налагаемого на последовательность $\{\xi_i\}$, может привести к получению эффективных оценок в этой области.

Пусть поток, задаваемый $\nu(t)$, подлежит разрежению: каждая точка потока остается в нем с вероятностью θ и отбрасывается с вероятностью $1-\theta$. В результате такого разрежения расстояние между соседними точками потока представляет собой сумму геометрического числа случайных величин. Обозначим разреженный поток через $\nu_\theta(t)$.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{\xi_i, i \geq 0\}$ *удовлетворяет условию* (8). *Тогда разреженный поток* $\nu_\theta(t/\theta)$ *сходится к процессу Пуассона при* $\theta \to 0$, *и справедлива оценка*

$$\left| P\left\{ \nu_\theta\left(\frac{t}{\theta}\right) = n \right\} - \exp(-t)\frac{t^n}{n!} \right| \leq \theta\left((4a+4)t + a + (2a^2+4a-1)\theta\right) \quad (14)$$

для всех $n \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим левую часть (14):

$$\left| P\left\{ \nu_\theta\left(\frac{t}{\theta}\right) = n \right\} - \exp(-t)\frac{t^n}{n!} \right| \leq A + B, \quad (15)$$

где

$$A = \left| P\left\{ \nu_\theta\left(\frac{t}{\theta}\right) = n \right\} - \exp\left(-\theta H\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)\frac{(\theta H(t/\theta))^n}{n!} \right|,$$

$$B = \left| \exp\left(-\theta H\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)\frac{(\theta H(t/\theta))^n}{n!} - \exp(-t)\frac{t^n}{n!} \right|.$$

В [6] получена оценка сближения процесса $\nu_\theta(t/\theta)$ с процессом Пуассона вида

$$\left| P\left\{ \nu_\theta\left(\frac{t}{\theta}\right) = n \right\} - \exp\left(-\theta H\left(\frac{t}{\theta}\right)\right)\frac{(\theta H(t/\theta))^n}{n!} \right| \leq \theta^2 H\left(\frac{t}{\theta}\right) + \theta^2 D\left(\frac{t}{\theta}\right). \quad (16)$$

Учитывая (16) и соотношения леммы, оцениваем A:

$$A \leq \theta\left((4a+4)t + (2a^2+4a-1)\theta\right).$$

Для функции $f(x) = e^{-x}x^n/n!$ выполняется условие $|f'(x)| \leq 1$, поэтому

$$B \leq |\theta H(t/\theta) - t| \leq \theta a.$$

Подставляя оценки A и B в (15), получаем утверждение теоремы 3.

1. *Картанов Н. В.* Неравенства в теореме Реньи // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – **45**. – С. 27–33.
2. *Kalashnikov V. V.* Upper and lower bounds for geometric convolution // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – **36**, № 4. – С. 790–791.
3. *Kalashnikov V. V.* Analytical and simulation estimates of reliability for regenerative models // Sist. Anal. Model. Simul. – 1989. – **6**, № 11/12. – P. 833–851.
4. *Сугакова О. В.* Оцінки з вагою для характеризації асимптотики сум незалежних випадкових величин // Теорія імовірностей і мат. статистика. – 1993. – **48**. – С. 185–190.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
6. *Сугакова Е. В.* Оценка скорости сходимости редеющего потока к процессу Пуассона // Кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 128–131.

Получено 14.10.94