УДК 519.21

А. М. Братійчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ $M^{\theta}/G/1/b$ З ВІДНОВЛЮЮЧИМ РІВНЕМ ВХІДНОГО ПОТОКУ

A finite capacity queueing system of the type $M^{\theta}/G/1/b$ is considered in which the input flow is regulated by some threshold level. Asymptotic properties of the first busy period and the number of customers served for this period are studied.

Рассматривается система обслуживания типа $M^{\theta}/G/1/b$, в которой входящий поток регулируется с помощью некоторого порогового уровня. Исследуются асимптотические свойства первого периода занятости и числа требований, обслуженных за этот период.

1. Вступ. Розглянемо систему типу $M^{\theta}/G/1/b$, яку формально можна описати таким чином. Нехай задано послідовності випадкових величин $\{\tau_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$, $n \ge 1$, які репрезентують час між надходженням груп вимог до системи, розмір груп та час обслуговування замовлення відповідно. В момент часу $\sum_{i=1}^{n}\tau_i$ до системи надходить n-та група замовлень, яка містить θ_n вимог. Величина β_n — час обслуговування n-ї вимоги і дисципліна обслуговування має тип FCFS (перший прийшов — перший обслужився). Всі наведені вище випадкові величини є незалежними з однаковим розподілом для кожної послідовності і $\mathrm{P}\{\tau_n > x\} = e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Кількість вимог, які можуть знаходитись у системі, обмежена деяким натуральним числом $b < \infty$. Отже, якщо чергова група вимог об'єму θ_n надходить до системи, де вже є k вимог, то лише $\min\{b-k, \theta_n\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачається. Процес надходження вимог має особливість, яка полягає в тому, що якщо кількість вимог у системі досягла рівня b, то їх надходження блокується і відновлюється знову лише тоді, коли їх загальна кількість у системі зменшиться до деякого рівня $a \in [1, b-1]$. Необхідність розгляду таких систем можна пояснити тим фактом, що у випадку обмежень на довжину черги деякі вимоги будуть втрачатись, і бажано кількість втрачених вимог скоротити, користуючись таким правилом: краще заздалегідь попередити про переповнення системи, ніж втратити вимогу. Для цього і вводиться відновлюючий рівень. Наскільки відомо автору, таку ідею було вперше запропоновано в [1] (у випадку, коли вимоги надходять по одній), а в [2] наведено формули для ергодичного розподілу довжини черги в такій системі. В [3] запропоновано інший підхід, який базується на методі потенціалу Королюка [4] і фактично не розрізнює системи з індивідуальним чи груповим впливом вимог.

Наведемо позначення, які будемо використовувати у подальшому. Позначимо

$$\mathrm{P}\{\beta_i \le x\} = F(x), \qquad \mathrm{P}\{\theta_i = k\} = a_k, \qquad x \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dF(x), \qquad a(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k a_k, \qquad \operatorname{Re} s \ge 0, \quad |z| \le 1,$$

$$m_i = \int_0^{\infty} x^i\, dF(x), \qquad \alpha_i = \sum_{k=1}^{\infty} k^i a_k, \quad i \ge 1.$$

Нехай $\xi(t)$, $t \ge 0$, позначає число вимог у системі в момент часу t; символ M_n — умовне математичне сподівання при умові, що $\xi(0) = n \ge 0$; $F^{k^*}(x)$ та

$a_i^{k^*}$ — k-кратні згортки розподілів $F(x)$ та $\{a_k\}$ самих із собою. Позначимо також через $\tau = \tau_b = \inf\{t \ge 0;\ \xi(t) = 0\}$ перший період зайнятості, через $N(\tau) = N(\tau_b)$ кількість вимог, які було обслужено за період зайнятості.

Нехай

$$p_l(s) \equiv f^{-1}(s) \sum_{i=0}^{l+1} a_{l+1}^{i^*} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} dF(x), \quad k = -1, 0, 1, \ldots .$$

Оскільки $p_i(s) > 0$, $s > 0$, і $\sum_{i=-1}^{\infty} p_i(s) = 1$, то числа $p_i(s)$, $i \ge -1$, можемо інтерпретувати як розподіл скачків деякого блукання, неперервного знизу, і якщо $a(s,z) = s + \lambda(1 - \alpha(z))$, то неважко переконатись, що

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i(s) = \frac{f(a(s,z))}{z f(s)}, \quad |z| \le 1.$$

Означимо послідовність $R_k(s,\theta)$, $s > 0$, $|\theta| \le 1$, таким чином:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s,\theta) = \frac{z}{\theta f(a(s,z)) - z}, \quad |z| \le \nu_-(s), \tag{1}$$

де $\nu_-(s)$ — єдиний корінь рівняння

$$\theta f(a(s,z)) - z = 0, \quad 0 < z < 1, \tag{2}$$

на інтервалі $[0,1]$. Позначимо також

$$Q_n(s,\theta) = \sum_{k=0}^{n-2} R_{n-k-1}(s,\theta)\, d_k(s,\theta),$$

$$d_k(s,\theta) = 1 - \theta f(s) \sum_{i=-1}^{k-1} p_i(s), \qquad \bar{p}_n(s) = \sum_{i=n}^{\infty} p_i(s). \tag{3}$$

2. Перший період зайнятості та число вимог, обслужених на цьому періоді. Позначимо

$$\phi(n) \equiv \phi(n,s,\theta) = M_n e^{-s\tau} \theta^{N(\tau)}, \quad \operatorname{Re} s \ge 0, \quad |\theta| \le 1, \quad 0 \le n \le b.$$

Означимо визначник

$$\Delta(s,\theta) = \begin{vmatrix} 1 + (\theta f(s))^{b-a} \sum\limits_{i=a+1}^{b-1} R_{i-a}(s,\theta)\, \bar{p}_{b-i-1}(s) & -1 - Q_{b-a}(s,\theta) \\ -(\theta f(s))^{b-a} \sum\limits_{i=1}^{b-1} R_i(s,\theta)\, \bar{p}_{b-i-1}(s) & 1 + Q_b(s,\theta) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для довільних* $1 \le n \le b-1$ *та* $s > 0$, $|\theta| \le 1$ *має місце зображення*

$$M_n e^{-s\tau} \theta^{N(\tau)} = \frac{(1 + Q_{b-n}(s,\theta)) \left(1 + (\theta f(s))^{b-a} \sum\limits_{i=a+1}^{b-1} R_{i-a}(s,\theta)\, \bar{p}_{b-i-1}(s) \right)}{\Delta(s,\theta)} -$$

$$- \frac{(\theta f(s))^{b-a} (1 + Q_{b-a}(s,\theta)) \sum\limits_{i=n+1}^{b-1} R_{i-n}(s,\theta)\, \bar{p}_{b-i-1}(s)}{\Delta(s,\theta)}.$$

Доведення. Використовуючи формулу повної ймовірності, неважко отримати рівняння

$$\varphi(n) - \theta f(s) \sum_{i=-1}^{b-n-2} p_i(s)\varphi(n+i) = (\theta f(s))^{b-a} \bar{p}_{b-n-1}(s)\varphi(a), \quad 1 \le n \le b-1,$$

з граничною умовою $\varphi(0) = 1$.

Використовуючи результати з [3], маємо

$$\phi(n) = (1 + Q_{b-n}(s,\theta))\phi(b-1) - (\theta f(s))^{b-a-1}\phi(a) \sum_{i=n+1}^{b-1} R_{i-n}(s,\theta)\bar{p}_{b-i-1}(s). \quad (5)$$

Поклавши в (5) $n = a$, отримаємо перше рівняння для $\phi(a)$ та $\phi(b-1)$:

$$\phi(a)\left(1 + (\theta f(s))^{b-a} \sum_{i=a+1}^{b-1} R_{i-a}(s,\theta)\bar{p}_{b-i-1}(s)\right) - (1 + Q_{b-a}(s,\theta))\phi(b-1) = 0.$$

З граничної умови $\varphi(0) = 1$ одержуємо друге рівняння

$$-\phi(a)(\theta f(s))^{b-a} \sum_{i=1}^{b-1} R_i(s,\theta)\bar{p}_{b-i-1}(s) + (1 + Q_b(s,\theta))\phi(b-1) = 1.$$

Отже, для $\phi(a)$ та $\phi(b-1)$ маємо систему лінійних рівнянь

$$\phi(a)\left(1 + (\theta f(s))^{b-a} \sum_{i=a+1}^{b-1} R_{i-a}(s,\theta)\bar{p}_{b-i-1}(s)\right) - (1 + Q_{b-a}(s,\theta))\phi(b-1) = 0,$$

$$-\phi(a)(\theta f(s))^{b-a} \sum_{i=1}^{b-1} R_i(s,\theta)\bar{p}_{b-i-1}(s) + (1 + Q_b(s,\theta))\phi(b-1) = 1.$$

Розв'язуючи цю систему та підставляючи розв'язки в (5), завершуємо доведення теореми.

3. Граничні теореми. Позначимо $\rho = \lambda m_1 \alpha_1$. Наступна умова накладає певні обмеження на розподіли a_i, $i \ge 1$, та $F(x)$.

A. Нехай $z_0 = \sup\{z > 0 : f(\lambda(1 - a(z)) < \infty\} > 1$ і якщо $\rho < 1$, то $f(\lambda(1 - a(z_0 - 0)) - z_0 > 0$.

Наслідком умови **A** є те, що рівняння (2) має на інтервалі $[0, z_0)$ лише два корені $0 < \nu_-(s,\theta) < 1 < \nu_+(s,\theta) < z_0$ для всіх $0 < s < \delta$, $1 - \delta < \theta < 1$ з деяким достатньо малим $\delta > 0$. Неважко зрозуміти, що

$$\nu_+(s,\theta) \xrightarrow[s\to 0,\ \theta\to 1]{} \begin{cases} \nu_+ \in (1, z_0], & \rho < 1, \\ 1, & \rho > 1, \end{cases}$$

$$\nu_-(s,\theta) \xrightarrow[s\to 0,\ \theta\to 1]{} \begin{cases} \nu_- < 1, & \rho > 1, \\ 1, & \rho < 1, \end{cases}$$

$$\nu_\pm(s,\theta) \xrightarrow[s\to 0,\ \theta\to 1]{} 1, \quad \rho = 1,$$

де $\nu_\pm$ — корені рівняння $f(\lambda(1 - a(z)) - z = 0$, які відмінні від 1.

Далі нам буде потрібна більш докладна характеристика поведінки функцій $\nu_\pm(s,\theta)$ при $s \to 0$, $\theta \to 1$. Ці результати подамо у вигляді окремої леми, доведення якої легко випливає з теореми про неяву функцію [5].

Лема 1. *Нехай* $s \to 0$ *і* $\theta = \theta(s) \xrightarrow[s\to 0]{} 1$, *де* $\theta(s)$ — *деяка функція, яка є регулярною в околі точки* $s = 0$. *Тоді*:

1) *якщо* $\rho > 1$, *то*

$$\nu_-(s,\theta) = \nu_- + \frac{\theta'(0)\nu_- + f'(\lambda(1 - a(\nu_-)))}{1 + \lambda a'(\nu_-)) f'(\lambda(1 - a(\nu_-)))} s + o(s),$$

$$\nu_+(s,\theta) \;=\; 1 - \frac{m_1 - \theta'(0)}{1-\rho}s + o(s);$$

2) *якщо* $\rho < 1$, *то*

$$\nu_+(s,\theta) \;=\; \nu_+ + \frac{\theta'(0)\nu_+ + f'(\lambda(1-a(\nu_+)))}{1+\lambda a'(\nu_+))f'(\lambda(1-a(\nu_+)))}s + o(s),$$

$$\nu_-(s,\theta) \;=\; 1 - \frac{m_1 - \theta'(0)}{1-\rho}s + o(s);$$

3) *якщо* $\rho = 1$, *то*

$$\nu_\pm(s,\theta(s)) \;=\; 1 \pm \sqrt{\frac{2(m_1 - \theta'(0))s}{m_2\lambda\alpha_1 + (\lambda\alpha_1)^2 m_2}} + o(\sqrt{s}).$$

Позначимо

$$\alpha_\pm(s,\theta) \;=\; \frac{\theta'(0)\nu_+ + f'(\lambda(1-a(\nu_+)))}{1+\lambda\theta a'(\nu_\pm(s,\theta))f'(a(s,\nu_\pm(s,\theta)))}, \qquad \beta_\pm(s,\theta) \;=\; \frac{\theta f(s) + \nu_\pm(s,\theta)}{f(s)\theta(1-\nu_\pm(s,\theta))}.$$

Далі ε, δ будуть позначати додатні малі числа, які можуть бути різними в різних співвідношеннях.

Лема 2. *Для всіх* $|s| < \delta$ *та* $|1-\theta| < \delta$ *мають місце асимптотичні співвідношення*

$$Q_n(s,\theta) \;=\; -1 + \alpha_+(s,\theta)\nu_+^{-n+1}(s,\theta) + \alpha_-(s,\theta)\nu_-^{-n+1}(s,\theta) + o((z_0-\varepsilon)^{-n}), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(s,\theta)\bar{p}_{n-i} \;=\; \beta_+(s,\theta)\alpha_+(s,\theta)\nu_+^{-n}(s,\theta) + \beta_-(s,\theta)\alpha_-(s,\theta)\nu_-^{-n}(s,\theta) + o((z_0-\varepsilon)^{-n}), \tag{7}$$

причому оцінки $o(\cdot)$ *є рівномірними по* s *та* θ.

Доведення. Для достатньо малих $|z|$ з означення функції $Q_n(s,\theta)$ (формула (3)) та співвідношення (1) маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n Q_n(s,\theta) \;=\; \frac{z(1-\theta f(a(s,z)))}{(\theta f(a(s,z)) - z)(1-z)}. \tag{8}$$

Оскільки для $0 < |s| < \delta$, $0 < |1-\theta| < \delta$ функція в правій частині (8) має прості полюси в області $|z| < z_0$ в точках $z = 1$, $z = \nu_\pm(s,\theta)$, то в цій області виконується рівність

$$\frac{z(1-\theta f(a(s,z)))}{(\theta f(a(s,z)) - z)(1-z)} \;=$$

$$= -\frac{1}{1-z} + \frac{\alpha_+(s,\theta)\nu_+(s,\theta)}{\nu_+(s,\theta)-z} + \frac{\alpha_-(s,\theta)\nu_-(s,\theta)}{\nu_-(s,\theta)-z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \hat{Q}_n(s,\theta), \tag{9}$$

за винятком точок $z = 1$, $z = \nu_\pm(s,\theta)$, причому для функції $\hat{Q}_n(s,\theta)$ справедливою є оцінка

$$\hat{Q}_n(s,\theta) \;=\; o((z_0-\varepsilon)^{-n}), \tag{10}$$

рівномірна по s та θ. Отже, з (8), (9) маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n Q_n(s,\theta) \;=\; -\frac{1}{1-z} + \frac{\alpha_+(s,\theta)\nu_+(s,\theta)}{\nu_+(s,\theta)-z} + \frac{\alpha_-(s,\theta)\nu_-(s,\theta)}{\nu_-(s,\theta)-z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \hat{Q}_n(s,\theta),$$

звідки з урахуванням (10) отримуємо (6). Співвідношення (7) доводиться аналогічно.

Теорема 2. *Нехай* $a = \alpha b$, $n = \beta b$, *де* $0 \le \alpha$, $\beta \le 1$.

1. *Якщо* $\rho < 1$, *то*

$$\lim_{b\to\infty} M_n e^{-s\tau/b} e^{-\mu N(\tau)/b} = e^{-\frac{sm_1+\mu}{1-\rho}(1-\beta)}. \tag{11}$$

2. *Якщо* $\rho = 1$, *то*

$$\lim_{b\to\infty} M_n e^{-s\tau/b^2} e^{-\mu N(\tau)/b^2} = \frac{sh\{q(s,\mu)(1-\beta)\} - sh\{q(s,\mu)(\alpha-\beta)\}}{sh\{q(s,\mu)\} - sh\{q(s,\mu)\alpha\}}, \tag{12}$$

де

$$q(s,\mu) = \sqrt{\frac{2(sm_1+\mu)}{m_2\lambda\alpha_1 + (\lambda\alpha_1)^2 m_2}}.$$

Доведення. Насамперед дослідимо асимптотичні властивості визначника $\Delta(s,\theta)$ з (4). Очевидно, що

$$\Delta(s,\theta) = 1 + Q_b(s,\theta) + (\theta f(s))^{b-a}\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=a+1}^{b-1} R_{i-a}(s,\theta)\,\bar{p}_{b-i-1}(s) & -1 - Q_{b-a}(s,\theta) \\ -\sum\limits_{i=1}^{b-1} R_i(s,\theta)\,\bar{p}_{b-i-1}(s) & 1 + Q_b(s,\theta) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

У подальшому для зручності не будемо писати в позначеннях функцій $\alpha_\pm(s,\theta)$, $\beta_\pm(s,\theta)$, $\nu_\pm(s,\theta)$ аргументів s, θ. Означимо наступні визначники:

$$\Delta_0(s,\theta) = \begin{vmatrix} \alpha_+\beta_+\nu_+^{a+1-b} + \alpha_-\beta_-\nu_-^{a+1-b} & -\alpha_+\nu_+^{a+1-b} + \alpha_-\nu_-^{a+1-b} \\ -\alpha_+\beta_+\nu_+^{1-b} - \alpha_-\beta_-\nu_-^{1-b} & \alpha_+\nu_+^{1-b} + \alpha_-\nu_-^{1-b} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(s,\theta) = \begin{vmatrix} o((z_0-\varepsilon)^{a-b}) & -\alpha_+\nu_+^{a+1-b} - \alpha_-\nu_-^{a+1-b} \\ o((z_0-\varepsilon)^{-b}) & \alpha_+\nu_+^{1-b} + \alpha_-\nu_-^{1-b} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(s,\theta) = \begin{vmatrix} \alpha_+\beta_+\nu_+^{a+1-b} + \alpha_-\beta_-\nu_-^{a+1-b} & o((z_0-\varepsilon)^{a-b}) \\ -\alpha_+\beta_+\nu_+^{1-b} - \alpha_-\beta_-\nu_-^{1-b} & o((z_0-\varepsilon)^{-b}) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3(s,\theta) = \begin{vmatrix} o((z_0-\varepsilon)^{a-b}) & o((z_0-\varepsilon)^{a-b}) \\ o((z_0-\varepsilon)^{-b}) & o((z_0-\varepsilon)^{-b}) \end{vmatrix}.$$

Використовуючи лему 2, можемо переписати (13) у вигляді

$$\Delta(s,\theta) = 1 + Q_b(s,\theta) + (\theta f(s))^{b-a}\big(\Delta_0(s,\theta) + \Delta_1(s,\theta) + \Delta_2(s,\theta) + \Delta_3(s,\theta)\big).$$

За допомогою простих обчислень знаходимо

$$\Delta_0(s,\theta) = \alpha_+\alpha_-(\nu_-\nu_+)^{1-b}(\nu_+^a - \nu_-^a)(\beta_+ - \beta_-).$$

Нехай тепер $\rho < 1$. Позначимо $\hat{s} = s/b$, $\hat{\theta} = \exp\{-\mu/b\}$, $s, \mu \ge 0$. З теореми 1 маємо

$$M_{\beta b} e^{-s\tau/b} e^{-\mu N(\tau)/b} = \frac{\left(1 + Q_{b(1-\beta)}(\hat{s},\hat{\theta})\right)\left(1 + (\hat{\theta} f(\hat{s}))^{b(1-\alpha)} \sum\limits_{i=\alpha b+1}^{b-1} R_{i-\alpha b}(\hat{s},\hat{\theta})\,\bar{p}_{b-i-1}(\hat{s})\right)}{\Delta(\hat{s},\hat{\theta})} -$$

$$- \frac{(\hat{\theta} f(\hat{s}))^{b(1-\alpha)}\left(1 + Q_{b(1-\alpha)}(\hat{s},\hat{\theta})\right) \sum\limits_{i=\beta b+1}^{b-1} R_{i-\beta b}(\hat{s},\hat{\theta})\,\bar{p}_{b-i-1}(\hat{s})}{\Delta(\hat{s},\hat{\theta})}. \tag{14}$$

Оскільки $\hat{\theta} = 1 - \frac{\mu}{s}\hat{s} + o(\hat{s})$ при $\hat{s} \to 0$, то в цьому випадку $\theta'(0) = -\mu/s$, і з леми 1 отримуємо

$$\nu_-(\hat{s}, \hat{\theta}) = 1 - \frac{sm_1 + \mu}{1-\rho} b^{-1} + o(b^{-1}),$$

а отже,

$$(\nu_-(\hat{s}, \hat{\theta}))^{-b} = \left(1 - \frac{sm_1 + \mu}{(1-\rho)b} + o(b^{-1})\right)^{-b} \xrightarrow[b\to\infty]{} e^{-\frac{sm_1+\mu}{1-\rho}}. \tag{15}$$

Очевидно, що

$$(\hat{\theta} f(\hat{s}))^{b-a} =$$

$$= ((1 - \mu s^{-1} b^{-1} + o(b^{-1}))(1 - m_1 b^{-1} + o(b^{-1})))^{b(1-\alpha)} \xrightarrow[b\to\infty]{} e^{-(1-\alpha)(sm_1+\mu)}.$$

З означення визначників $\Delta_i(\hat{s}, \hat{\theta})$ випливає, що

$$\Delta_0(\hat{s}, \hat{\theta}) = O(\nu_+^{-b}), \qquad \Delta_i(\hat{s}, \hat{\theta}) = o((z_0 - \varepsilon)^{-b(1-\alpha)}), \quad i = 1, 2, 3.$$

З (6) та (15) знаходимо

$$1 + Q_b(\hat{s}, \hat{\theta}) \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{1}{1-\rho} e^{\frac{sm_1+\mu}{1-\rho}}, \quad 1 + Q_{b-a}(\hat{s}, \hat{\theta}) \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{1}{1-\rho} e^{\frac{sm_1+\mu}{1-\rho}(1-\alpha)},$$
$$1 + Q_{b-n}(\hat{s}, \hat{\theta}) \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{1}{1-\rho} e^{\frac{sm_1+\mu}{1-\rho}(1-\beta)}. \tag{16}$$

З цих співвідношень, а також з формули (13) маємо

$$\Delta(\hat{s}, \hat{\theta}) \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{1}{1-\rho} e^{\frac{sm_1+\mu}{1-\rho}}. \tag{17}$$

З (7) отримуємо

$$\sum_{i=\beta b+1}^{b-1} R_{i-\beta b}(\hat{s}, \hat{\theta}) \bar{p}_{\beta b - i - 1}(\hat{s}) \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{\rho}{1-\rho} e^{\frac{sm_1+\mu}{1-\rho}(1-\beta)}. \tag{18}$$

Тепер (11) випливає з (14) та (16) – (18). Доведення (12) є аналогічним.

1. *Takagi H.* Analysis of finite-capasity $M/G/1$ queue with a resume level // Performance Evaluat. – 1985. – **5**, № 3. – P. 197 – 203.
2. *Takagi H.* Queueing analysis. – Netherlands: Elsevier Sci. Publ., 1993. – Vol. 2. – 630 p.
3. *Братійчук А. М.* Система $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – № 1. – С. 12 – 18.
4. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 175 с.
5. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 471 с.

Одержано 02.04.2007