УДК 517.51

Ю. С. Лінчук (Чернів. нац. ун-т)

КОМУТАНТИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ПОВ'ЯЗАНІ З ОПЕРАТОРАМИ ЗСУВУ

Commutants of some classes of operators connected with shift operators are described in the space of entire functions.

В пространстве целых функций описаны коммутанты некоторых классов операторов, связанных с операторами сдвига.

Оператори зсуву відіграють важливу роль у сучасній математиці. Нехай h — фіксоване комплексне число. Оператор зсуву E_h лінійно та неперервно діє в просторі цілих функцій A_∞, що наділений топологією компактної збіжності, за правилом $(E_h f)(z) = f(z+h)$. В роботі [1] встановлено, що лінійний неперервний оператор $T\colon A_\infty \to A_\infty$ переставний з оператором E_h тоді і тільки тоді, коли він має вигляд

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) f^{(n)}(z),$$

де $(\psi_n(z))$ — послідовність цілих функцій, які періодичні з періодом h і задовольняють умову

$$\forall\, r < \infty: \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n! \max_{|z|\le r} |\psi_n(z)|} < \infty. \tag{1}$$

У роботі [2] досліджувався комутант оператора узагальненого зсуву в просторах аналітичних функцій. У цій статті у просторі цілих функцій будемо вивчати комутанти деяких класів операторів, що пов'язані з оператором зсуву.

Далі будемо використовувати той факт, що між лінійними неперервними операторами $T\colon A_\infty \to A_\infty$ і їхніми характеристичними функціями $t(\lambda, z) = T(e^{\lambda z})$ існує взаємно однозначна відповідність [3]. При цьому характеристична функція $t(\lambda, z)$ лінійного неперервного оператора $T\colon A_\infty \to A_\infty$ задовольняє умову:

А) $t(\lambda, z)$ є цілою по λ та z і

$$\forall r_2 < \infty \;\exists r_1 < \infty \;\exists C > 0 \;\forall \lambda \in \mathbb{C}:$$

$$\max_{|z|\le r_2} |t(\lambda, z)| \le C e^{r_1 |\lambda|}.$$

Через $\gamma_n(u)$ позначимо функції Гурвіца вигляду

$$\gamma_n(u) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|z|=(2n+1)\pi} \frac{e^{uz}-1}{e^z-1} \frac{dz}{z^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Ці функції є цілими та задовольняють співвідношення

$$\gamma_n(u+1) - \gamma_n(u) = u^n, \qquad u \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

і

$$\forall\, r < \infty: \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n! \max_{|u|\le r} |\gamma_n(u)|} < \infty \tag{3}$$

(див. [4]).

1. Нехай h та k — фіксовані ненульові комплексні числа. Опишемо у просторі цілих функцій A_∞ комутант оператора $E_h + kE_{-h}$.

Теорема 1. *Нехай h та k — фіксовані ненульові комплексні числа. Для того щоб лінійний неперервний оператор $T: A_\infty \to A_\infty$ був переставним з оператором $E_h + kE_{-h}$, необхідно і достатньо, щоб існували дві функції $g_2(\lambda, z)$ і $t_2(\lambda, z)$, які задовольняють умову* A), *періодичні по змінній z з періодом h і такі, що характеристичну функцію $t(\lambda, z)$ оператора T можна подати у вигляді*

$$t(\lambda, z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right) + t_2(\lambda, z) \right) e^{\lambda z}, \tag{4}$$

де $(\gamma_n(u))$ — послідовність функцій Гурвіца, а $(c_n(\lambda))$ — послідовність цілих функцій, які визначаються за функцією $g_2(\lambda, z)$ таким чином:

$$e^{(\ln k/h - 2\lambda)z} g_2(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) z^n.$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що лінійний неперервний оператор $T: A_\infty \to A_\infty$ переставний з оператором $E_h + kE_{-h}$, тобто виконується рівність

$$T(E_h + kE_{-h}) = (E_h + kE_{-h})T. \tag{5}$$

Подіявши рівністю (5) на функцію $e^{\lambda z}$, одержуємо, що характеристична функція $t(\lambda, z)$ оператора T задовольняє співвідношення

$$e^{\lambda h} t(\lambda, z) + k e^{-\lambda h} t(\lambda, z) = t(\lambda, z+h) + k t(\lambda, z-h). \tag{6}$$

Покладемо $t(\lambda, z) = t_1(\lambda, z) e^{\lambda z}$. Рівняння (6) для функції $t_1(\lambda, z)$ набере вигляду

$$e^{\lambda h}(t_1(\lambda, z+h) - t_1(\lambda, z)) = k e^{-\lambda h}(t_1(\lambda, z) - t_1(\lambda, z-h)). \tag{7}$$

Позначивши $t_1(\lambda, z+h) - t_1(\lambda, z) = g(\lambda, z)$, одержимо

$$e^{\lambda h} g(\lambda, z) = k e^{-\lambda h} g(\lambda, z-h). \tag{8}$$

Покладемо $g(\lambda, z) = g_1(\lambda, z) e^{-2\lambda z}$. Тоді рівняння (8) набере вигляду $g_1(\lambda, z) = k g_1(\lambda, z-h)$, або

$$g_1(\lambda, z+h) = k g_1(\lambda, z), \quad \lambda, z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Позначимо $g_1(\lambda, z) = e^{(\ln k/h)z} g_2(\lambda, z)$. Тоді з (9) випливає

$$g_2(\lambda, z+h) = g_2(\lambda, z). \tag{10}$$

Оскільки функція $t(\lambda, z)$ задовольняє умову A), то послідовно одержуємо, що кожна з функцій $t_1(\lambda, z)$, $g(\lambda, z)$, $g_1(\lambda, z)$ і $g_2(\lambda, z)$ також задовольняє умову A).

Таким чином, якщо оператор $T: A_\infty \to A_\infty$ задовольняє співвідношення (5), то його характеристичну функцію $t(\lambda, z)$ можна подати у вигляді $t(\lambda, z) = t_1(\lambda, z) e^{\lambda z}$, де $t_1(\lambda, z)$ задовольняє рівняння

$$t_1(\lambda, z+h) - t_1(\lambda, z) = e^{(\ln k/h - 2\lambda)z} g_2(\lambda, z), \tag{11}$$

а функція $g_2(\lambda, z)$ є цілою по λ і z та періодичною з періодом h по змінній z. При цьому обидві функції $t_1(\lambda, z)$, $g_2(\lambda, z)$ задовольняють умову A).

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (11). Запишемо праву частину рівняння (11) у вигляді

$$e^{(\ln k/h-2\lambda)z}\, g_2(\lambda, z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) z^n .$$

Тоді функція $\tilde{t}_1(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)$ є частинним розв'язком рівняння (11), оскільки для функцій Гурвіца $\gamma_n(z)$ виконуються співвідношення (2). Покажемо, що побудована функція $\tilde{t}_1(\lambda, z)$ задовольняє умову A).

Зафіксуємо довільне $r_2 < \infty$. З умови (3) випливає, що існують числа $\rho < < \infty$ та $C > 0$ такі, що при $n \geq 0$

$$\max_{|z|\leq r_2} \left|\gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)\right| \;\leq\; C\rho^n. \tag{12}$$

Виберемо $r_2' > \rho|h|$. Тоді, згідно з умовою A), для функції $G(\lambda, z) = = e^{(\ln k/h-2\lambda)z}\, g_2(\lambda, z)$ існують сталі $C_1 > 0$ і $r_1' < \infty$ такі, що

$$\forall\lambda\in\mathbb{C}: \quad \max_{|z|\leq r_2'} |G(\lambda, z)| \;\leq\; C_1 e^{r_1'|\lambda|}.$$

За нерівностями Коші для коефіцієнтів розкладу аналітичних функцій у степеневі ряди одержимо, що для кожного $\lambda\in\mathbb{C}$ і $n \geq 0$

$$|c_n(\lambda)| \;\leq\; \frac{\max\limits_{|z|\leq r_2'} |G(\lambda, z)|}{(r_2')^n} \;\leq\; \frac{C_1 e^{r_1'|\lambda|}}{(r_2')^n}.$$

Тому для кожного $\lambda\in\mathbb{C}$

$$\max_{|z|\leq r_2} \left|\tilde{t}(\lambda, z)\right| \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\lambda)|\,|h|^n \max_{|z|\leq r_2}\left|\gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)\right| \;\leq\; CC_1 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|h|}{(r_2')}\rho\right)^n e^{r_1'|\lambda|} \;=\; C_2 e^{r_1'|\lambda|}.$$

З наведених оцінок за теоремою Вейєрштрасса про ряди аналітичних функцій випливає, що функція $\tilde{t}(\lambda, z)$ є цілою по λ і z та задовольняє умову

$$\forall r_2 < \infty \;\; \exists r_1' < \infty \;\; \exists C_2 > 0 \;\; \forall\lambda\in\mathbb{C}:$$

$$\max_{|z|\leq r_2}\left|\tilde{t}(\lambda, z)\right| \;\leq\; C_2 e^{r_1'|\lambda|}.$$

Отже, для функції $\tilde{t}(\lambda, z)$ виконується умова A).

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (11) у класі функцій $t_1(\lambda, z)$, що задовольняють умову A), дається формулою

$$t_1(\lambda, z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right) + t_2(\lambda, z),$$

де $t_2(\lambda, z)$ — функція, що задовольняє умову A) і є періодичною з періодом h по змінній z. Необхідність умов теореми доведено.

Достатність. Нехай функції $g_2(\lambda, z)$ і $t_2(\lambda, z)$ задовольняють умови теореми 1 і $t(\lambda, z)$ подається у вигляді (4). Тоді, як було встановлено при доведенні необхідності умов теореми, функція $t(\lambda, z)$ задовольняє умову A). Нехай T — лінійний неперервний оператор, $T: A_\infty \to A_\infty$, для якого функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною. Покажемо, що T задовольняє рівність (5). Для цього досить перевірити, що функція

$$t_1(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right) + t_2(\lambda, z)$$

є розв'язком рівняння (7). Для довільних $\lambda, z \in \mathbb{C}$ маємо

$$e^{\lambda h}(t_1(\lambda, z+h) - t_1(\lambda, z)) = e^{\lambda h} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) h^n \left(\gamma_n\left(\frac{z+h}{h}\right) - \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)\right) =$$

$$= e^{\lambda h} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) h^n \left(\frac{z}{h}\right)^n = e^{\lambda h} e^{(\ln k/h - 2\lambda)z} g_2(\lambda, z).$$

З іншого боку,

$$ke^{-\lambda h}(t_1(\lambda, z) - t_1(\lambda, z-h)) = ke^{-\lambda h} e^{(\ln k/h - 2\lambda)(z-h)} g_2(\lambda, z-h) =$$

$$= ke^{-\ln k} e^{\lambda h} e^{(\ln k/h - 2\lambda)z} g_2(\lambda, z) = e^{\lambda h} e^{(\ln k/h - 2\lambda)z} g_2(\lambda, z).$$

Таким чином, T задовольняє рівність (5).

2. Наведемо зображення розв'язків операторного рівняння (5) в явному вигляді.

Теорема 2. *Нехай h і k — фіксовані ненульові комплексні числа. Для того щоб оператор T лінійно і неперервно діяв у просторі A_∞ і був переставним з оператором $E_h + kE_{-h}$, необхідно і достатньо, щоб він мав вигляд*

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)\left(c_n\left(\frac{d}{dz}\right)f\right)(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) f^{(n)}(z), \tag{13}$$

де $(\psi_n(z))$ — послідовність цілих функцій, періодичних з періодом h, які задовольняють умову (1), *а $(c_n(\lambda))$ — послідовність цілих функцій експоненціального типу, для яких функція*

$$g_2(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) z^n e^{(2\lambda - \ln k/h)z}$$

задовольняє умову А) *і є періодичною по z з періодом h.*

Доведення. За теоремою 1 оператор $T: A_\infty \to A_\infty$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ є переставним з оператором $E_h + kE_{-h}$ тоді і тільки тоді, коли функція $t(\lambda, z)$ має вигляд (4). Відновимо оператор T за його характеристичною функцією $t(\lambda, z)$. При доведенні теореми 1 було встановлено, що послідовність цілих функцій $c_n(\lambda)$ задовольняє умову:

$$\forall r_2' < \infty \ \exists r_1' < \infty \ \exists C_1 > 0 \ \forall n \ge 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C}:$$

$$|c_n(\lambda)| \le \frac{C_1 e^{r_1'|\lambda|}}{(r_2')^n}. \tag{14}$$

З (14) випливає, що кожна з функцій $c_n(\lambda)$ є цілою функцією експоненціального типу [5]. Тому для кожного $n \ge 0$ формулою $(c_n(D)f)(z)$, де $D = \dfrac{d}{dz}$, визначається диференціальний оператор нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами, який лінійно і неперервно діє у просторі A_∞ [3].

Доведемо далі, що формулою $(T_1 f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)(c_n(D)f)(z)$ визначається лінійний неперервний оператор T_1, який діє у просторі A_∞. Зафіксуємо $r_2 < \infty$ і знайдені для нього $C > 0$ та $\rho < \infty$ згідно з умовою (12). Візьмемо далі $r_2' > |h|\rho$, і нехай r_1' і $C_1 > 0$ вибрані для цього r_2' згідно з умовою (14). Розкладемо функцію $c_n(\lambda)$ в степеневий ряд: $c_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} \lambda^k$ і оцінимо коефіцієнти цього розкладу. Для довільного s, $0 < s < \infty$, за нерівностями Коші з використанням (14) маємо

$$\left|c_k^{(n)}\right| \le \frac{\max\limits_{|\lambda|=s} |c_n(\lambda)|}{s^k} \le \frac{C_1 e^{r_1' s}}{s^k (r_2')^n} \qquad \forall k,\ n \ge 0.$$

Оскільки $\min\limits_{0<s<\infty} (s^{-k} e^{r_1' s}) = \dfrac{(r_1')^k e^k}{k^k}$, то

$$\left|c_k^{(n)}\right| \le C_1 \frac{e^k (r_1')^k}{k^k (r_2')^n} \quad \forall n,\ k \ge 0. \tag{15}$$

Візьмемо далі r_1 так, щоб $r_1 > r_2$ і $\dfrac{r_1'}{r_1 - r_2} < 1$. Тоді, використовуючи формулу Коші для похідних цілої функції, одержуємо

$$\forall f \in A_\infty \ \ \forall k \ge 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \le r_2:$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}}\, dt.$$

Тому

$$\max_{|z|\le r_2} \left|f^{(k)}(z)\right| \le k! \frac{r_1 \max\limits_{|t|=r_1} |f(t)|}{(r_1 - r_2)^{k+1}}. \tag{16}$$

Використовуючи (15), (16), для $n \ge 0$ отримуємо

$$\max_{|z|\le r_2} |(c_n(D)f)(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \left|c_k^{(n)}\right| \max_{|z|\le r_2} \left|f^{(k)}(z)\right| \le$$

$$\le C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k (r_1')^k k! r_1}{k^k (r_2')^n (r_1 - r_2)^{k+1}} \max_{|t|=r_1} |f(t)| = C_2 \frac{\max\limits_{|t|=r_1} |f(t)|}{(r_2')^n},$$

де $C_2 = r_1 C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^k (r_1')^k k!}{k^k (r_1 - r_2)^{k+1}}$, а останній ряд збігається за ознакою Коші, оскільки $\dfrac{r_1'}{r_1 - r_2} < 1$. Таким чином,

$$\max_{|z|\le r_2} \left| h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)(c_n(D)f)(z)\right| \le C C_2 \left(\frac{|h|\rho}{r_2'}\right)^n \max_{|t|=r_1} |f(t)| \qquad \forall n \ge 0. \tag{17}$$

Оскільки $\dfrac{|h|\rho}{r_2'} < 1$, то з (17) випливає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right)(c_n(D)f)(z)$ збігається для довільної цілої функції $f(z)$ рівномірно в крузі $|z| \le r_2$. Внаслідок довільності r_2 цей ряд збігається за топологією простору A_∞. Тому оператор T_1 лінійно діє в просторі A_∞, а його неперервність випливає з оцінок (17). Зрозуміло, що характеристична функція оператора T_1 збігається з функцією $\sum_{n=0}^{\infty} h^n \gamma_n\left(\frac{z}{h}\right) c_n(\lambda) e^{\lambda z}$.

Подамо функцію $t_2(\lambda, z)$ із зображення (4) у вигляді $t_2(\lambda, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z)\lambda^n$. Оскільки функція $t_2(\lambda, z)$ задовольняє умову A), то послідовність цілих функцій $(\psi_n(z))$ задовольняє умову (1). Тому формулою $(T_2 f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) f^{(n)}(z)$ визначається лінійний неперервний оператор, що діє у просторі A_∞. Той факт, що функція $t_2(\lambda, z)$ є періодичною по z з періодом h, рівносильний тому, що кожна з функцій $\psi_n(z)$, $n = 0, 1, \ldots$, також є періодичною з періодом h. Зрозуміло, що характеристична функція оператора T_2 збігається з $t_2(\lambda, z)e^{\lambda z}$. Оскільки $T = T_1 + T_2$, то оператор T має вигляд (13).

Теорему 2 доведено.

Довільний лінійний неперервний оператор $T\colon A_\infty \to A_\infty$, який переставний із оператором E_h, також буде переставним з оператором $E_h + kE_{-h}$. З теорем 1 і 2 випливає, що обернене твердження не є правильним. Наведемо відповідний приклад оператора для $h = k = 1$. Покладемо $(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(z) \frac{(-1)^n 2^n}{n!} f^{(n)}(z)$. Зрозуміло, що цей оператор переставний з оператором $E_1 + E_{-1}$ (він збігається з оператором T з теореми 2, якщо $h = 1$, $\psi_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, $g_2(\lambda, z) = 1$). Водночас оператор T не є переставним з оператором E_1, оскільки для довільної цілої функції $f(z)$ виконується рівність

$$((E_1 T) f)(z) - ((T E_1) f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n(z+1) - \gamma_n(z)) \frac{(-1)^n 2^n}{n!} f^{(n)}(z+1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n z^n}{n!} f^{(n)}(z+1) = f(1-z).$$

3. Спряжений простір A_∞^* до простору цілих функцій A_∞ є ізоморфним до простору цілих функцій експоненціального типу [5]. При цьому білінійна форма $(f, v) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n n! v_n$, де $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_\infty$, $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \in A_\infty^*$, встановлює двоїстість між цими просторами. Якщо простір A_∞^* наділити загальноприйнятою топологією [5], то лінійний неперервний оператор $T\colon A_\infty \to A_\infty$ тоді і лише тоді, коли спряжений оператор $T^*\colon A_\infty^* \to A_\infty^*$. При цьому характеристичні функції $t(\lambda, z)$ оператора T і $t^*(\lambda, z)$ оператора T^* пов'язані співвідношенням $t^*(\lambda, z) = t(z, \lambda)$. Враховуючи цей факт, маємо $((E_h + kE_{-h})^* g)(z) = (e^{hz} + ke^{-hz}) g(z)$. Тому з теорем 1 і 2 одержуємо опис лінійних неперервних операторів, які діють у просторі A_∞^* і переставні з оператором множення на функцію $e^{hz} + ke^{-hz}$.

Наслідок. *Нехай h і k — фіксовані ненульові комплексні числа. Для того щоб оператор T був лінійним неперервним оператором у просторі A_∞^*, переставним з оператором множення на функцію $e^{hz} + ke^{-hz}$, необхідно і достатньо, щоб він мав вигляд*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} h^n c_n(z)\gamma_n\left(\frac{1}{h}\frac{d}{dz}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi_n\left(\frac{d}{dz}\right),$$

де послідовності функцій $(c_n(\lambda))$ *і* $(\psi_n(z))$ *такі ж, як і в теоремі* 2.

При $k = 1$ та $k = -1$ одержуємо зображення лінійних неперервних операторів $T: A_\infty^* \to A_\infty^*$, які переставні з операторами множення на функції $ch(hz)$ та $sh(hz)$.

1. *Подпорин В. П.* К вопросу о представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 6. – С. 1422 – 1425.
2. *Лінчук Ю. С.* Комутант оператора узагальненого зсуву // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 72 – 75.
3. *Линчук С. С.* О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций многих переменных // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 5. – С. 721 – 727.
4. *Маркушевич А. И.* Введение в классическую теорию абелевых функций. – М.: Наука, 1979. – 239 с.
5. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М.: Наука, 1981. – 320 с.

Одержано 16.02.2005,
після доопрацювання — 05.09.2006