УДК 517.956.223

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Мурач (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Чернигов. технол. ун-т)

УТОЧНЕННЫЕ ШКАЛЫ ПРОСТРАНСТВ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. III

We study elliptic boundary-value problems in the refined scales of functional Hilbert spaces over a smooth manifold with a boundary. The Hörmander – Volevich – Paneyakh isotropic spaces are the elements of these scales. The local smoothness of a solution of an elliptic problem is investigated in the refined scale. We prove a sufficient condition under which this solution is classical. Elliptic boundary-value problems with a parameter are studied as well.

Вивчаються еліптичні крайові задачі в уточнених шкалах функціональних гільбертових просторів на гладкому многовиді з краєм. Елементами цих шкал є ізотропні простори Хермандера – Волевіча – Панеяха. Досліджено локальну гладкість розв'язку еліптичної задачі в уточненій шкалі. Встановлено достатню умову класичності її розв'язку. Вивчено також еліптичні крайові задачі з параметром.

Введение. Настоящая статья является третьей частью работы, первые две части которой опубликованы [1, 2]. Для удобства читателя мы продолжаем нумерацию пунктов и сохраняем обозначения, принятые в предыдущих частях.

В работе исследуется уточненная шкала гильбертовых функциональных пространств и изучаются ее приложения к эллиптическим краевым задачам. Элементами этой шкалы являются некоторые изотропные пространства Хермандера – Волевича – Панеяха [3 – 5], параметризованные с помощью двух параметров — числового и функционального. Первый параметр вещественный, а второй — медленно меняющаяся на $+\infty$ по Карамата функция. Функциональный параметр позволяет тоньше охарактеризовать гладкость распределения по свойствам его преобразования Фурье в окрестности $+\infty$. Уточненная шкала содержит в себе классическую шкалу гильбертовых пространств С. Л. Соболева.

В предыдущих частях работы было показано, что свойства уточненной и соболевской шкал во многом аналогичны. Это позволило распространить теорию эллиптических краевых задач на уточненную шкалу. Так, во второй части было установлено, что оператор общей эллиптической краевой задачи фредгольмов (т. е. имеет конечный индекс и замкнутую область значений) в уточненной шкале пространств дифференцируемых функций на многообразии. В настоящей, третьей, части мы продолжаем исследование в следующих направлениях.

В п. 5 доказаны теоремы о повышении локальной гладкости решения эллиптической краевой задачи в уточненной шкале внутри области и вплоть до границы. В п. 6 рассмотрено их приложение — установлено одно достаточное условие классичности решения этой задачи. В п. 7 исследуется эллиптическая краевая задача с параметром в уточненной шкале. В заключительном п. 8 указаны некоторые другие результаты авторов, которые примыкают к результатам этой статьи.

5. Локальная гладкость решения. Пусть, как и прежде, $\overline{\Omega}$ — бесконечно гладкое компактное многообразие размерности $n \geq 2$ с непустым краем Γ. Тогда Γ — бесконечно гладкое замкнутое многообразие размерности $n-1$. Положим $\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Gamma$ — внутренняя часть многообразия $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим *неоднородную эллиптическую краевую задачу*

$$L\,u = f \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{5.1}$$

$$B_j\,u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для любого} \quad j = 1, \dots, k. \tag{5.2}$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор на многообразии $\overline{\Omega}$ произвольного четного порядка $2k \geq 2$, а $\{B_j\colon j = 1, \dots, k\}$ — набор краевых линейных дифференциальных операторов на Γ. Порядок оператора B_j равен $m_j \leq 2k - 1$. Коэффициенты операторов L и B_j — комплексные функции, бесконечно гладкие на $\overline{\Omega}$ и Γ соответственно.

Напомним [6, с. 6, 7], что эллиптичность краевой задачи (5.1), (5.2) означает следующее: оператор L эллиптический на $\overline{\Omega}$ и правильно эллиптический на Γ, а набор $\{B_j\colon j = 1, \dots, k\}$ краевых операторов удовлетворяет на Γ условию Я. Б. Лопатинского по отношению к оператору L. Отметим, что мы не требуем нормальности набора краевых дифференциальных операторов. Поэтому в отличие от известных работ [7 – 9] эллиптическая задача (5.1), (5.2) может быть и нерегулярной.

Решение и правые части задачи (5.1), (5.2) рассматриваются в классах распределений: $u, f \in \overline{\mathcal{D}}\,'(\Omega)$ и $g_j \in \mathcal{D}'(\Gamma)$. Здесь $\overline{\mathcal{D}}\,'(\Omega)$ — топологическое пространство продолжаемых распределений в Ω [10, с. 636], а $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — топологическое пространство всех распределений на Γ. При этом дифференциальное уравнение (5.1) понимается в смысле теории распределений, а дифференциальное уравнение (5.2) — в смысле теоремы о следах распределений [1, с. 363; 10, с. 638].

В п. 4 эллиптическая краевая задача (5.1), (5.2) изучалась в уточненных шкалах функциональных пространств

$$\Big\{H^{s,\varphi}(\Omega)\colon\ s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\Big\} \quad \text{и} \quad \Big\{H^{s,\varphi}(\Gamma)\colon\ s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\Big\}. \tag{5.3}$$

Здесь $\mathcal{M}$ — множество всех таких функций $\varphi\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, что: а) φ измерима по Борелю; б) φ медленно меняющаяся на $+\infty$ по Карамата; в) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1, b]$, $1 < b < +\infty$.

Уточненные шкалы (5.3) определены и изучались в п. 3. В пространствах этих шкал числовой параметр s задает основную (степенную) гладкость, а функциональный параметр φ уточняет ее. Отметим, что пространства $H^{s,\varphi}(\Omega)$ и $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ гильбертовы сепарабельные и непрерывно вложены в топологические пространства $\overline{\mathcal{D}}\,'(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$ соответственно. Кроме того, множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в пространстве $H^{s,\varphi}(\Omega)$, а множество $C^\infty(\Gamma)$ — в пространстве $H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Справедливы компактные вложения

$$H^{s_1,\varphi_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{и} \quad H^{s_1,\varphi_1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Gamma) \quad \text{при} \quad s_1 > s \ \text{ и } \ \varphi, \varphi_1 \in \mathcal{M}. \tag{5.4}$$

В частном случае $\varphi \equiv 1$ пространства $H^{s,\,\varphi}(\Omega)$ и $H^{s,\,\varphi}(\Gamma)$ обозначаем через $H^s(\Omega)$ и $H^s(\Gamma)$ соответственно. Это классические пространства С. Л. Соболева (или, в иной терминологии, пространства бесселевых потенциалов) порядка s.

Нам понадобятся следующие свойства задачи (5.1), (5.2), установленные в п. 4 (теорема 4.1). Положим $m := \max\{m_1, \dots, m_k\}$.

Предложение 5.1. *Пусть $s > m+1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда линейное отображение*

$$u \mapsto \Lambda\, u = (L\, u, B_1\, u, \ldots, B_k\, u), \quad u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,),$$

продолжается по непрерывности до ограниченного оператора

$$\Lambda\colon H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) := H^{s-2k,\,\varphi}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{k} H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma). \tag{5.5}$$

Ядро N этого оператора конечномерно, удовлетворяет условию $N \subset C^\infty(\,\overline{\Omega})$ и не зависит от s, φ. Область значений $\Lambda\,(H^{s,\varphi}(\Omega))$ оператора (5.5) *замкнута в пространстве $\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ и состоит из всех таких вектор-функций $(f, g_1, \ldots, g_k) \in \in \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, что*

$$(f, w_0)_\Omega + (g_1, w_1)_\Gamma + \ldots + (g_k, w_k)_\Gamma = 0 \quad \textit{для любого} \quad (w_0, w_1, \ldots, w_k) \in N_*. \tag{5.6}$$

Здесь N_* — некоторое не зависящее от s, φ конечномерное подпространство пространства $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^k$, а $(\cdot,\cdot)_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ — скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ соответственно (в случае $s \le 2k$ форма $(\cdot,\cdot)_\Omega$ — расширение по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$). Таким образом, оператор (5.5) *имеет конечный индекс, равный числу $\dim N - \dim N_*$, который не зависит от s и φ.*

Пусть $s > m + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$. В силу предложения 5.1 для произвольной функции $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ определены посредством замыкания правые части неоднородной задачи (5.1), (5.2):

$$f \in H^{s-2k,\varphi}(\Omega) \quad \text{и} \quad g_j \in H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5.7}$$

При этом, как и прежде, дифференциальное уравнение (5.1) выполняется в смысле теории распределений, а уравнение (5.2) — в смысле теоремы о следах. Краевая задача (5.1), (5.2) нормально разрешима; она имеет решение $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ для тех и только тех правых частей (5.7), которые удовлетворяют условию (5.6). Это решение является *обобщенным*.

Зададимся следующим вопросом. Предположим, что распределения (5.7) имеют на некотором открытом в $\overline{\Omega}$ множестве дополнительную гладкость в уточненных шкалах пространств. Что можно тогда утверждать о локальной гладкости решения u на этом множестве? Оказывается, решение u унаследует такую же дополнительную гладкость.

Рассмотрим сначала случай дополнительной гладкости на всем многообразии $\overline{\Omega}$.

Теорема 5.1. *Пусть $s > m + 1/2$. Предположим, что функция $u \in H^s(\Omega)$ является обобщенным решением задачи* (5.1), (5.2), *где*

$$f \in H^{s+\varepsilon-2k,\varphi}(\Omega) \quad \textit{и} \quad g_j \in H^{s+\varepsilon-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) \quad \textit{при} \quad j = 1, \ldots, k$$

для некоторых $\varepsilon \ge 0$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда $u \in H^{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega)$.

Отметим, что предположение $u \in H^s(\Omega)$ не ограничивает общность теоремы 5.1 и последующей теоремы 5.2 для уточненной шкалы, ибо если $u \in H^{s_1,\varphi_1}(\Omega)$ для некоторых $s_1 > m + 1/2$ и $\varphi_1 \in \mathcal{M}$, то в силу левого вложения (5.4) справедливо включение $u \in H^s(\Omega)$ для любого числа s, удовлетворяющего неравенству $m + 1/2 < s < s_1$.

***Доказательство теоремы* 5.1.** По условию,

$$F := (f, g_1, \ldots, g_k) = \Lambda u \in \Lambda(H^s(\Omega)) \cap \mathcal{H}_{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega, \Gamma).$$

В силу предложения 5.1 из свойства $F \in \Lambda(H^s(\Omega))$ вытекает равенство (5.6), которое вместе со свойством $F \in \mathcal{H}_{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega, \Gamma)$ влечет соотношение $F \in \Lambda(H^{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega))$. Поэтому наряду с $\Lambda u = F$ справедливо равенство $\Lambda v = F$ для некоторого $v \in H^{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega)$. Следовательно, $\Lambda(u - v) = 0$ и, согласно предложению 5.1, $w := u - v \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega})$. Таким образом, поскольку $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega)$, получаем $u = v + w \in H^{s+\varepsilon,\varphi}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.1 — это утверждение о повышении глобальной гладкости решения задачи (5.1), (5.2) в уточненной шкале.

Рассмотрим теперь случай локальной гладкости. Пусть U — открытое непустое подмножество многообразия $\overline{\Omega}$; положим $\Omega_0 := U \cap \Omega$ и $\Gamma_0 := U \cap \Gamma$ (возможен случай $\Gamma_0 = \varnothing$). Для $\sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}$ введем такие локальные аналоги пространств уточненных шкал на Ω и на Γ:

$$H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) =$$

$$= \left\{ u \in \overline{\mathcal{D}}'(\Omega) \colon \chi u \in H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \quad \text{для любого} \quad \chi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0 \right\},$$

$$H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) = \left\{ h \in \mathcal{D}'(\Gamma) : \chi h \in H^{\sigma,\varphi}(\Gamma) \quad \text{для любого} \quad \chi \in C^\infty(\Gamma), \operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0 \right\}.$$

Как и прежде, в случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначении этих пространств будем опускать.

Теорема 5.2. *Пусть* $s > m + 1/2$. *Предположим, что функция* $u \in H^s(\Omega)$ *является обобщенным решением задачи* (5.1), (5.2), *где*

$$f \in H^{s+\varepsilon-2k,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \quad \text{и} \quad g_j \in H^{s+\varepsilon-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, k \tag{5.8}$$

для некоторых $\varepsilon \geq 0$ *и* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тогда* $u \in H^{s+\varepsilon,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Доказательство разобьем на три шага.

Шаг 1. Выберем функции χ, η такие, что

$$\begin{gathered} \chi, \quad \eta \in C^\infty(\overline{\Omega}); \\ \operatorname{supp}\chi, \quad \operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0 \quad \text{и} \quad \eta = 1 \quad \text{в окрестности} \quad \operatorname{supp}\chi. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Переставив оператор умножения на функцию χ с дифференциальными операторами L и B_j, $j = 1, \ldots, k$, для произвольного $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ можно записать следующие равенства:

$$L(\chi v) = L(\chi\eta v) = \chi L(\eta v) + L'(\eta v) = \chi L v + L'(\eta v), \tag{5.10}$$

$$B_j(\chi v) = B_j(\chi\eta v) = \chi B_j(\eta v) + B'_j(\eta v) = \chi B_j v + B'_j(\eta v). \qquad (5.11)$$

Здесь L' — некоторый линейный дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$, а B'_j — некоторый краевой линейный дифференциальный оператор на Γ. Коэффициенты этих операторов бесконечно гладкие, а порядки удовлетворяют условиям

$$\mathrm{ord} L' \leq 2k-1 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{ord} B'_j \leq m_j - 1.$$

Следовательно [6, с. 16], отображения

$$v \mapsto L'v \quad \text{и} \quad v \mapsto B'_j v, \quad \text{где} \quad v \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

продолжаются по непрерывности до ограниченных операторов

$$L' : H^\lambda(\Omega) \to H^{\lambda-2k+1}(\Omega) \quad \text{для произвольного} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad (5.12)$$

$$B'_j : H^\lambda(\Omega) \to H^{\lambda-m_j+1-1/2}(\Gamma) \quad \text{для произвольного} \quad \lambda > m_j - 1/2. \qquad (5.13)$$

Отсюда при $\lambda := s$ вытекает, что равенства (5.10), (5.11) продолжаются по непрерывности с класса функций $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ на класс функций $v \in H^s(\Omega)$. Возьмем в этих равенствах $v := u \in H^s(\Omega)$, где u — решение задачи (5.1), (5.2). Получим соотношения

$$L(\chi u) = \chi f + L'(\eta u) \quad \text{на} \quad \Omega, \qquad (5.14)$$

$$B_j(\chi u) = \chi g_j + B'_j(\eta u) \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для любого} \quad j = 1, \ldots, k. \qquad (5.15)$$

Шаг 2. Использовав условие (5.8), докажем следующую импликацию:

$$\begin{gathered} u \in H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \;\Rightarrow\; u \in H^{\sigma+\delta,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0), \\ \text{где} \quad \sigma > m + 1/2, \quad 0 < \delta < 1, \quad \sigma + \delta \leq s + \varepsilon. \end{gathered} \qquad (5.16)$$

Предположим, что $u \in H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$. Тогда на основании (5.4) запишем

$$\eta u \in H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^\lambda(\Omega), \quad \text{где} \quad \sigma + \delta - 1 < \lambda < \sigma \quad \text{и} \quad \lambda > m + 1/2.$$

Отсюда в силу (5.12), (5.13) и снова (5.4) имеем

$$L'(\eta u) \in H^{\lambda-2k+1}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma+\delta-2k,\varphi}(\Omega),$$

$$B'_j(\eta u) \in H^{\lambda-m_j+1-1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\sigma+\delta-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)$$

(вложения справедливы, поскольку $\lambda + 1 > \sigma + \delta$). Кроме того, на основании условия (5.8), неравенства $\sigma + \delta \leq s + \varepsilon$ и вложений (5.4) можно записать

$$\chi f \in H^{s+\varepsilon-2k,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma+\delta-2k,\varphi}(\Omega),$$

$$\chi g_j \in H^{s+\varepsilon-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow H^{\sigma+\delta-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Таким образом, распределение

$$\chi u \in H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma-\rho}(\Omega), \quad \text{где} \quad m + 1/2 < \sigma - \rho < \sigma,$$

является решением эллиптической краевой задачи (5.14), (5.15), правые части которой принадлежат соответственно пространствам

$$H^{\sigma+\delta-2k,\varphi}(\Omega) \quad \text{и} \quad H^{\sigma+\delta-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Следовательно, согласно теореме 5.1 справедливо включение $\chi u \in H^{\sigma+\delta,\varphi}(\Omega)$. Это вследствие произвольности функции χ, удовлетворяющей условию (5.9), означает, что $u \in H^{\sigma+\delta,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$. Тем самым импликация (5.16) доказана.

Шаг 3. Теперь выведем утверждение теоремы из (5.16). В силу (5.4) имеем

$$u \in H^s(\Omega) \subseteq H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \subset H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0), \quad \text{где} \quad m + 1/2 < \sigma < s.$$

Выберем такой номер $r \in \mathbb{N}$, чтобы $\delta := (s + \varepsilon - \sigma)/r < 1$. Применив r раз импликацию (5.16), получим

$$u \in H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \Rightarrow u \in H^{\sigma+\delta,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \Rightarrow u \in H^{\sigma+2\delta,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \Rightarrow \ldots$$
$$\ldots \Rightarrow u \in H^{\sigma+r\delta,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) = H^{s+\varepsilon,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5.2 — это утверждение о повышении локальной гладкости решения задачи (5.1), (5.2) в уточненной шкале. Поскольку

$$H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma) = H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \quad \text{и} \quad H^{\sigma,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma) = H^{\sigma,\varphi}(\Gamma),$$

эта теорема содержит в себе и теорему 5.1. Отметим также случай $\Gamma_0 = \varnothing$, который приводит к утверждению о повышении локальной гладкости решения в окрестностях внутренних точек многообразия $\overline{\Omega}$.

Отметим, что для соболевской шкалы (случай $\varphi \equiv 1$) теоремы о повышении локальной гладкости решения эллиптической краевой задачи установлены в [3, 11 – 13] для односторонней шкалы и в [14 – 17] для двусторонней.

6. Условия классичности решения. В качестве приложения теорем из п. 5 установим одно достаточное условие того, что *обобщенное* решение u эллиптической краевой задачи (5.1), (5.2) является *классическим*, т. е. принадлежит классу $C^{2k}(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$. Если u — такое решение, то в равенствах (5.1), (5.2) левые части вычисляются с помощью классических производных, а сами равенства выполняются в каждой точке множеств Ω и Γ соответственно. При этом их правые части имеют следующую гладкость:

$$f \in C(\Omega) \quad \text{и} \quad g_j \in C^{m-m_j}(\Gamma) \quad \text{для каждого} \quad j = 1, \ldots, k. \tag{6.1}$$

Обратное, вообще говоря, не верно: из условия (6.1) не следует, что обобщенное решение u задачи (5.1), (5.2) является классическим. С помощью пространств уточненной шкалы мы так усилим это условие, что оно станет достаточным для классичности решения u.

Теорема 6.1. *Пусть $s > m + 1/2$. Предположим, что функция $u \in H^s(\Omega)$ является обобщенным решением задачи* (5.1), (5.2), *где*

$$f \in H^{n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{m-2k+n/2,\varphi}(\Omega), \tag{6.2}$$

$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \ \ \text{для каждого} \ \ j = 1, \ldots, k, \tag{6.3}$$

а функциональный параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty. \tag{6.4}$$

Тогда решение u классическое, т. е. $u \in C^{2k}(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$.

Отметим, что условия (6.2), (6.3) влекут свойство (6.1). В самом деле, согласно теореме 3.6 д) и замечанию 3.3 (см. [2]) справедливо следующее. Пусть ρ — положительное целое число, а $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда каждое из непрерывных вложений

$$H^{\rho+n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^\rho(\overline{\Omega}) \quad \text{и} \quad H^{\rho+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow C^\rho(\Gamma) \tag{6.5}$$

равносильно условию (6.4). Следовательно, для функционального параметра $\varphi \in \in \mathcal{M}$, удовлетворяющего условию (6.4), получаем

$$f \in H^{n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big(f \in \overline{\mathcal{D}}'(\Omega) \quad \text{и} \quad \chi f \in H^{n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

$$\text{для любого} \quad \chi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \mathrm{supp}\chi \subset \Omega \Big) \Rightarrow f \in C(\Omega),$$

$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) \Rightarrow g_j \in C^{m-m_j}(\Gamma).$$

***Доказательство теоремы* 6.1.** Можно считать, что $m + 1/2 < s < m + 1$. Положим

$$\varepsilon := 2k - s + \frac{n}{2} > 0 \quad (\text{поскольку } 2k \geq m + 1), \tag{6.6}$$

$$\delta := m - s + \frac{n}{2} > 0 \quad (\text{поскольку } n \geq 2). \tag{6.7}$$

Покажем сначала, что $u \in C^{2k}(\Omega)$. В силу условия (6.2) на основании (6.6) запишем

$$f \in H^{n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) = H^{s+\varepsilon-2k,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing).$$

Кроме того,

$$g_j \in \mathcal{D}'(\Gamma) = H^{s+\varepsilon-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\varnothing) \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Отсюда согласно теореме 5.2 и снова в силу (6.6) имеем

$$u \in H^{s+\varepsilon,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) = H^{2k+n/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing).$$

Следовательно, в силу условия (6.4) и первого вложения (6.5) справедливо

$$\chi u \in H^{2k+n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^{2k}(\overline{\Omega}) \quad \text{для любого} \quad \chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \quad \mathrm{supp}\chi \subset \Omega.$$

Очевидно, это влечет свойство $u \in C^{2k}(\Omega)$.

Покажем далее, что $u \in C^{m}(\overline{\Omega})$. В силу условий (6.2), (6.3) и на основании (6.7) запишем

$$f \in H^{m-2k+n/2,\varphi}(\Omega) = H^{s+\delta-2k,\varphi}(\Omega),$$

$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2,\varphi}(\Gamma) = H^{s+\delta-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) \quad \text{при} \quad j=1,\ldots,k.$$

Отсюда, на основании теоремы 5.1, равенства (6.7), а также в силу условия (6.4) и первого вложения (6.5) запишем

$$u \in H^{s+\delta,\varphi}(\Omega) = H^{m+n/2,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow C^{m}(\overline{\Omega}).$$

Таким образом, $u \in C^{2k}(\Omega) \cap C^{m}(\overline{\Omega})$, что и требовалось доказать.

Замечание **6.1.** Если использовать теорему 6.1 лишь для соболевской шкалы пространств, то придется вместо условий (6.2), (6.3) потребовать, чтобы

$$f \in H^{n/2+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap H^{m-2k+n/2+\varepsilon}(\Omega),$$

$$g_j \in H^{m-m_j+(n-1)/2+\varepsilon}(\Gamma) \quad \text{при} \quad j=1,\ldots,k$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, т. е. завысить основную гладкость правых частей, что существенно огрубляет результат.

7. Эллиптическая краевая задача с параметром в уточненной шкале. Эллиптические краевые задачи с параметром изучались в работах Ш. Агмона, Л. Ниренберга [18, 19], М. С. Аграновича, М. И. Вишика [20] и их последователей (см. [6] и цитируемую там литературу). Ими было установлено, что при достаточно больших по модулю значениях комплексного параметра оператор, соответствующий задаче, является изоморфизмом в подходящих парах соболевских пространств, причем норма оператора допускает двустороннюю оценку с постоянными, не зависящими от параметра. Ниже мы покажем, что для пространств уточненной шкалы справедлив аналог этого результата.

Рассмотрим неоднородную краевую задачу

$$L(q)u = f \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{7.1}$$

$$B_j(q)u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для любого} \quad j=1,\ldots,k, \tag{7.2}$$

зависящую от комплексного параметра q следующим образом:

$$L(q) := \sum_{r=0}^{2k} q^{2k-r} L_r \qquad \text{и} \qquad B_j(q) := \sum_{r=0}^{m_j} q^{m_j-r} B_{j,r}.$$

Здесь L_r — линейный дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$, а $B_{j,r}$ — краевой линейный дифференциальный оператор на Γ; коэффициенты этих операторов — бесконечно гладкие комплексные функции, а порядки не превышают числа r. Целые числа k и m_j не зависят от параметра q и удовлетворяют условиям $k \geq 1$ и $0 \leq m_j \leq 2k-1$. Отметим, что $L(0) = L_{2k}$ и $B_j(0) = B_{j,m_j}$.

Таким образом, для каждого комплексного значения параметра q выражения $L(q)$ и $B_j(q)$ являются линейными дифференциальными операторами, порядки которых не превышают чисел $2k$ и m_j соответственно. При этом, как и ранее, дифференциальное уравнение (7.1) понимается в смысле теории распределений, а уравнение (7.2) — в смысле теоремы о следах распределений.

Пусть K — фиксированный замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат (не исключается случай, когда K вырождается в луч). Предположим, что *краевая задача* (7.1), (7.2) *является эллиптической с параметром в угле* K. Это означает выполнение следующих двух условий 1 и 2.

Положим

$$L^{(0)}(x,\xi,q) := \sum_{r=0}^{2k} q^{2k-r} L_r^{(0)}(x,\xi) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \in T_x^*\overline{\Omega},\ q \in \mathbb{C}.$$

Здесь $L_r^{(0)}(x,\xi)$ — главный символ дифференциального оператора L_r в случае, когда $\operatorname{ord} L_r = r$, либо $L_r^{(0)}(x,\xi) \equiv 0$ в случае, когда $\operatorname{ord} L_r < r$. При этом, как обычно, через $T_x^*\overline{\Omega}$ обозначено кокасательное пространство к многообразию $\overline{\Omega}$ в точке $x \in \overline{\Omega}$. Аналогично положим

$$B_j^{(0)}(x,\xi,q) := \sum_{r=0}^{m_j} q^{m_j-r} B_{j,r}^{(0)}(x,\xi) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,\ \xi \in T_x^*\overline{\Omega},\ q \in \mathbb{C}.$$

Здесь $B_{j,r}^{(0)}(x,\xi)$ — главный символ дифференциального оператора $B_{j,r}$ в случае, когда $\operatorname{ord} B_{j,r} = r$, либо $B_{j,r}^{(0)}(x,\xi) \equiv 0$ в случае, когда $\operatorname{ord} B_{j,r} < r$.

Условие 1. *Для произвольных точки $x \in \overline{\Omega}$, ковектора $\xi \in T_x^*\overline{\Omega}$ и значения параметра $q \in K$ справедливо $L^{(0)}(x,\xi,q) \neq 0$, если $(\xi,q) \neq 0$.*

В связи с условием 1 отметим следующее. Пусть $x \in \Gamma$. На многообразии $\overline{\Omega}$ в достаточно малой полуокрестности U точки x рассмотрим локальные координаты, заданные посредством C^∞-диффеоморфизма $\alpha\colon \overline{\mathbb{R}^n_+} \leftrightarrow U$. Здесь $\overline{\mathbb{R}^n_+} := \big\{(t',t_n)\colon t' \in \mathbb{R}^{n-1},\ t_n \geq 0\big\}$ — замкнутое полупространство, а $\alpha^{-1}(x) = 0$ — начало координат. Запишем в этих координатах выражения $L^{(0)}(x,\xi,q)$ и $B_j^{(0)}(x,\xi,q)$ при каждом комплексном q. Получим выражения, которые соответственно обозначим

$$L^{0,\alpha}(0,\xi',\xi_n,q) \quad \text{и} \quad B_j^{0,\alpha}(0,\xi',\xi_n,q), \quad \text{где} \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \xi_n \in \mathbb{R}.$$

Они являются однородными полиномами по совокупности переменных ξ', ξ_n и q. Известно [6, с. 23], что поскольку $n \geq 2$, из условия 1 вытекает следующее. Пусть фиксированы вектор $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и значение параметра $q \in K$ такие, что $(\xi',q) \neq 0$. Тогда многочлен $L^{0,\alpha}(0,\xi',\eta,q)$ комплексного переменного η имеет ровно k корней с положительной мнимой частью и столько же корней с отрицательной мнимой частью (с учетом их кратности). Обозначим

$$L_{+}^{0,\alpha}(0,\xi',\eta,q) := \prod_{j=1}^{k}(\eta-\eta_j^{+}(\xi',q)),$$

где $\eta_1^{+}(\xi',q),\ldots,\eta_k^{+}(\xi',q)$ — все η-корни многочлена $L_{+}^{0,\alpha}(0,\xi',\eta,q)$, имеющие положительную мнимую часть.

Условие 2. *Для произвольных фиксированных точки $x\in\Gamma$, вектора $\xi'\in\in\mathbb{R}^{n-1}$ и значения параметра $q\in K$ таких, что $(\xi',q)\neq 0$, многочлены*

$$B_1^{0,\alpha}(0,\xi',\eta,q),\ldots,B_k^{0,\alpha}(0,\xi',\eta,q)$$

комплексного переменного η линейно независимы по модулю многочлена $L_{+}^{0,\alpha}(0,\xi',\eta,q)$.

При $q=0$ условие 1 означает эллиптичность оператора $L(0)$ на $\overline{\Omega}$ и, как отмечалось выше, влечет его правильную эллиптичность на Γ. Условие 2 означает, что набор $\{B_1(0),\ldots,B_k(0)\}$ краевых операторов удовлетворяет на Γ условию Я. Б. Лопатинского по отношению к оператору $L(0)$. Таким образом, при $q=0$ краевая задача (7.1), (7.2) является эллиптической. Поскольку параметр q влияет только на младшие члены дифференциальных операторов $L(q)$ и $B_j(q)$, то эта задача будет эллиптической при всех $q\in\mathbb{C}$. Поэтому для нее справедливо предложение 5.1. Более того, как показали М. С. Агранович и М. И. Вишик [20] (§ 4, 5), [6, с. 25], задача (7.1), (7.2) имеет следующие фундаментальные свойства в соболевской шкале.

Предложение 7.1. 1. *Существует такое число $q_0>0$, что для каждого значения параметра $q\in K$, удовлетворяющего условию $|q|\geq q_0$, справедлив при любом $s\geq 2k$ топологический изоморфизм*

$$\Lambda(q) := (L(q),B_1(q),\ldots,B_k(q))\colon H^{s}(\Omega)\leftrightarrow \mathcal{H}_s(\Omega,\Gamma) :=$$

$$:= H^{s-2k}(\Omega)\times\prod_{j=1}^{k}H^{s-m_j-1/2}(\Gamma). \tag{7.3}$$

2. *Для произвольного фиксированного числа $s\geq 2k$ найдется такое число $c=c(s)\geq 1$, что*

$$c^{-1}\left(\|u\|_{H^s(\Omega)}+|q|^{s}\|u\|_{L_2(\Omega)}\right)\leq \|L(q)u\|_{H^{s-2k}(\Omega)}+|q|^{s-2k}\|L(q)u\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\left(\|B_j(q)u\|_{H^{s-m_j-1/2}(\Gamma)}+|q|^{s-m_j-1/2}\|B_j(q)u\|_{L_2(\Gamma)}\right)\leq$$

$$\leq c\left(\|u\|_{H^s(\Omega)}+|q|^{s}\|u\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{7.4}$$

для любого $q\in K$, $|q|\geq q_0$, и произвольной функции $u\in H^{s}(\Omega)$.

Двусторонняя априорная оценка (7.4) имеет ряд приложений, в частности, в теории параболических смешанных задач [20] (§ 9). Ясно, что при каждом фиксированном $|q|\geq q_0$ эта оценка записана для величин, эквивалентных нормам $\|u\|_{H^s(\Omega)}$

и $\|\Lambda(q)u\|_{\mathcal{H}_s(\Omega,\Gamma)}$. Отметим [20, с. 74], что правая часть оценки (7.4) справедлива и без предположения об эллиптичности с параметром задачи (7.1), (7.2).

Установим далее аналог предложения 7.1 для уточненной шкалы. Сделаем это отдельно для каждого из утверждений предложения 7.1. Как и прежде, $m = \max\{m_1, \ldots, m_k\} \leq 2k - 1$.

Теорема 7.1. *Существует такое число $q_0 > 0$, что для каждого значения параметра $q \in K$, удовлетворяющего условию $|q| \geq q_0$, справедлив топологический изоморфизм*

$$\Lambda(q)\colon H^{s,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \quad \textit{при любых} \quad s > m + 1/2,\ \varphi \in \mathcal{M}. \tag{7.5}$$

Доказательство. Пусть $s > m + 1/2$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Поскольку для каждого $q \in \mathbb{C}$ краевая задача (7.1), (7.2) эллиптическая, в силу предложения 5.1 ограниченный оператор $\Lambda(q)\colon H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ имеет замкнутую область значений и не зависящие от s, φ конечномерные ядро $N(q)$ и дефектное подпространство $N_*(q)$. Кроме того, согласно предложению 7.1, пункт 1 существует такое число $q_0 > 0$, что для каждого $q \in K$, удовлетворяющего условию $|q| \geq q_0$, справедлив топологический изоморфизм $\Lambda(q)\colon H^{2k}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{H}_{2k}(\Omega,\Gamma)$. Следовательно, при $q \in K$, $|q| \geq q_0$ пространства $N(q)$ и $N_*(q)$ тривиальны, т. е. линейный ограниченный оператор $\Lambda(q)\colon H^{s,\varphi}(\Omega) \to \mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ является биекцией. Отсюда в силу теоремы Банаха об обратном операторе получаем топологический изоморфизм (7.5), что и требовалось доказать.

Отметим, что в случае $m + 1/2 < s < 2k$ теорема 7.1, по-видимому, является новым результатом даже для соболевской шкалы.

Теорема 7.2. *Для произвольных фиксированных $s > 2k$ и $\varphi \in \mathcal{M}$ найдется такое число $c = c(s,\varphi) \geq 1$, что*

$$c^{-1}\left(\left\|u\right\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + |q|^s\varphi(|q|)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}\right) \leq$$
$$\leq \left\|L(q)u\right\|_{H^{s-2k,\varphi}(\Omega)} + |q|^{s-2k}\varphi(|q|)\left\|L(q)u\right\|_{L_2(\Omega)} +$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\left(\left\|B_j(q)u\right\|_{H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)} + |q|^{s-m_j-1/2}\varphi(|q|)\left\|B_j(q)u\right\|_{L_2(\Gamma)}\right) \leq$$
$$\leq c\left(\left\|u\right\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + |q|^s\varphi(|q|)\left\|u\right\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{7.6}$$

для любого $q \in K$, $|q| \geq \max\{q_0, 1\}$, и произвольной функции $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$. Здесь число q_0 взято из теоремы 7.1.

***Замечание* 7.1.** Формулировка теоремы 7.2 нуждается в комментарии. При фиксированном q оценка (7.6) записана для норм, эквивалентных нормам $\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega)}$ и $\|\Lambda(q)u\|_{\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)}$. Это вытекает из непрерывности вложений (5.4) и положительности функции φ. Чтобы избежать громоздких выражений, мы записали оценку (7.6), как и оценку (7.4), для негильбертовых норм. Она справедлива и для соответствующих гильбертовых норм (порождающих скалярные произведения в $H^{s,\varphi}(\Omega)$ и $\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$), поскольку они оцениваются через использованные нормы с постоянными, не зависящими от s, φ и q. Далее, на числовой параметр s

накладывается более сильное условие $s > 2k$, чем в предыдущей теореме. Это обусловлено тем, что вложение $H^{s-2k,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ верно для любого функционального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ только при $s > 2k$. Следовательно, член $\|L(q)u\|_{L_2(\Omega)}$ в средней части оценки (7.6) определен для $L(q)u \in H^{s-2k,\varphi}(\Omega)$ только при $s > 2k$, если произвольно $\varphi \in \mathcal{M}$. Наконец, в формулировке наряду с условием $|q| \geq q_0$ требуется, чтобы $|q| \geq 1$. Последнее связано с тем, что функция $\varphi(t)$ определена лишь при $t \geq 1$. Заметим, что оценка (7.6), как и оценка (7.4), представляет интерес лишь при $|q| \gg 1$.

Мы выведем теорему 7.2 из предложения 7.1, пункт 2 с помощью интерполяции с функциональным параметром. Предварительно нам придется уточнить некоторые результаты пп. 2, 3. Напомним (для удобства читателя) определение этой интерполяции, данное в п. 2.

Пусть комплексные сепарабельные гильбертовы пространства X_0 и X_1 такие, что справедливо непрерывное плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$. В этом случае пару $X = [X_0, X_1]$ называем *допустимой*. Для нее существует такой изометрический изоморфизм $A\colon X_1 \leftrightarrow X_0$, что оператор A является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор A называется *порождающим* для пары X; он определяется по паре X однозначно. Пусть функция ψ положительна и измерима по Борелю на полуоси $(0; +\infty)$. Тогда в пространстве X_0 определен оператор $\psi(A)$ как функция от A. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, через X_ψ область определения оператора $\psi(A)$, наделенную скалярным произведением графика:

$$\big(u, v\big)_{X_\psi} = \big(u, v\big)_{X_0} + \big(\psi(A)u, \psi(A)v\big)_{X_0}.$$

Оно естественным образом порождает норму в пространстве X_ψ. Это пространство гильбертово, причем справедливо непрерывное плотное вложение $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функция ψ называется *интерполяционным параметром*, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для произвольного линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее. Если при каждом $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T\colon X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T\colon X_\psi \to Y_\psi$. Если функция ψ — интерполяционный параметр, то говорят, что пространство X_ψ получено *интерполяцией с функциональным параметром* ψ пары X.

В п. 2 (теорема 2.1) установлен следующий результат.

Предложение 7.2. *Пусть измеримая по Борелю функция* $\psi\colon (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ *ограничена на каждом отрезке* $[a; b]$, *где* $0 < a < b < +\infty$, *и правильно меняющаяся на* $+\infty$ *порядка* $\theta \in (0, 1)$ *по Карамата. Тогда* ψ *— интерполяционный параметр.*

Ниже мы уточним этот результат в следующем направлении. Допустимую пару $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств назовем *нормальной*, если $\|u\|_{X_0} \leq \|u\|_{X_1}$ для любого $u \in X_1$. Заметим, что каждую допустимую пару $[X_0, X_1]$ можно сделать нормальной, заменив, например, норму $\|u\|_{X_1}$ на эквивалентную норму $c\|u\|_{X_1}$, где c — достаточно большое положительное число.

Отметим следующее. Если A — порождающий оператор для нормальной допустимой пары $X=[X_0,X_1]$, то $\mathrm{Spec}A\subseteq[1,+\infty)$. В самом деле,

$$\bigl(A^2u,u\bigr)_{X_0}=\bigl(Au,Au\bigr)_{X_0}=\|Au\|^2_{X_0}=\|u\|^2_{X_1}\geq\|u\|^2_{X_0}$$

для любого u из области определения оператора A^2. Значит, оператор A^2 полуограничен снизу числом 1, что влечет включение $\mathrm{Spec}(A^2)\subseteq[1,+\infty)$. Следовательно, $\mathrm{Spec}A=\mathrm{Spec}\sqrt{A^2}\subseteq[1,+\infty)$.

Лемма 7.1. *Пусть интерполяционный параметр ψ удовлетворяет условию предложения* 7.2. *Тогда существует такое число $c_\psi>0$, что*

$$\|T\|_{X_\psi\to Y_\psi}\leq c_\psi\max\bigl\{\|T\|_{X_j\to Y_j}:j=0,1\bigr\}. \tag{7.7}$$

Здесь $X=[X_0,X_1]$ и $Y=[Y_0,Y_1]$ — произвольные нормальные допустимые пары гильбертовых пространств, а T — произвольное линейное отображение, заданное на X_0 и такое, что операторы $T\colon X_j\to Y_j$ ограничены при $j=0,1$. Число $c_\psi>0$ не зависит от X, Y и T.

Доказательство. Обратимся к доказательству теоремы 2.1, которое дано в п. 2 и опирается на установленные там леммы 2.1 – 2.6 (см. [2]). Лемма 2.2 утверждает, что для параметра ψ существует непрерывная функция $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) для некоторых положительных чисел c_0 и m справедлива оценка

$$|h(\tau)|\leq c_0(1+|\tau|)^m\quad\text{при}\quad\tau\in\mathbb{R};$$

б) для произвольного числа $\kappa>0$ существуют такие положительные числа $c_1(\psi,\kappa)$ и $c_2(\psi,\kappa)$, что

$$\frac{c_1(\psi,\kappa)}{1+\psi^2(t)}\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{t^2+h^2(\tau)}\leq\frac{c_2(\psi,\kappa)}{1+\psi^2(t)}\quad\text{при}\quad t\geq\kappa. \tag{7.8}$$

Согласно леммам 2.4 и 2.6, X_ψ является пространством следов в точке нуль абстрактных функций из пространства

$$W(h,X)=\bigl\{u\in L_2(\mathbb{R},X_1)\colon h\widehat{u}\in L_2(\mathbb{R},X_0)\bigr\},$$

в котором рассматривается норма

$$\|u\|_{W(h,X)}=\Bigl(\|\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_1)}+\|h\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_0)}\Bigr)^{1/2}.$$

Здесь $\widehat{u}$ — преобразование Фурье функции u. То, что X_ψ — пространство следов, означает следующее. Отображение $u\mapsto u(0)$, где $u\in C_0^\infty(\mathbb{R},X_1)$, продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора следа $R_X\colon W(h,X)\to$ $\to X_\psi$, причем последний имеет линейный ограниченный правый обратный оператор $K_X\colon X_\psi\to W(h,X)$. Как установлено в доказательствах лемм 2.4 и 2.6, из неравенства (7.8) вытекают следующие оценки норм этих операторов:

$$\|R_X\|_{W(h,X)\to X_\psi} \leq \left(\frac{c_2(\psi,\kappa)}{2\pi}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|K_X\|_{X_\psi\to W(h,X)} \leq \left(\frac{2\pi}{c_1(\psi,\kappa)}\right)^{1/2}. \tag{7.9}$$

Здесь κ — любое положительное число, такое, что спектр оператора A является подмножеством луча $[\kappa,+\infty)$, где A — порождающий оператор для пары X. Поскольку пара X нормальна, то $\operatorname{spec} A \subseteq [1,+\infty)$; значит, в оценках (7.9) можно взять $\kappa = 1$. Аналогично и для пары Y. В частности, справедливы оценки

$$\|R_Y\|_{W(h,Y)\to Y_\psi} \leq \left(\frac{c_2(\psi,1)}{2\pi}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|K_X\|_{X_\psi\to W(h,X)} \leq \left(\frac{2\pi}{c_1(\psi,1)}\right)^{1/2}. \tag{7.10}$$

Далее, ограниченный оператор $T\colon X_j \to Y_j$, $j = 0,1$, естественным образом определяет ограниченный оператор $T\colon L_2(\mathbb{R},X_j) \to L_2(\mathbb{R},Y_j)$. В самом деле, для произвольной вектор-функции $u \in L_2(\mathbb{R},X_j)$ справедливо

$$\|Tu\|^2_{L_2(\mathbb{R},Y_j)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|Tu(t)\|^2_{Y_j}\,dt \leq$$

$$\leq \|T\|^2_{X_j\to Y_j} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|u(t)\|^2_{X_j}\,dt = \|T\|^2_{X_j\to Y_j}\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_j)}.$$

Значит,

$$\|T\|_{L_2(\mathbb{R},X_j)\to L_2(\mathbb{R},Y_j)} \leq \|T\|_{X_j\to Y_j} \quad \text{при} \quad j = 0,1.$$

Отсюда для произвольного $u \in W(h,X)$ имеем (см. доказательство теоремы 2.1)

$$\|Tu\|_{W(h,Y)} = \left(\|\widehat{Tu}\|^2_{L_2(\mathbb{R},Y_1)} + \|h\widehat{Tu}\|^2_{L_2(\mathbb{R},Y_0)}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\|T\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},Y_1)} + \|Th\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},Y_0)}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\|T\|^2_{X_1\to Y_1}\,\|\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_1)} + \|T\|^2_{X_0\to Y_0}\,\|h\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_0)}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \max\left\{\,\|T\|_{X_j\to Y_j} : j = 0,1\right\}\,\|u\|_{W(h,X)}.$$

Итак,

$$\|T\|_{W(h,X)\to W(h,Y)} \leq \max\left\{\,\|T\|_{X_j\to Y_j} : j = 0,1\right\}. \tag{7.11}$$

В доказательстве теоремы 2.1 было установлено равенство $T = R_Y T K_X$ на пространствеX_ψ. Отсюда в силу оценок (7.10), (7.11) следует неравенство (7.7), где постоянная

$$c_\psi := \left(\frac{c_2(\psi,1)}{c_1(\psi,1)}\right)^{1/2}$$

не зависит от X, Y и T.

Лемма 7.1 доказана.

В п. 3 (теорема 3.5) установлен следующий результат.

Предложение 7.3. *Пусть задано функцию* $\varphi \in \mathcal{M}$ *и положительные числа* ε, δ. *Положим* $\psi(t) := t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ *при* $t \geq 1$ *и* $\psi(t) := \varphi(1)$ *при* $0 < t < 1$. *Тогда*:

а) *функция* ψ *удовлетворяет всем условиям предложения* 7.2, *где* $\theta = \varepsilon/(\varepsilon+\delta)$, *и, значит, является интерполяционным параметром*;

б) *для произвольного* $s \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие равенства пространств с точностью до эквивалентности норм в них*:

$$\left[H^{s-\varepsilon}(\Omega), H^{s+\delta}(\Omega)\right]_\psi = H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{и} \quad \left[H^{s-\varepsilon}(\Gamma), H^{s+\delta}(\Gamma)\right]_\psi = H^{s,\varphi}(\Gamma). \qquad (7.12)$$

Мы сейчас уточним этот результат для пространств, нормы которых определенным образом зависят от числового параметра.

Пусть $s > 0$, $\varphi \in \mathcal{M}$ и $\rho \geq 1$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)$ пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$, наделенное нормой, зависящей от параметра ρ следующим образом:

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)} := \left(\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \rho^{2s}\varphi^2(\rho)\,\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Это определение корректно, поскольку в силу (5.4) справедливо непрерывное вложение $H^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$. Отсюда и из положительности функции φ вытекает, что нормы в пространствах $H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)$ и $H^{s,\varphi}(\Omega)$ эквивалентны. Норма в пространстве $H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)$ порождена скалярным произведением

$$\big(u,v\big)_{H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)} := \big(u,v\big)_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \rho^{2s}\varphi^2(\rho)\,\big(u,v\big)_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно, это пространство гильбертово.

Заменив в наших построениях Ω на Γ, получим гильбертово пространства $H^{s,\varphi}(\Gamma,\rho)$, совпадающее с пространством $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ с точностью до эквивалентности норм. Как и прежде, в случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначениях пространств опускаем.

В силу предложения 7.2 пространства $\left[H^{s-\varepsilon}(\Omega,\rho), H^{s+\delta}(\Omega,\rho)\right]_\psi$ и $H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)$ равны с точностью до эквивалентных норм (то же и для пространств на крае Γ). Оказывается, в оценках норм этих пространств можно выбрать постоянные так, чтобы они не зависели от параметра ρ.

Лемма 7.2. *Пусть задано функцию* $\varphi \in \mathcal{M}$ *и положительные числа* s, ε, δ, *причем* $s - \varepsilon > 0$. *Тогда существует такое число* $c = c(s,\varphi,\varepsilon,\delta) \geq 1$, *что для произвольных* $\rho \geq 1$, $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ *справедлива двусторонняя оценка норм*

$$c^{-1}\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)} \leq \|u\|_{[H^{s-\varepsilon}(\Omega,\rho),H^{s+\delta}(\Omega,\rho)]_\psi} \leq c\|u\|_{H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)}. \qquad (7.13)$$

Здесь ψ — *интерполяционный параметр из формулировки предложения* 7.3. *Лемма сохраняет силу, если в ее формулировке заменить* Ω *на* Γ.

Доказательство. Мы установим оценку (7.13) последовательно для пространств, определенных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n)\colon x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ и на многообразии Ω. Доказательство для пространств на крае Γ аналогично (и проще). Пусть параметр $\rho \geq 1$. Заменив в определении пространства $H^{s,\varphi}(\Omega, \rho)$ символ Ω на $\mathbb{R}^n$ и затем на $\mathbb{R}^n_+$, получим гильбертовы пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n, \rho)$ и $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ соответственно. Далее рассуждения проведем в три шага.

Шаг 1. Докажем оценку (7.13) для пространств в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что [2, с. 353]

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho)} = \Big(\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} + \rho^{2s}\varphi^2(\rho)\,\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2\big(\langle\xi\rangle\big) + \rho^{2s}\varphi^2(\rho)\Big)\big|\widehat{u}(\xi)\big|^2 d\xi\right)^{1/2}, \tag{7.14}$$

где $\langle\xi\rangle = \big(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2\big)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, а $\widehat{u}$ — преобразование Фурье распределения u. Наряду с (7.14) рассмотрим еще одну гильбертову норму распределения u:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\langle\xi\rangle + \rho\big)^{2s}\varphi^2\big(\langle\xi\rangle + \rho\big)\big|\widehat{u}(\xi)\big|^2 d\xi\right)^{1/2}. \tag{7.15}$$

Нормы (7.14) и (7.15) эквивалентны, причем постоянны, с помощью которых одна норма оценивается через другую, не зависят от параметра ρ. Это непосредственно следует из леммы 7.3, которая будет установлена сразу после доказательства настоящей леммы. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\rho)$ гильбертово пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, наделенное нормой (7.15) и соответствующим скалярным произведением. Имеем

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho)} \asymp \|u\|_{H^{s,\varphi}(\rho)} \quad \text{при } \ u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n),\ \rho > 0. \tag{7.16}$$

Проинтерполируем пару $\big[H^{s-\varepsilon}(\rho), H^{s+\delta}(\rho)\big]$ с параметром ψ (ср. с [2, с. 354]). Псевдодифференциальный оператор A_ρ с символом $\big(\langle\xi\rangle + \rho\big)^{\varepsilon+\delta}$ является порождающим для этой пары. С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}\colon H^{s-\varepsilon}(\rho) \leftrightarrow L_2\big(\mathbb{R}^n, (\langle\xi\rangle+\rho)^{2(s-\varepsilon)}d\xi\big)$ оператор $\psi(A_\rho)$ приведен к виду умножения на функцию $\psi\big((\langle\xi\rangle + \rho)^{(\varepsilon+\delta)}\big) = (\langle\xi\rangle + \rho)^{\varepsilon}\varphi(\langle\xi\rangle + \rho)$ аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\|u\|^2_{[H^{s-\varepsilon}(\rho),H^{s+\delta}(\rho)]_\psi} = \|\psi(A_\rho)u\|^2_{H^{s-\varepsilon}(\rho)} + \|u\|^2_{H^{s-\varepsilon}(\rho)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\langle\xi\rangle + \rho\big)^{2(s-\varepsilon)}\psi^2\big((\langle\xi\rangle + \rho)^{\varepsilon+\delta}\big)\big|\widehat{u}(\xi)\big|^2 d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\langle\xi\rangle + \rho\big)^{2(s-\varepsilon)}\big|\widehat{u}(\xi)\big|^2 d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\langle\xi\rangle + \rho\big)^{2s}\varphi^2\big(\langle\xi\rangle + \rho\big)\Big(1 + \varphi^{-2}\big(\langle\xi\rangle + \rho\big)\big(\langle\xi\rangle + \rho\big)^{-2\varepsilon}\Big)\big|\widehat{u}(\xi)\big|^2 d\xi.$$

Поскольку $\varphi \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$, то $t^\varepsilon\varphi(t) \to \infty$ при $t \to +\infty$ и, значит, функция $1 + \varphi^{-2}(t)t^{-2\varepsilon}$ ограничена на множестве $[1, +\infty)$. Следовательно,

$$\|u\|_{[H^{s-\varepsilon}(\rho),H^{s+\delta}(\rho)]_\psi} \asymp \|u\|_{H^{s,\varphi}(\rho)} \quad \text{при } \ u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), \ \rho > 0. \tag{7.17}$$

Заметим, что

$$\|u\|_{[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho),H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n,\rho)]_\psi} \asymp \|u\|_{[H^{s-\varepsilon}(\rho),H^{s+\delta}(\rho)]_\psi} \quad \text{при} \quad u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), \quad \rho > 0. \tag{7.18}$$

В самом деле, тождественный оператор I осуществляет топологические изоморфизмы

$$I\colon H^\sigma(\mathbb{R}^n,\rho) \leftrightarrow H^\sigma(\rho), \quad \text{где} \quad \sigma \in \{s-\varepsilon, s+\delta\}, \tag{7.19}$$

причем, поскольку

$$\|u\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^n,\rho)} \asymp \|u\|_{H^\sigma(\rho)} \quad \text{при} \quad u \in H^\sigma(\mathbb{R}^n), \quad \rho > 0,$$

нормы оператора (7.19) и обратного к нему ограничены равномерно по ρ. Отсюда в силу леммы 7.1 получаем топологический изоморфизм

$$I\colon \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n,\rho)\right]_\psi \leftrightarrow \left[H^{s-\varepsilon}(\rho), H^{s+\delta}(\rho)\right]_\psi,$$

где нормы прямого и обратного операторов ограничены равномерно по ρ. Последнее означает эквивалентность (7.18).

Теперь соотношения (7.16) – (7.18) влекут эквивалентность норм

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho)} \asymp \|u\|_{[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n,\rho),H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n,\rho)]_\psi} \quad \text{при} \quad u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), \quad \rho > 0, \tag{7.20}$$

т. е. оценку (7.13) для пространств в $\mathbb{R}^n$.

Шаг 2. Докажем оценку (7.13) для пространств в $\mathbb{R}^n_+$. Обозначим через R_+ линейный оператор сужения распределения с пространства $\mathbb{R}^n$ в полупространство $\mathbb{R}^n_+$. Поскольку

$$\|R_+u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{и} \quad \|R_+u\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|u\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^n)},$$

нормы операторов

$$R_+\colon H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho) \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+,\rho) \tag{7.21}$$

и

$$R_+\colon H^\sigma(\mathbb{R}^n,\rho) \to H^\sigma(\mathbb{R}^n_+,\rho), \quad \text{где} \quad \sigma \in \{s-\varepsilon, s+\delta\}, \tag{7.22}$$

не превышают числа 1. Применив к операторам (7.22) интерполяцию с параметром ψ, получим в силу леммы 7.1 и эквивалентности (7.20) оператор

$$R_+ : H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n,\rho) \to \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+,\rho), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+,\rho)\right]_\psi, \tag{7.23}$$

норма которого ограничена равномерно по параметру ρ.

Далее, согласно [8, с. 265] существует линейный ограниченный оператор

$$T_+ \colon H^{\sigma}(\mathbb{R}^n_+) \to H^{\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad \sigma \in \{0, s-\varepsilon, s+\delta\}, \tag{7.24}$$

продолжающий распределение с полупространства $\mathbb{R}^n_+$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Применив интерполяцию с параметром ψ, получим в силу теорем 3.1 и 3.3 [2, с. 354] ограниченный оператор

$$T_+ \colon H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+) \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда непосредственно следует, что нормы операторов

$$T_+ \colon H^{\sigma}(\mathbb{R}^n_+, \rho) \to H^{\sigma}(\mathbb{R}^n, \rho) \quad \text{при} \quad \sigma \in \{s-\varepsilon, s+\delta\}, \tag{7.25}$$

$$T_+ \colon H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+, \rho) \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n, \rho) \tag{7.26}$$

ограничены равномерно по параметру ρ. Применив к операторам (7.25) интерполяцию с параметром ψ, получим на основании леммы 7.1 и эквивалентности (7.20) оператор

$$T_+ \colon \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+, \rho), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+, \rho)\right]_{\psi} \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n, \rho), \tag{7.27}$$

норма которого также ограничена равномерно по ρ.

Заметим, что оператор $R_+T_+ = I$ тождественный. Поэтому из равномерной ограниченности по параметру ρ норм операторов (7.27), (7.22) и (7.26), (7.23) следует раномерная ограниченность по ρ норм операторов вложения

$$I = R_+T_+ \colon \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+, \rho), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+, \rho)\right]_{\psi} \to H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+, \rho),$$

$$I = R_+T_+ \colon H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+, \rho) \to \left[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+, \rho), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+, \rho)\right]_{\psi}.$$

Это означает, что

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+,\rho)} \asymp \|u\|_{[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n_+,\rho), H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n_+,\rho)]_{\psi}} \quad \text{при} \quad u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n_+), \quad \rho > 0, \tag{7.28}$$

т. е. оценка (7.13) справедлива для пространств в $\mathbb{R}^n_+$.

Шаг 3. Опираясь на эквивалентности (7.20) и (7.28), установим, наконец, оценку (7.13). Обратимся к доказательству теоремы 3.5 [2, с. 359] и рассмотрим использованные там линейные операторы „распрямления” и „склейки”, обозначенные через T и K соответственно. Эти операторы имеют свойство $KT = I$ и ограничены в таких пространствах:

$$T \colon H^{\sigma,\varphi}(\Omega) \to \prod_{j=1}^{r} H^{\sigma,\varphi}(\Pi_j) \quad \text{и} \quad K \colon \prod_{j=1}^{r} H^{\sigma,\varphi}(\Pi_j) \to H^{\sigma,\varphi}(\Omega)$$

для любых $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Здесь Π_j обозначает либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathbb{R}^n_+$. Отсюда непосредственно вытекает равномерная ограниченность по параметру ρ норм следующих операторов:

$$T\colon\, H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)\rightarrow\prod_{j=1}^{r}H^{s,\varphi}(\Pi_{j},\rho), \tag{7.29}$$

$$T\colon\, H^{\sigma}(\Omega,\rho)\rightarrow\prod_{j=1}^{r}H^{\sigma}(\Pi_{j},\rho)\quad\text{при}\quad\sigma\in\{s-\varepsilon,s+\delta\}, \tag{7.30}$$

$$K\colon\,\prod_{j=1}^{r}H^{s,\varphi}(\Pi_{j},\rho)\rightarrow H^{s,\varphi}(\Omega,\rho), \tag{7.31}$$

$$K\colon\,\prod_{j=1}^{r}H^{\sigma}(\Pi_{j},\rho)\rightarrow H^{\sigma}(\Omega,\rho)\quad\text{при}\quad\sigma\in\{s-\varepsilon,s+\delta\}. \tag{7.32}$$

Применим к операторам (7.30) и (7.32) интерполяцию с параметром ψ. На основании леммы 7.1, эквивалентностей (7.20), (7.28) и предложения 2.1 об интерполяции прямых произведений пространств [1, с. 235] получим операторы

$$T\colon\,\left[H^{s-\varepsilon}(\Omega,\rho),H^{s+\delta}(\Omega,\rho)\right]_{\psi}\rightarrow\prod_{j=1}^{r}H^{s,\varphi}(\Pi_{j},\rho), \tag{7.33}$$

$$K\colon\,\prod_{j=1}^{r}H^{s,\varphi}(\Pi_{j},\rho)\rightarrow\left[H^{s-\varepsilon}(\Omega,\rho),H^{s+\delta}(\Omega,\rho)\right]_{\psi}, \tag{7.34}$$

нормы которых также ограничены равномерно по ρ.

Напомним, что $KT=I$. Поэтому из равномерной ограниченности по параметру ρ норм операторов (7.33), (7.31) и (7.29), (7.34) следует равномерная ограниченность по ρ норм операторов вложения

$$I=KT\colon\,\left[H^{s-\varepsilon}(\Omega,\rho),H^{s+\delta}(\Omega,\rho)\right]_{\psi}\rightarrow H^{s,\varphi}(\Omega,\rho),$$

$$I=KT\colon\, H^{s,\varphi}(\Omega,\rho)\rightarrow\left[H^{s-\varepsilon}(\Omega,\rho),H^{s+\delta}(\Omega,\rho)\right]_{\psi}.$$

Отсюда непосредственно получаем оценку (7.13).

Лемма 7.2 доказана.

В доказательстве леммы 7.2 был использован следующий результат.

Лемма 7.3. *Пусть $s>0$, $\varphi\in\mathcal{M}$ и $\varphi_s(t):=t^s\varphi(t)$ при $t\geq 1$. Тогда существует такое число $c_0=c_0(s,\varphi)\geq 1$, что*

$$c_0^{-1}\varphi_s(t_1+t_2)\leq\varphi_s(t_1)+\varphi_s(t_2)\leq c_0\varphi_s(t_1+t_2)\;\;\textit{для любых}\;\; t_1,t_2\geq 1. \tag{7.35}$$

Доказательство. Поскольку функция φ_s правильно меняющаяся на $+\infty$ порядка s по Карамата, то $\varphi_s(2t)/\varphi_s(t)\rightarrow 2^s$ при $t\rightarrow+\infty$. Отсюда вытекает, что $\varphi_s(2t)\asymp\varphi_s(t)$ при $t\geq b$ для некоторого числа $b\geq 1$. Здесь, как обычно, символ $\asymp$ обозначает слабую эквивалентность положительных функций при указанных значениях их аргументов. Кроме того, $\varphi_s(t)\asymp 1\asymp\varphi_s(2t)$ при $1\leq t\leq b$. Следовательно,

$$\varphi_s(2t)\asymp\varphi_s(t)\quad\text{при}\quad t\geq 1. \tag{7.36}$$

Далее, поскольку функция φ является медленно меняющейся на $+\infty$ по Карамата, то [21, с. 15] $\varphi(t) \asymp \varphi_0(t)$ при $t \gg 1$ для некоторой положительной функции φ_0, дифференцируемой в окрестности $+\infty$ и удовлетворяющей условию $t\varphi_0'(t)/\varphi_0(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда получаем: $\varphi_s(t) \asymp t^s\varphi_0(t)$ при $t \gg 1$ и

$$\frac{\bigl(t^s\varphi_0(t)\bigr)'}{t^{s-1}\varphi_0(t)} = s + \frac{t\varphi_0'(t)}{\varphi_0(t)} \to s > 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Значит, $\bigl(t^s\varphi_0(t)\bigr)' > 0$ при $t \gg 1$, т. е. функция $\psi(t) := t^s\varphi_0(t)$ возрастает на множестве $[b, +\infty)$, где число $b \gg 1$. Доопределив $\psi(t) := b^s\varphi_0(b)$ при $1 \le t \le b$, получим функцию ψ, возрастающую (нестрого) на $[1, +\infty)$ и удовлетворяющую условию

$$\varphi_s(t) \asymp \psi(t) \quad \text{при} \quad t \ge 1. \tag{7.37}$$

Теперь соотношение (7.35) вытекает из формул (7.36), (7.37) и возрастания функции ψ. В самом деле, для каждого номера $j = 1, 2$ можем записать

$$\varphi_s(t_j) \asymp \psi(t_j) \le \psi(t_1 + t_2) \asymp \varphi_s(t_1 + t_2) \quad \text{при} \quad t_1, t_2 \ge 1.$$

Поэтому существует число $c_1 > 0$ такое, что

$$\varphi_s(t_1) + \varphi_s(t_2) \le c_1\varphi_s(t_1 + t_2) \quad \text{при} \quad t_1, t_2 \ge 1. \tag{7.38}$$

Обратно, предполагая без потери общности, что $t_1 \le t_2$, имеем

$$\varphi_s(t_1 + t_2) \asymp \psi(t_1 + t_2) \le \psi(2t_2) \asymp \varphi_s(2t_2) \asymp$$

$$\asymp \varphi_s(t_2) \le \varphi_s(t_1) + \varphi_s(t_2) \quad \text{при} \quad t_1, t_2 \ge 1.$$

Следовательно, существует число $c_2 > 0$ такое, что

$$\varphi_s(t_1 + t_2) \le c_2\bigl(\varphi_s(t_1) + \varphi_s(t_2)\bigr) \quad \text{при} \quad t_1, t_2 \ge 1. \tag{7.39}$$

Соотношения (7.38) и (7.39) означают двустороннее неравенство (7.35), что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 7.2.

***Доказательство теоремы* 7.2.** Пусть $s > 2k$, $\varphi \in \mathcal{M}$, а параметр $q \in K$ такой, что $|q| \ge \max\{q_0, 1\}$, где число $q_0 > 0$ взято из формулировки теоремы 7.1. Положим $\varepsilon = \delta = (s - 2k)/2 > 0$. Согласно предложению 7.1 справедливы топологические изоморфизмы

$$\Lambda(q)\colon H^{s\mp\varepsilon}(\Omega, |q|) \leftrightarrow H^{s\mp\varepsilon-2k}(\Omega, |q|) \times \prod_{j=1}^{k} H^{s\mp\varepsilon-m_j-1/2}(\Gamma, |q|) :=$$

$$=: \mathcal{H}_{s\mp\varepsilon}(\Omega, \Gamma, |q|), \tag{7.40}$$

причем нормы оператора (7.40) и обратного к нему оператора ограничены равномерно по параметру q. (Заметим, что мы перешли в оценке (7.4) к гильбертовым нормам.) Пусть ψ — интерполяционный параметр из формулировки предложения 7.3. Применив интерполяцию с этим параметром к оператору (7.40), получим изоморфизм

$$\Lambda(q)\colon \bigl[H^{s-\varepsilon}(\Omega,|q|),H^{s+\varepsilon}(\Omega,|q|)\bigr]_{\psi}\leftrightarrow\bigl[\mathcal{H}_{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma,|q|),\mathcal{H}_{s+\varepsilon}(\Omega,\Gamma,|q|)\bigr]_{\psi}. \quad (7.41)$$

В силу леммы 7.1 норма оператора (7.41) вместе с нормой обратного оператора ограничена равномерно по параметру q. Далее, согласно предложению 2.1 об интерполяции прямых произведений пространств можем записать

$$\bigl[\mathcal{H}_{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma,|q|),\mathcal{H}_{s+\varepsilon}(\Omega,\Gamma,|q|)\bigr]_{\psi}=\bigl[H^{s-\varepsilon-2k}(\Omega,|q|),H^{s+\varepsilon-2k}(\Omega,|q|)\bigr]_{\psi}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k}\Bigl[H^{s-\varepsilon-m_j-1/2}(\Gamma,|q|),H^{s+\varepsilon-m_j-1/2}(\Gamma,|q|)\Bigr]_{\psi}$$

с равенством норм. Отсюда в силу леммы 7.2 и (7.41) получаем изоморфизм

$$\Lambda(q)\colon\ H^{s,\varphi}(\Omega,|q|)\leftrightarrow H^{s-2k,\varphi}(\Omega,|q|)\times\prod_{j=1}^{k}H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma,|q|)$$

такой, что нормы прямого и обратного операторов ограничены равномерно по параметру q. Это непосредственно дает оценку (7.6).

Теорема 7.2 доказана.

***Следствие* 7.1.** *Пусть краевая задача* (7.1), (7.2) *эллиптическая с параметром на некотором замкнутом луче* $K:=\{q\in\mathbb{C}\colon\ \arg q=\mathrm{const}\}$. *Тогда ограниченный оператор*

$$\Lambda(q)\colon H^{s,\varphi}(\Omega)\to\mathcal{H}_{s,\varphi}(\Omega,\Gamma),\quad \textit{где}\quad s>m+1/2,\ \varphi\in\mathcal{M}, \qquad (7.42)$$

имеет нулевой индекс при любом $q\in\mathbb{C}$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $q\in\mathbb{C}$ задача (7.1), (7.2) эллиптическая. Поэтому в силу предложения 5.1 оператор (7.42) имеет конечный индекс, не зависящий от s и φ. Кроме того [20, с. 96], этот индекс не зависит и от параметра q. Согласно теореме 7.1 при достаточно большом $|q|$, $q\in K$, оператор (7.42) является изоморфизмом, и поэтому его индекс равен нулю. Отсюда заключаем, что индекс оператора равен нулю при любом значении $q\in\mathbb{C}$.

8. Заключительные замечания. Отметим также другие результаты по теории эллиптических операторов и эллиптических краевых задач в уточненных шкалах пространств из работ [22–27], которые примыкают к изложенным выше.

1. *Эллиптические краевые задачи в двусторонних* (*полных*) *уточненных шкалах* [22, 25, 26]. Для того чтобы оператор эллиптической краевой задачи (5.1), (5.2) оставался ограниченным в двусторонней шкале пространств с произвольным $s\in\mathbb{R}$, необходимо подходящим образом сузить класс обобщенных решений, наложив дополнительные условия на правые части задачи. В статье [25] изучалась краевая задача для однородного эллиптического дифференциального уравнения $(f=0)$, а в статьях [22, 26] — эллиптическая задача с однородными краевыми

условиями (все $g_j = 0$). Для таких полуоднородных эллиптических задач доказаны теоремы об ограниченности и фредгольмовости порожденных ими операторов в двусторонних уточненных шкалах.

2. *Формально смешанные эллиптические краевые задачи* [27]. Пусть край многообразия состоит из нескольких непустых связных компонент, а порядки краевых дифференциальных операторов, вообще говоря, различны на разных компонентах. Тогда упомянутые выше результаты об эллиптических краевых задачах сохраняют силу.

3. *Эллиптические операторы на замкнутом многообразии* [24]. Доказано, что такие дифференциальные операторы ограничены и фредгольмовы в *двусторонней* уточненной шкале пространств. Дано альтернативное (эквивалентное) описание уточненной шкалы на замкнутом многообразии с помощью некоторых правильно меняющихся по Карамата функций от оператора Лапласа – Бельтрами на многообразии.

4. *Эллиптические системы и краевые задачи для них*. Все упомянутые выше результаты сохраняют силу и для систем уравнений, эллиптических по Петровскому или по Дуглису – Ниренбергу.

К отмеченным работам примыкает также статья [23], посвященная интерполяции с функциональным параметром и ее приложению к уточненным шкалам.

1. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2. – С. 217 – 235.
2. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Там же. – № 3. – С. 352 – 370.
3. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
4. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.
5. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
6. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci., 79. Part. Different. Equat. – Berlin: Springer, 1997. – P. 1 – 144.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
8. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
9. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1987. – 696 с.
11. *Nirenberg L.* Remarks on strongly elliptic partial differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1955. – **8**, № 4. – P. 648 – 674.
12. *Browder F. E.* On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations // Ibid. – 1956. – **9**, № 3. – P. 351 – 361.
13. *Schechter M.* A local regularity theorem // J. Math. and Mech. – 1961. – **10**, № 2. – P. 279 – 288.
14. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптичеких уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 745 – 748.
15. *Schechter M.* On L_p estimates and regularity. I // Amer. J. Math. – 1963. – **85**, № 1. – P. 1 – 13.
16. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
17. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – 427 p.

18. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Communs Pure and Appl. Math. – 1962. – **15**, № 2. – P. 119 – 147.
19. *Agmon S., Nirenberg L.* Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Ibid. – 1963. – **16**, № 2. – P. 121 – 239.
20. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.
21. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
22. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 689 – 696.
23. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Интерполяция пространств с функциональным параметром и пространства дифференцируемых функций // Допов. НАН України. – 2006. – № 6. – С. 13 – 18.
24. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Там же. – № 10. – С. 27 – 33.
25. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1536 – 1555.
26. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. вісн. – 2006. – **3**, № 4. – С. 547 – 580.
27. *Мурач А. А.* Эллиптические краевые задачи в многосвязных областях в уточненной шкале пространств // Допов. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 29 – 35.

Получено 29.12.2006