УДК 517.9

Д. З. Аров, Н. А. Роженко (Южноукр. пед. ун-т, Одесса)

ПАССИВНЫЕ СИСТЕМЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ С ПОТЕРЯМИ КАНАЛОВ РАССЕЯНИЯ

A new model of the passive impedance system with minimal losses of scattering channels and with bilaterally stable evolution semigroup is studied. In the case of discrete time, the passive linear stationary bilaterally stable impedance system Σ is considered as a part of some minimal scattering-impedance lossless transmission system, that has a $(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$-unitary system operator and a bilaterally (J_1, J_2)-inner (in certain weak sense) transmission function in the unit disk 22-block of which coincides with the impedance matrix of system Σ, belongs to the Caratheodory class, and has a pseudocontinuation. If the external space of the system Σ is infinite-dimensional, then instead of the last mentioned property, we consider more complicated necessary and sufficient conditions on the impedance matrix of the system Σ. Different kinds of passive bilaterally stable impedance realizations with minimal losses of scattering channels (minimal, optimal, $*$-optimal, minimal and optimal, minimal and $*$-optimal) are studied.

Розглянуто нову модель пасивної системи опору з мінімальними втратами каналів розсіяння і двостороннє стійкою еволюційною півгрупою. У випадку дискретного часу пасивну лінійну стаціонарну двостороннє стійку систему опору Σ розглядають як частину деякої мінімальної системи проходження без втрат, системний оператор якої є $(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$-унітарним і яка має двостороннє (J_1, J_2)-внутрішню (у певному слабкому сенсі) передавальну функцію в одиничному крузі з 22-блоком, котрий збігається з матрицею опору системи Σ, належить класу Каратеодорі і має псевдопродовження. Якщо зовнішній простір системи Σ є нескінченновимірним, то замість останньої властивості розглядають більш ускладнені необхідну і достатню умови для матриці опору системи Σ. Вивчаються пасивні двостороннє стійкі імпедансні реалізації з мінімальними втратами каналів розсіяння: мінімальні, оптимальні, $*$-оптимальні, мінімальні й оптимальні, мінімальні й $*$-оптимальні.

1. Введение. Многие работы М. Г. Крейна связаны в той или иной степени с теорией консервативных линейных стационарных систем. Например, работы по теории самосопряженных расширений симметрических операторов, в частности формула по описанию обобщенных резольвент симметрического оператора, базирующаяся на введенном и изученном им понятии резольвентной матрицы [1], исследования по струне Крейна – Феллера и связанным с ними обратным задачам для уравнения Шредингера и системы Дирака [2, 3], работы по теории характеристических функций несамосопряженных операторов [4 – 8] имеют определенную интерпретацию в теории консервативных линейных стационарных систем сопротивления, рассеяния и прохождения. И это не удивительно, так как теория линейных стационарных пассивных систем (см. [9, 10]) тесным образом связана с теорией линейных операторов в гильбертовых пространствах и аналитических оператор-функций специальных классов (Шура, Каратеодори, Потапова, Харди, Неванлинны, Смирнова), уравнениями математической физики и теорией рассеяния, теорией стохастических процессов, т. е. с теми направлениями в развитии математики и ее приложений, которым посвящены работы М. Г. Крейна.

Теория линейных стационарных консервативных систем сопротивления с дискретным временем развивалась в рамках традиционной спектральной теории унитарных операторов в пространствах Гильберта, в то время как теория консервативных систем рассеяния и прохождения с дискретным временем — это, по существу, теория сжимающих и неунитарных операторов и соответствующих унитарных и (J_1, J_2)-унитарных узлов. Начало развития последней было заложено в работах М. С. Лившица, его учеников и коллег, где передаточные функции систем называются характеристическими функциями, так как они определяют простую консервативную систему с точностью до унитарного подобия (см. [11, 12]).

Теории пассивных линейных стационарных систем с потерями каналов рассеяния посвящена серия работ первого автора [13 – 20]. В ней важное место занимает развитие метода Дарлингтона реализации таких систем на случай нерациональных передаточных функций, матриц рассеяния и сопротивления. Это привело к выделению класса матриц рассеяния и сопротивления, имеющих мероморфное псевдопродолжение в нефизическую область Ω_e (внешность единичного круга $\Omega = D$ для систем с дискретным временем и внешность правой или верхней полуплоскости $\Omega = \mathbb{C}_+$ для систем с непрерывным временем) с ограниченной характеристикой Неванлинны в Ω_e. Основное внимание при этом было уделено системам рассеяния, меньше — системам сопротивления, которым посвящена работа [13] (см. также [16]). Интерес к последним был вызван у авторов настоящей работы изучением работ [21 – 23], в которых на языке стохастических реализаций рассматриваются, по существу, консервативные и пассивные линейные стационарные системы сопротивления с минимальными потерями каналов рассеяния и матрицами сопротивления, спектральная плотность которых является некасательным граничным значением функции с ограниченной характеристикой Неванлинны, т. е. с матрицами сопротивления упомянутого выше класса, хотя это условие и не оговорено в этих работах. Для таких матриц сопротивления в [17, 19] было рассмотрено представление по Дарлингтону в виде дробно-линейного преобразования над постоянной матрицей с J_p-внутренней матрицей-функцией коэффициентов, где

$$J_p = \begin{bmatrix} 0 & -I_p \\ -I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

В работе [24] было предложено и исследовано иное представление матриц сопротивления (матриц-функций класса Каратеодори), имеющих псевдопродолжение, которое может рассматриваться как аналог Д-представления матрицы рассеяния в виде блока двусторонне внутренней функции, исследованного первым автором в [17, 18, 14] и независимо Девилдом (см. [25]), а также Хелтоном и Дугласом в [26]. В предложенном аналоге матрица сопротивления $c(z)$ представляется в виде 22-блока $J_{p,m}$-внутренней матрицы-функции

$$A(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & \delta(z) & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta(z) = c(z), \qquad \text{с} \quad J_{p,m} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \\ 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix},$$

где m — минимальное число потерянных каналов рассеяния, определяемое по формуле $m = m_c$,

$$m_c = \operatorname{rank} \operatorname{Re} c(\zeta) \qquad \text{почти всюду при} \quad \zeta \in \partial\Omega.$$

В настоящей работе прослеживается двусторонняя связь между различными типами этих представлений (минимальными, оптимальными и др.) и соответствующими пассивными реализациями (минимальными, оптимальными и др.) аналогично тому, как это было сделано в работе [14] для Д-представлений матриц рассеяния, изучаются произвольные пассивные системы сопротивления с потерями каналов рассеяния, а затем с основными операторами сжатия классов $C_{0\cdot}$, $C_{\cdot 0}$ и C_{00} в смысле, определенном в [27].

Обычно пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$ называется системой без потерь, если $m_c = 0$, т. е. если $\operatorname{Re} c(\zeta) = 0$ почти всюду на $\partial\Omega$ (в слабом смысле, если $\dim U = \infty$). В настоящей работе под системой сопротивления без потерь каналов рассеяния будем понимать такую систему с матрицей сопротивления $c(z)$, для которой факторизационные неравенства

$$\varphi(z)^*\varphi(z) \leq 2\operatorname{Re} c(z), \qquad \psi(z)\psi(z)^* \leq 2\operatorname{Re} c(z), \quad z \in \Omega,$$

имеют лишь нулевые решения в классах аналитических в Ω функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, значениями которых являются линейные ограниченные операторы, действующие между гильбертовыми пространствами. В противном случае система сопротивления называется системой с потерями каналов рассеяния (см. пп. 2.3). Предложенное здесь определение равносильно стандартному в случае, когда $c(z)$ имеет псевдопродолжение в Ω_e, а в общем случае оно охватывает более широкий класс пассивных систем сопротивления без потерь каналов рассеяния.

Итак, в работе исследуются пассивные системы сопротивления с потерями каналов рассеяния. Более того, основные результаты относятся к случаю, когда обе вышеупомянутые факторизационные задачи имеют ненулевые решения, а пассивным системам сопротивления с основным оператором класса C_{00} соответствуют пассивные системы с потерями, для которых имеют ненулевые решения даже факторизационные уравнения

$$\varphi(\zeta)^*\varphi(\zeta) = 2\operatorname{Re} c(\zeta), \qquad \psi(\zeta)\psi(\zeta)^* = 2\operatorname{Re} c(\zeta) \quad \text{почти всюду на} \quad \partial\Omega,$$

понимаемые в общем случае для оператор-функций в слабом смысле (см. пп. 2.3).

В работе рассматриваются линейные системы с дискретным временем, и для них областью Ω является открытый единичный круг D в комплексной плоскости. Полученные результаты могут быть перенесены на системы с непрерывным временем стандартным методом, путем рассмотрения преобразования Келли над системами, операторами и комплексным аргументом (см., например, [15]).

Используемые обозначения и терминология. Все рассматриваемые в работе пространства Гильберта предполагаются сепарабельными, что не будет оговариваться в дальнейшем, а под подпространством понимается замкнутый линеал в этом пространстве;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ — открытый единичный круг;

$D_e = \{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| \leqslant \infty\}$ — внешность единичного круга в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;

I_X — единичный оператор в пространстве X;

$\overline{\mathfrak{L}}$ — замыкание множества $\mathfrak{L}$ в рассматриваемом гильбертовом пространстве;

$\bigvee\limits_{n} \mathfrak{D}_n$ — наименьшее подпространство, содержащее все $\mathfrak{D}_n$ в рассматриваемом гильбертовом пространстве;

$P_{\mathfrak{D}}$ — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{D}$;

$T|_{\mathfrak{D}}$ — сужение оператора T на подпространство $\mathfrak{D}$;

$\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A;

Λ_A — множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых существует ограниченный обратный оператор $(I - zA)^{-1}$ на всем пространстве, а также $z = \infty$, если A ограниченно обратим, $\Lambda_A^+ := \Lambda_A \cap D$;

$\mathbb{B}(U, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U в Y, $\mathbb{B}(U) := \mathbb{B}(U, U)$;

$L^2(U)$ — гильбертово пространство слабо измеримых при $|\zeta| = 1$ функций $h(\zeta)$ со значениями из U таких, что

$$\|h\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\zeta|=1} \left\|h(\zeta)\right\|^2 |d\zeta| \left(= \sum_{-\infty}^{\infty} \|h_k\|^2 \right) < \infty,$$

где $h(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k \zeta^k$ — разложение в ряд Фурье функции $h \in L^2(U)$;

$H^2(U) = \left\{ h(\zeta) \in L^2(U) \colon h(\zeta) = \sum_{0}^{\infty} h_k \zeta^k \right\}$ — пространство, отождествляемое с пространством Харди функций $h(z) = \sum_{0}^{\infty} h_k z^k$, действующих из D в гильбертово пространство U таких, что $\|h\|^2 = \sum_{0}^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty$, путем отождествления функции $h(z)$ с ее граничным значением $h(\zeta)$;

$K^2(U) = \left\{ h(\zeta) \in L^2(U) \colon h(\zeta) = \sum_{-\infty}^{-1} h_k \zeta^k \right\}$ $(= L^2(U) \ominus H^2(U))$;

$H^2(U, Y)$ — класс голоморфных в D функций $h(z)$ со значениями из $\mathbb{B}(U, Y)$ таких, что $h(z)u \in H^2(Y)$ для любого $u \in U$;

$\ell(U)$ — класс голоморфных в D функций (z) со значениями из $\mathbb{B}(U)$, имеющих $\operatorname{Re} c(z) \geq 0$ в D;

$S(U, Y)$ — класс голоморфных в D функций $b(z)$ со значениями из $\mathbb{B}(U, Y)$, имеющих $\|b(z)\| \leq 1$ в D;

S — класс скалярных функций $b(z)$, голоморфных и имеющих $|b(z)| \leq 1$ в D;

вместо $s - \lim$ в дальнейшем будем писать $\lim$;

$f^{\sim}(z) = f(\overline{z})^*$, $f^{\#}(z) = f\big(1/\overline{z}\big)^*$.

2. Предварительные сведения. В этом пункте в основном изложены результаты теории пассивных линейных стационарных динамических систем сопротивления, рассеяния и прохождения, рассмотренные в работах [13 – 16], а также в [28].

2.1. Общие сведения о линейных стационарных динамических системах. Эволюция линейной стационарной динамической системы с дискретным временем $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ описывается уравнениями

$$x(n+1) = Ax(n) + Bu(n),$$

$$y(n) = Cx(n) + Du(n),$$

где $x(n) \in X$, $u(n) \in U$, $y(n) \in Y$, $n \geq 0$, X, U, Y — некоторые гильбертовы пространства, и

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{B}(X \oplus U, X \oplus Y).$$

Пусть

$$X_\Sigma^c = \bigvee_{k\geq 0} A^k BU, \qquad X_\Sigma^o = \bigvee_{k\geq 0} (A^*)^k C^* Y.$$

Система Σ называется управляемой, если $X = X_\Sigma^c$, наблюдаемой, если $X = X_\Sigma^o$, и простой, если $X = X_\Sigma^c \vee X_\Sigma^o$.

Система $\hat{\Sigma} = \big(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}; \hat{X}, U, Y\big)$ называется дилатацией системы $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$, если для некоторых подпространств $\mathfrak{D}_*$ и $\mathfrak{D}$ пространства $\hat{X}$ имеем

$$\hat{X} = \mathfrak{D}_* \oplus X \oplus \mathfrak{D}, \quad \hat{A}^*\mathfrak{D}_* \subset \mathfrak{D}_*, \quad \hat{A}\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}, \quad \hat{B}^*\mathfrak{D}_* = \{0\}, \quad \hat{C}\mathfrak{D} = \{0\}$$

и

$$A = P_X \hat{A}|_X, \qquad B = P_X \hat{B}, \qquad C = \hat{C}|_X, \qquad D = \hat{D}. \tag{2.1}$$

При этом система Σ называется сужением системы $\hat{\Sigma}$. Система Σ называется минимальной, если она не имеет нетривиальных сужений, т. е. не является дилатацией никакой другой системы. Известно, что система Σ является минимальной тогда и только тогда, когда она управляема и наблюдаема, т. е. когда $X = X_\Sigma^c = X_\Sigma^o$.

Передаточная функция системы Σ определяется по формуле

$$\theta_\Sigma(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B, \quad z \in \Lambda_A.$$

Две системы $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i; X_i, U, Y)$, $i = 1, 2$, называются подобными (унитарно подобными), если существует оператор $R \in \mathbb{B}(X_1, X_2)$ с $R^{-1} \in \mathbb{B}(X_2, X_1)$ (или, соответственно, унитарный оператор) такой, что

$$A_2 = RA_1R^{-1}, \qquad B_2 = RB_1, \qquad C_2 = C_1R^{-1}.$$

Для голоморфных в окрестности точки $z = 0$ функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ пишут $f_1 \simeq f_2$, если $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Если $\hat{\Sigma}$ — дилатация системы Σ, то $\theta_{\hat{\Sigma}} \simeq \theta_\Sigma$. Если $\theta \simeq \theta_\Sigma$, то система Σ называется реализацией функции $\theta(z)$, если, кроме того, Σ – минимальная система, то она называется минимальной реализацией функции $\theta(z)$.

Если для основного оператора A системы Σ выполняется условие

$$\text{a)} \ \lim_{n\to\infty} A^n = 0, \qquad \text{или} \qquad \text{b)} \ \lim_{n\to\infty} (A^*)^n = 0,$$

или оба условия одновременно, то система Σ называется соответственно устойчивой, $*$-устойчивой или двусторонне устойчивой. Если при этом A — сжатие, то записывают: a) $A \in C_{0\cdot}$, b) $A \in C_{\cdot 0}$ или $A \in C_{00}$ соответственно.

2.2. Пассивные системы сопротивления. Система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ называется пассивной системой сопротивления, если $Y = U$ и для любого $x(0) \in \in X$ и любой последовательности входных данных $\{u(k)\}_0^\infty$ при всех $n \geq 0$ выполняется условие

$$\big\|x(n+1)\big\|^2 - \|x(n)\|^2 \leq \left(J \begin{bmatrix} y(n) \\ u(n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y(n) \\ u(n) \end{bmatrix}\right)_{U \oplus U}, \quad \text{где } J = \begin{bmatrix} 0 & I_U \\ I_U & 0 \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем систему $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, U)$ будем обозначать короче: $\Sigma = = (A, B, C, D; X, U)$.

Другими словами, условие пассивности системы Σ можно записать в виде

$$\big\|x(n+1)\big\|^2 - \|x(n)\|^2 \leq 2 \operatorname{Re} \big(y(n), u(n)\big)_U,$$

что, в свою очередь, равносильно первому из двух следующих эквивалентных неравенств для коэффициентов системы Σ и сопряженной системы $\Sigma_* := (A^*, C^*, B^*, D^*; X, U)$:

$$\begin{bmatrix} I - A^*A & C^* - A^*B \\ C - B^*A & 2\operatorname{Re} D - B^*B \end{bmatrix} \geq 0, \qquad \begin{bmatrix} I - AA^* & B - AC^* \\ B^* - CA^* & 2\operatorname{Re} D - CC^* \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.2}$$

Если в каждом из этих неравенств вместо знака $\geq$ имеет место знак $=$, то Σ называется консервативной системой сопротивления. Из этого определения видно, что система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ является консервативной системой сопротивления тогда и только тогда, когда ее основной оператор A является унитарным в X, $C = B^*A$ и $2\operatorname{Re} D = B^*B$. Такая система является простой тогда и только тогда, когда

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} A^n BU = X.$$

Передаточные функции $\theta_\Sigma(z)$ пассивных систем сопротивления называются матрицами сопротивления (импедансными матрицами). Они голоморфны в D, так как из (2.2) следует, что A — сжатие, и потому $D \subset \Lambda_A$. Более того, их сужения на D составляют класс $\ell(U)$ голоморфных в D функций $c(z)$ со значениями из $\mathbb{B}(U)$, имеющих $\operatorname{Re} c(z) \geq 0$ в D.

Если функция $c \in \ell(U)$, то для нее существуют ортогональное разложение единицы $\tilde{E}_\mu$ в некотором гильбертовом пространстве $\tilde{X}$ и оператор $\tilde{B} \in \mathbb{B}(U, \tilde{X})$ такие, что $\tilde{X} = \bigvee\limits_{\mu \in [-\pi, \pi]} \tilde{E}_\mu \tilde{B} U$ и

$$c(z) = i \operatorname{Im} c(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\mu} + z}{e^{i\mu} - z} d\sigma(\mu), \qquad \sigma(\mu) = \pi \tilde{B}^* \tilde{E}_\mu \tilde{B}.$$

Функция $\sigma(\mu)$ называется спектральной функцией функции $c(z)$. Говорят, что функция $c \in \ell(U)$ имеет абсолютно непрерывную спектральную функцию, если при любом $u \in U$ функции $(\sigma(\mu)u, u)_U$ являются абсолютно непрерывными на промежутке $[-\pi, \pi]$. Рассмотрим систему $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{X}, U)$ с коэффициентами

$$\tilde{A} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\mu} d\tilde{E}_\mu, \qquad \tilde{C} = \tilde{B}^* \tilde{A}, \qquad \tilde{D} = i \operatorname{Im} c(0) + \frac{1}{2} \tilde{B}^* \tilde{B}.$$

Она является простой консервативной системой сопротивления, и $\theta_{\tilde{\Sigma}}(z) = c(z)$ при $z \in D$. Простая консервативная система сопротивления определяется по матрице сопротивления с точностью до унитарного подобия.

Пассивная система сопротивления $\Sigma_o = (A_o, B_o, C_o, D_o; X_o, U)$ с матрицей сопротивления $\theta_{\Sigma_o}(z)$ называется оптимальной, если для любой другой пассивной системы сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) \equiv \equiv \theta_{\Sigma_o}(z)$ в D при любых $u(k) \in U$ и $n \geq 0$ выполняется условие

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A_o^k B_o u(k) \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} A^k B u(k) \right\|. \tag{2.3}$$

Для оптимальной системы сопротивления Σ_o всегда $X^c_{\Sigma_o} \subset X^o_{\Sigma_o}$. Поэтому управляемая оптимальная система сопротивления всегда является наблюдаемой, а значит, и минимальной.

Наблюдаемая пассивная система сопротивления Σ_1 называется $*$-оптимальной, если для любой другой наблюдаемой пассивной системы сопротивления Σ с той же матрицей сопротивления в D имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} A^k B u(k) \right\| \leq \left\| \sum_{k=0}^{n} A_1^k B_1 u(k) \right\| \quad \forall u(k), \quad n \geq 0.$$

Из произвольной консервативной системы сопротивления $\hat{\Sigma}$ с матрицей сопротивления $\theta_{\hat{\Sigma}} = c (\in \ell(U))$ в D можно получить минимальные пассивные системы сопротивления $\Sigma_\circ$ и $\Sigma_\bullet$ сужением $\hat{\Sigma}$ по формулам (2.1) на подпространства $X = X_\circ$ и $X = X_\bullet$ соответственно, где

$$X_\circ = \overline{P_{X^o_{\hat{\Sigma}}} X^c_{\hat{\Sigma}}}, \qquad X_\bullet = \overline{P_{X^c_{\hat{\Sigma}}} X^o_{\hat{\Sigma}}}. \tag{2.4}$$

Более того, полученные минимальные пассивные системы сопротивления $\Sigma_\circ$ и $\Sigma_\bullet$ являются оптимальной и $*$-оптимальной соответственно. Для функции $c \in \ell(U)$ минимальная оптимальная и минимальная $*$-оптимальная реализации определяются с точностью до унитарного подобия.

2.3. Пассивные системы сопротивления с потерями и без потерь каналов рассеяния. Пусть $c \in \ell(U)$. Рассмотрим голоморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из D в $\mathbb{B}(U, Y_\varphi)$ и $\mathbb{B}(U_\psi, U)$ соответственно (Y_φ и U_ψ — некоторые пространства Гильберта), удовлетворяющие факторизационным неравенствам

$$\text{a)}\ \varphi(z)^* \varphi(z) \leq 2 \operatorname{Re} c(z), \qquad \text{b)}\ \psi(z)\psi(z)^* \leq 2 \operatorname{Re} c(z), \quad z \in D. \tag{2.5}$$

Множество решений этих неравенств содержит максимальные решения φ_c и ψ_c со значениями из $\mathbb{B}(U, Y_{\varphi_c})$ и $\mathbb{B}(U_{\psi_c}, U)$ соответственно, такие, что для всех остальных решений φ и ψ имеем

$$\text{a) } \varphi(z)^*\varphi(z) \le \varphi_c(z)^*\varphi_c(z), \qquad \text{b) } \psi(z)\psi(z)^* \le \psi_c(z)\psi_c(z)^*, \quad z \in D. \quad (2.6)$$

Они определяются по $c(z)$ с точностью до постоянных унитарных множителей слева для φ_c и справа для ψ_c. Существование и в существенном единственность таких решений можно получить применением соответствующего результата о решении факторизационного неравенства для неотрицательнозначных оператор-функций на единичной окружности $|\zeta| = 1$, изложенного в [27] (предложения 4.1, 4.2). Из (2.5) и того факта, что $c \in \ell(U)$, следует, что для решений $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ задач (2.5) имеем $\varphi(z)u \in H^2(Y_\varphi)$ и $\psi^\sim(z)u \in H^2(U_\psi)$ для любых $u \in U$, т. е. $\varphi \in H^2(U, Y_\varphi)$ и $\psi^\sim \in H^2(U, U_\psi)$. Также для $\varphi(r\zeta)u$ существует некасательное граничное значение в сильном смысле почти всюду при $|\zeta| = 1$ (будем обозначать его $\varphi(\zeta)u$); оно принадлежит $L^2(Y_\varphi)$. Соответствующие рассуждения имеют место и для $\psi^\sim$.

Будем называть решения φ и ψ задач (2.5) решениями с минимальными потерями, если

$$\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \zeta^k \varphi(\zeta)U = L^2(Y_\varphi), \qquad \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \zeta^k \psi(\zeta)^* U = L^2(U_\psi).$$

Заметим, что функции φ_c и ψ_c являются решениями задач (2.5) с минимальными потерями, более того, максимальное решение φ_c задачи a) в (2.5) является внешней функцией, т. е. $\bigvee_{n \ge 0} z^n \varphi_c(z)U = H^2(Y_{\varphi_c})$, а решение ψ_c задачи b) в (2.5) — $*$-внешняя функция; это означает, что $\psi_c^\sim$ является внешней функцией. Произвольные решения φ и ψ факторизационных задач (2.5) описываются формулами

$$\varphi = b_1 \varphi_c, \qquad \psi = \psi_c b_2,$$

где $b_1 \in S(Y_{\varphi_c}, Y_\varphi)$ и $b_2 \in S(U_\psi, U_{\psi_c})$. Функция $b \in S(U, Y)$, некасательные граничные значения $b(\zeta)$ которой являются изометрическими ($*$-изометрическими или унитарными) почти всюду при $|\zeta| = 1$, называется внутренней ($*$-внутренней или, соответственно, двусторонне внутренней). Произвольная функция φ из $H^2(U, Y_\varphi)$ имеет в существенном единственную факторизацию $\varphi = b_i \varphi_e$, где b_i — внутренняя, φ_e — внешняя функции. Аналогично, для $\psi^\sim \in H^2(U, U_\psi)$ справедливо в существенном единственное представление $\psi = \psi_{*e} b_{*i}$, где $\psi_{*e}^\sim$ — внешняя и $b_{*i}^\sim$ — внутренняя функции. Решения φ и ψ задач (2.5) являются решениями с минимальными потерями тогда и только тогда, когда b_i и b_{*i} в этих факторизациях являются двусторонне внутренними функциями.

Если Σ — простая консервативная система сопротивления с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) \equiv c(z)$ в D, то она наблюдаема тогда и только тогда, когда $\varphi_c = 0$; управляема тогда и только тогда, когда $\psi_c = 0$; минимальна в том и только в том случае, когда $\varphi_c = \psi_c = 0$. Если $c \in \ell(U)$ и $\varphi_c = 0$ или $\psi_c = 0$, то все минимальные пассивные системы сопротивления с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) \equiv c(z)$ в D унитарно подобны. Если $\varphi_c = 0$ и $\psi_c = 0$, то они являются консервативными.

Назовем пассивную систему сопротивления Σ с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) \equiv c(z)$ в D системой без потерь каналов рассеяния, если факторизационные неравенства (2.5) имеют лишь нулевое решение. В противном случае будем называть систему Σ системой с потерями каналов рассеяния. Произвольная простая пассивная система сопротивления без потерь каналов рассеяния является консервативной и минимальной.

Настоящая работа посвящена исследованию пассивных систем сопротивления с потерями каналов рассеяния, т. е. мы будем рассматривать случай, когда $\varphi_c \neq 0$ или $\psi_c \neq 0$, а, в основном, случай, когда $\varphi_c \neq 0$ и $\psi_c \neq 0$.

Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ — простая консервативная система сопротивления с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) \equiv c(z)$ в D и $\varphi_c \neq 0$. Тогда Σ не является наблюдаемой. Обозначим $\mathfrak{D}_+ = X \ominus X^o_\Sigma$. Будем иметь $A\mathfrak{D}_+ \subset \mathfrak{D}_+$, $C\mathfrak{D}_+ = \{0\}$. Более того, оператор $V_+ := A|_{\mathfrak{D}_+} (\in \mathbb{B}(\mathfrak{D}_+))$ является простым полуунитарным, т. е. отображающим $\mathfrak{D}_+$ изометрически в себя и не имеющим унитарной части.

Если для системы Σ выполняется условие $\psi_c \neq 0$, то для подпространства $\mathfrak{D}_- := X \ominus X^c_\Sigma$ получим $A^*\mathfrak{D}_- \subset \mathfrak{D}_-$, $B^*\mathfrak{D}_- = \{0\}$, и оператор $V_- := A^*|_{\mathfrak{D}_-}$ $\big(\in \mathbb{B}(\mathfrak{D}_-)\big)$ будет простым полуунитарным.

Консервативная система сопротивления $\hat\Sigma = (\hat A, \hat B, \hat C, \hat D; \hat X, U)$, являющаяся дилатацией пассивной системы сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$, называется минимальной консервативной дилатацией Σ, если она не является дилатацией никакой другой консервативной системы сопротивления, которая также является дилатацией системы Σ. Такая минимальная консервативная дилатация определяется по Σ с точностью до унитарного подобия с оператором подобия R таким, что $RX = X$. Если при этом система $\hat\Sigma$ является простой, то исходная система Σ называется *системой с минимальными потерями каналов рассеяния*. Таким образом, произвольная пассивная система сопротивления Σ с минимальными потерями является сужением некоторой простой консервативной системы сопротивления $\hat\Sigma$.

Пусть теперь Σ — пассивная система сопротивления, не являющаяся консервативной. Рассмотрим консервативную систему сопротивления $\hat\Sigma = (\hat A, \hat B, \hat C, \hat D; \hat X, U)$, которая является минимальной дилатацией Σ. Тогда существуют подпространства $\mathfrak{D}_\pm \subset \hat X$ такие, что

$$\hat X = \mathfrak{D}_- \oplus X \oplus \mathfrak{D}_+, \qquad \hat A^{\pm 1}\mathfrak{D}_\pm \subset \mathfrak{D}_\pm, \qquad \hat B^*\mathfrak{D}_- = \{0\}, \qquad \hat C\mathfrak{D}_+ = \{0\}.$$

Операторы $V_\pm = \hat A^{\pm 1}|_{\mathfrak{D}_\pm}$ являются простыми полуунитарными. Они интерпретируются как внутренние каналы рассеяния консервативной системы $\hat\Sigma$, которые теряются при переходе от $\hat\Sigma$ к системе Σ, а для Σ являются внешними потерянными каналами рассеяния.

Минимальную консервативную дилатацию $\hat\Sigma$ системы Σ можно сузить до минимальной оптимальной $\Sigma_\circ$ и минимальной $*$-оптимальной $\Sigma_\bullet$ пассивных систем сопротивления, как было показано выше. Тогда для $\Sigma_\circ$, $\Sigma_\bullet$ и исходной системы Σ будем иметь

$$\mathfrak{D}_+ \subset \overset{\circ}{\mathfrak{D}}_+ (= \hat X \ominus X^o_{\hat\Sigma}), \qquad \mathfrak{D}_- \subset \overset{\bullet}{\mathfrak{D}}_- (= \hat X \ominus X^c_{\hat\Sigma}).$$

Важным для нас будет случай, когда существуют решения $\varphi \in H^2(U, Y_\varphi)$ и $\psi^\sim \in H^2(U, U_\psi)$ факторизационных уравнений

$$\text{a)}\ \varphi(\zeta)^*\varphi(\zeta) = 2\operatorname{Re} c(\zeta), \quad \text{b)}\ \psi(\zeta)\psi(\zeta)^* = 2\operatorname{Re} c(\zeta) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1. \tag{2.7}$$

Равенства (2.7) понимаются в том смысле, что для любого $u \in U$ почти всюду при $|\zeta| = 1$

$$\text{a)}\ \lim_{r\uparrow 1} \|\varphi(r\zeta)u\|^2 = \lim_{r\uparrow 1} 2\operatorname{Re}(c(r\zeta)u, u), \quad \text{b)}\ \lim_{r\uparrow 1} \|\psi(r\zeta)^*u\|^2 = \lim_{r\uparrow 1} 2\operatorname{Re}(c(r\zeta)u, u)$$

соответственно. Определение решений с минимальными потерями факторизационных задач (2.5), введенное выше, а также соответствующее заключение для максимальных решений этих задач имеют место и для решений задач (2.7). В случае разрешимости задач (2.7) множества их решений соответственно описываются формулами

$$\text{a)}\ \varphi(z) = b_1(z)\varphi_c(z), \qquad \text{b)}\ \psi(z) = \psi_c(z)b_2(z),$$

где φ_c — внешнее решение задачи a) в (2.7) со значениями из $\mathbb{B}(U, Y_{\varphi_c})$, ψ_c — $*$-внешнее решение задачи b) в (2.7) со значениями из $\mathbb{B}(U_{\psi_c}, U)$, а b_1 и b_2 — произвольные внутренняя и $*$-внутренняя функции со значениями из $\mathbb{B}(Y_{\varphi_c}, Y_\varphi)$ и $\mathbb{B}(U_\psi, U_{\psi_c})$ соответственно; $\dim Y_{\varphi_c} \le \dim Y_\varphi$, $\dim U_{\psi_c} \le \dim U_\psi$. Решения φ и ψ факторизационных задач (2.7) являются решениями с минимальными потерями тогда и только тогда, когда функции b_1 и b_2 являются двусторонне внутренними функциями.

При нормировке $\varphi_c(0)|_{Y_{\varphi_c}} > 0$, $\psi_c(0)^*|_{U_{\psi_c}} > 0$, $Y_{\varphi_c} \subset U$, $U_{\psi_c} \subset U$ функции φ_c и ψ_c однозначно определяются по c. В случае, когда $\dim U < \infty$, размерность пространств Y_{φ_c} и U_{ψ_c} определяется равенством $\dim Y_{\varphi_c} = \operatorname{rank}\operatorname{Re} c(\zeta) = \dim U_{\psi_c}$ почти всюду при $|\zeta| = 1$, так что в случае разрешимости факторизационных задач (2.7)

$$m_c = \operatorname{rank}\operatorname{Re} c(\zeta)\ (= \dim \operatorname{Re} c(\zeta)U)$$

постоянен почти всюду при $|\zeta| = 1$.

В работе [16] была введена функция $s_c(\zeta)$, определяемая одним из соотношений

$$\text{a)}\ s_c(\zeta)\psi_c(\zeta)^* = \varphi_c(\zeta), \qquad \text{b)}\ s_c(\zeta)^*\varphi_c(\zeta) = \psi_c(\zeta)^* \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1, \tag{2.8}$$

где $\varphi_c \in H^2(U, Y_{\varphi_c})$ и $\psi_c^\sim \in H^2(U, U_{\psi_c})$ — внешнее и $*$-внешнее решения факторизационных задач соответственно a) и b) в (2.7), а $s_c(\zeta)$ — измеримая в слабом смысле $\mathbb{B}(U_{\psi_c}, Y_{\varphi_c})$-значная в существенном ограниченная функция $\big(s_c \in L^\infty(U_{\psi_c}, Y_{\varphi_c})\big)$. Равенства в (2.8) понимаются в следующем смысле: для любых $u \in U$ почти всюду при $|\zeta| = 1$

$$\text{a)}\ s_c(\zeta)\lim_{r\uparrow 1} \psi_c(r\zeta)^*u = \lim_{r\uparrow 1} \varphi(r\zeta)u, \qquad \text{b)}\ s_c(\zeta)^*\lim_{r\uparrow 1} \varphi_c(r\zeta)u = \lim_{r\uparrow 1} \psi_c(r\zeta)^*u.$$

Функция $s_c(\zeta)$ является субоператором рассеяния в смысле [29] унитарного сцепления $\hat{A}$ простых полуунитарных операторов $V_+ = \hat{A}|_{\overset{\circ}{\mathfrak{D}}_+}$ и $V_- = \hat{A}^*|_{\overset{\bullet}{\mathfrak{D}}_-}$, где $\hat{A}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}_+$ и $\overset{\bullet}{\mathfrak{D}}_-$ определены выше по простой консервативной системе сопротивления $\hat{\Sigma}$ с матрицей сопротивления $c(z)$. Она принимает унитарные значения почти всюду на единичной окружности, т. е.

$$s_c(\zeta)^* s_c(\zeta) = I_{U_\psi}, \qquad s_c(\zeta) s_c(\zeta)^* = I_{Y_\varphi} \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1. \tag{2.9}$$

Доказательство этого факта в случае, когда $\dim U < \infty$, см. в [24], а в общем случае — в [16, с. 801] (предложение 6). Свойство унитарности s_c означает, что

$$\bigvee_{n \geq 0} \hat{A}^n \, \overset{\bullet}{\mathfrak{D}}_- = \bigvee_{n \geq 0} (\hat{A}^*)^n \, \overset{\circ}{\mathfrak{D}}_+ \, .$$

Функция s_c будет играть важную роль в дальнейших рассмотрениях.

2.4. Консервативные системы рассеяния. Система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ называется консервативной системой рассеяния, если для любого $x(0) \in X$ и любого набора входных данных $\big\{u(n)\big\}_0^\infty$ выполняется условие

$$\|x(n+1)\|^2 - \|x(n)\|^2 = \|u(n)\|^2 - \|y(n)\|^2,$$

а также имеет место аналогичное равенство для сопряженной системы $\Sigma_* = (A^*, C^*, B^*, D^*; X, Y, U)$. Другими словами, условие консервативности записывается в виде равенства

$$\big\|x(n+1)\big\|^2 - \|x(n)\|^2 = \left(j \begin{bmatrix} u(n) \\ y(n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u(n) \\ y(n) \end{bmatrix} \right)_{U \oplus Y}, \quad j = \begin{bmatrix} I_U & 0 \\ 0 & -I_Y \end{bmatrix},$$

и двойственного равенства для системы Σ_*. То, что система рассеяния Σ является консервативной, означает, что оператор

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Big(\in \mathbb{B}(X \oplus U, X \oplus Y) \Big)$$

является унитарным, т. е. имеют место равенства

$$\begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* = 0.$$

Передаточная функция $\theta_\Sigma(z)$ системы рассеяния называется матрицей рассеяния. Известно, что матрица рассеяния произвольной консервативной системы рассеяния принадлежит классу $S(U, Y)$. Произвольная функция $\theta(z)$ класса $S(U, Y)$ является матрицей рассеяния некоторой простой консервативной системы рассеяния, определяемой по θ с точностью до унитарного подобия.

Простая консервативная система рассеяния является устойчивой, $*$-устойчивой или двусторонне устойчивой тогда и только тогда, когда ее матрица рассеяния является внутренней, *-внутренней или двусторонне внутренней функцией соответственно.

Через $S_{in}(U, Y)$ будем обозначать подкласс функций $b(z)$ класса $S(U, Y)$, являющихся двусторонне внутренними.

2.5. Консервативные системы прохождения. Пусть $J_1 \in \mathbb{B}(\tilde{U})$ и $J_2 \in \mathbb{B}(\tilde{Y})$ — сигнатурные операторы , т. е. $J_i^* = J_i$, $i = 1, 2$; $J_1^2 = I_{\tilde{U}}$, $J_2^2 = I_{\tilde{Y}}$. Ими определяются индефинитные метрики в $\tilde{U}$ и $\tilde{Y}$:

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u}' \rangle = (J_1 \tilde{u}, \tilde{u}'), \qquad \langle \tilde{y}, \tilde{y}' \rangle = (J_2 \tilde{y}, \tilde{y}')$$

для любых $\tilde{u}, \tilde{u}'$ из $\tilde{U}$ и $\tilde{y}, \tilde{y}'$ из $\tilde{Y}$. Пусть $J_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -J_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}(\tilde{U} \oplus \tilde{Y})$. Система $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}; \tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{Y})$ называется консервативной системой прохождения, если при любых $x(0) \in \tilde{X}$ и $\{\tilde{u}(k)\}_0^\infty$ выполняется условие

$$\left\| x(n+1) \right\|^2 - \|x(n)\|^2 = \left(J_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \begin{bmatrix} \tilde{u}(n) \\ \\ \tilde{y}(n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{u}(n) \\ \\ \tilde{y}(n) \end{bmatrix} \right)$$

и двойственное равенство выполняется для сопряженной системы $\tilde{\Sigma}^*_{J_1,J_2} = (\tilde{A}^*, \tilde{C}^*, \tilde{B}^*, \tilde{D}^*; \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{U})$ с $J_{\tilde{\Sigma}^*_{J_1,J_2}} = \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & -J_1 \end{bmatrix}$. То, что $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ является консервативной системой прохождения, означает, что оператор

$$M_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \big(\in \mathbb{B}(\tilde{X} \oplus \tilde{U}, \tilde{X} \oplus \tilde{Y}) \big)$$

является $(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$-унитарным, т. е.

$$M^*_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \tilde{J}_2 M_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} = \tilde{J}_1, \qquad M_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \tilde{J}_1 M^*_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} = \tilde{J}_2,$$

где $\tilde{J}_i = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix}$, $i = 1, 2$.

Передаточная функция $\theta_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}}$ консервативной системы прохождения называется матрицей прохождения. Если $\Lambda^+_{\tilde{A}} \neq \varnothing$, то сужение матрицы прохождения $\theta_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}}(z)$ на $\Lambda^+_{\tilde{A}}$ принадлежит классу $P_{J_1,J_2}(\Lambda^+_{\tilde{A}}; \tilde{U}, \tilde{Y})$ (см. [15, 30]). В частности, если область Ω совпадает с D за возможным исключением множества изолированных точек, то $\theta_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \in P_{J_1,J_2}(\Omega; \tilde{U}, \tilde{Y})$ тогда и только тогда, когда $\theta_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}}(z)$ голоморфна в Ω и принимает двусторонне (J_1, J_2)-сжимающие значения, т. е.

$$\theta_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}}(z)^* J_2 \theta_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \le J_1, \qquad \theta_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}}(z) J_1 \theta^*_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \le J_2, \quad z \in \Omega.$$

Известно, что произвольная линейная стационарная динамическая система Σ может быть получена из некоторой консервативной системы прохождения Σ_{J_1,J_2} путем потери внешних каналов рассеяния (см. [20]). А именно, говорят, что система Σ является частью системы $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ (или Σ вложена в $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$) и получается из $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ потерей внешних каналов рассеяния, если: 1) для системы Σ пространство внутренних состояний X то же, что и для $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$, т. е. $X = \tilde{X}$; 2) внешние пространства U и Y системы Σ являются подпространствами соответствующих внешних пространств $\tilde{U}$ и $\tilde{Y}$ системы $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$, так что $\tilde{U} = U \oplus U_1$, $\tilde{Y} = Y \oplus Y_1$; 3) для коэффициентов систем Σ и $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ имеем

$$A = \tilde{A}, \qquad B = \tilde{B}|_U, \qquad C = P_Y\tilde{C}, \qquad D = P_Y\tilde{D}|_U.$$

В дальнейшем для произвольной пассивной системы сопротивления Σ с потерями каналов рассеяния будем рассматривать как ее вложение в некоторую консервативную систему прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$, так и построение по Σ консервативной системы сопротивления $\hat{\Sigma}$, являющейся дилатацией Σ.

3. Консервативные системы прохождения типа SI. ***3.1. Вложение пассивной системы сопротивления в консервативную систему прохождения типа SI.*** Рассмотрим пассивную систему сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ с матрицей сопротивления $c \in \ell(U)$, не являющуюся консервативной. Первое из условий пассивности (2.2) выполняется тогда и только тогда, когда существует оператор $[M\ N] \in \mathbb{B}(X \oplus U, Y_1)$ такой, что

$$\begin{bmatrix} I - A^*A & C^* - A^*B \\ C - B^*A & 2\operatorname{Re} D - B^*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^* \\ N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Условие (3.1) равносильно системе равенств

$$I - A^*A = M^*M, \qquad C - B^*A = N^*M, \qquad 2\operatorname{Re} D - B^*B = N^*N. \tag{3.2}$$

Первое равенство в (3.2) означает, что $V_0 = \begin{bmatrix} A \\ M \end{bmatrix} \in \mathbb{B}(X, X \oplus Y_1)$ — изометрический оператор, т. е. $V_0^* \in \mathbb{B}(X \oplus Y_1, X)$ является $*$-изометрическим. Оператор V_0^* можно растянуть до изометрического оператора $V^* \in \mathbb{B}(X \oplus Y_1, X \oplus U_1)$:

$$V^* = \begin{bmatrix} A^* & M^* \\ K^* & S^* \end{bmatrix}.$$

В этом случае имеют место равенства

$$I - AA^* = KK^*, \qquad AM^* = -KS^*, \qquad I - MM^* = SS^*. \tag{3.3}$$

Растяжение V^* может быть выбрано минимальным в том смысле, что если $u_1 \in U_1$ такой, что $0 \oplus u_1 \perp V^*(X \oplus Y_1)$, то $u_1 = 0$. Таковым, например, является растяжение

$$V^* = \begin{bmatrix} V_0^* \\ (I - V_0V_0^*)^{1/2} \end{bmatrix},$$

где $U_1 = \overline{(I - V_0V_0^*)^{1/2}(X \oplus Y_1)}$.

Лемма 3.1. *Минимальное изометрическое расширение V^* $*$-изометрического оператора V_0^* является унитарным оператором.*

Утверждение леммы легко проверяется и является известным (см., например, [26], где оно применяется).

Из (3.2) видно, что

$$C = B^*A + N^*M = \begin{bmatrix} B^* & N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ M \end{bmatrix}.$$

Положим

$$L = \begin{bmatrix} B^* & N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ S \end{bmatrix} = B^*K + N^*S. \tag{3.4}$$

Тогда $\begin{bmatrix} C & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^* & N^* \end{bmatrix} V$, откуда

$$\begin{bmatrix} B \\ N \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} C^* \\ L^* \end{bmatrix}.$$

Из этого равенства получаем

$$B = AC^* + KL^*, \qquad N = MC^* + SL^*, \tag{3.5}$$

а также

$$\begin{bmatrix} B^* & N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^* \\ L^* \end{bmatrix},$$

или, другими словами, $B^*B+N^*N = CC^*+LL^*$, откуда $2\operatorname{Re} D - CC^* = 2\operatorname{Re} D - B^*B - N^*N + LL^* = LL^*$. Таким образом,

$$\begin{bmatrix} I - AA^* & B - AC^* \\ B^* - CA^* & 2\operatorname{Re} D - CC^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KK^* & KL^* \\ LK^* & LL^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^* \\ L^* \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ — пассивная система сопротивления, операторы $K \in \mathbb{B}(U_1, X)$, $M \in \mathbb{B}(X, Y_1)$, $N \in \mathbb{B}(U, Y_1)$, $S \in \mathbb{B}(U_1, Y_1)$, $L \in \mathbb{B}(U_1, U)$ определены формулами* (3.2) – (3.6), *а система $\breve{\Sigma} = (\breve{A}, \breve{B}, \breve{C}, \breve{D}; X, U_1 \oplus U, Y_1 \oplus Y)$, где $\breve{A} = A$, $\breve{B} = \begin{bmatrix} K & B \end{bmatrix}$, $\breve{C} = \begin{bmatrix} M \\ C \end{bmatrix}$, $\breve{D} = \begin{bmatrix} S & N \\ L & D \end{bmatrix}$. Тогда система $\breve{\Sigma}$ такова, что при*

$$J = \begin{bmatrix} J_{U_1,Y_1} & 0 \\ 0 & -J_U \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad J_{U_1,Y_1} = \begin{bmatrix} I_{U_1} & 0 \\ 0 & -I_{Y_1} \end{bmatrix}, \quad J_U = \begin{bmatrix} 0 & -I_U \\ -I_U & 0 \end{bmatrix},$$

выполняется равенство

$$\left\|x(n+1)\|^2-\|x(n)\right\|^2=\left(J\begin{bmatrix}u_1(n)\\ y_1(n)\\ u(n)\\ y(n)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_1(n)\\ y_1(n)\\ u(n)\\ y(n)\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(=\left(J_{U_1,Y_1}\begin{bmatrix}u_1(n)\\ y_1(n)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_1(n)\\ y_1(n)\end{bmatrix}\right)-\left(J_U\begin{bmatrix}u(n)\\ y(n)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u(n)\\ y(n)\end{bmatrix}\right)\right).$$

Сопряженная система $\breve{\Sigma}_*=(\breve{A}^*,\breve{C}^*,\breve{B}^*,\breve{D}^*;X,Y_1\oplus Y,U_1\oplus U)$ *является таковой, что для нее выполняется двойственное равенство при*

$$J_*=\begin{bmatrix}J_{Y_1,U_1} & 0\\ 0 & -J_U\end{bmatrix},\quad \textit{где}\quad J_{Y_1,U_1}=\begin{bmatrix}I_{Y_1} & 0\\ 0 & -I_{U_1}\end{bmatrix}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\|x(n+1)\right\|^2-\|x(n)\|^2=$$

$$=\left(\begin{bmatrix}A^*A-I & A^*K & A^*B\\ K^*A & K^*K & K^*B\\ B^*A & B^*K & B^*B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(n)\\ u_1(n)\\ u(n)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x(n)\\ u_1(n)\\ u(n)\end{bmatrix}\right),$$

$$\left(J\begin{bmatrix}u_1(n)\\ y_1(n)\\ u(n)\\ y(n)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_1(n)\\ y_1(n)\\ u(n)\\ y(n)\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{bmatrix}0 & M^* & 0 & C^*\\ I_{U_1} & S^* & 0 & L^*\\ 0 & N^* & I_U & D^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{U_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -I_{Y_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_U\\ 0 & 0 & I_U & 0\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix}0 & I_{U_1} & 0\\ M & S & N\\ 0 & 0 & I_U\\ C & L & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(n)\\ u_1(n)\\ u(n)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x(n)\\ u_1(n)\\ u(n)\end{bmatrix}\right)=$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -M^*M & -M^*S & -M^*N + C^* \\ -S^*M & I_{U_1} - S^*S & -S^*N + L^* \\ -N^*M + C & -N^*S + L & -N^*N + 2\operatorname{Re} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ u_1(n) \\ u(n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(n) \\ u_1(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \right).$$

Равенство правой и левой частей следует из тождеств (3.2) – (3.6). Соответственное равенство для сопряженной системы доказывается аналогично.

Рассмотрим операторы

$$J_1 = J_{U_1,U} = \begin{bmatrix} I_{U_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_U \\ 0 & -I_U & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad J_2 = J_{Y_1,U} = \begin{bmatrix} I_{Y_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_U \\ 0 & -I_U & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Обозначим $\tilde{U} = U_1 \oplus U \oplus U$ и $\tilde{Y} = Y_1 \oplus U \oplus U$. Ясно, что $J_1^2 = I_{\tilde{U}}$, $J_2^2 = I_{\tilde{Y}}$, $J_i^* = J_i$, $i = 1, 2$. Пусть

$$M_{\tilde{\Sigma}} = \begin{bmatrix} A & K & B & 0 \\ M & S & N & 0 \\ C & L & D & I_U \\ 0 & 0 & I_U & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}(X \oplus \tilde{U}, X \oplus \tilde{Y}), \qquad \tilde{J}_i = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \tag{3.8}$$

Тогда справедливы равенства

$$M_{\tilde{\Sigma}}^* \tilde{J}_2 M_{\tilde{\Sigma}} = \tilde{J}_1, \qquad M_{\tilde{\Sigma}} \tilde{J}_1 M_{\tilde{\Sigma}}^* = \tilde{J}_2, \tag{3.9}$$

вытекающие из формул (3.2) – (3.6). Следовательно, оператор $M_{\tilde{\Sigma}}$ является $(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$-унитарным, и имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ — пассивная система сопротивления с потерями, а система $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}; X, \tilde{U}, \tilde{Y})$ (J_1 и J_2 — сигнатурные операторы, определенные в* (3.7)) *такова, что*

$$\tilde{A} = A, \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} K & B & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{C} = \begin{bmatrix} M \\ C \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{D} = \begin{bmatrix} S & N & 0 \\ L & D & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

где операторы $M \in \mathbb{B}(X, Y_1)$, $K \in \mathbb{B}(U_1, X)$, $S \in \mathbb{B}(U_1, Y_1)$, $N \in \mathbb{B}(U, Y_1)$ и $L \in \mathbb{B}(U_1, Y)$ определяются равенствами (3.2) – (3.6), *а внешние пространства $\tilde{U} = U_1 \oplus U \oplus U$ и $\tilde{Y} = Y_1 \oplus U \oplus U$. Тогда система $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ является консервативной системой прохождения.*

Если $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}; X, \tilde{U}, \tilde{Y})$ — консервативная система прохождения с блочным представлением операторов $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, указанным в (3.10), *то ее часть — система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ — является пассивной системой сопротивления с потерями каналов рассеяния.*

Доказательство. В одну сторону теорема доказана выше, а в обратную сторону ее доказательство следует из (3.10) и первого равенства в (3.9), имеющих место для консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$.

Консервативные системы прохождения со специальными операторами J_1 и J_2 вида (3.7), имеющие соответствующие блочные представления коэффициентов вида (3.10), будем называть консервативными системами прохождения типа SI (scattering-impedance).

Лемма 3.3. *Если у консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ основной оператор A не имеет унитарной части, т. е. A — вполне неунитарное сжатие, то эта система является простой.*

Доказательство. Рассмотрим систему $\Sigma_1 = (A, K, M, S; X, U_1, Y_1)$, построенную по $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$. Из равенств (3.2) и (3.3) следует, что Σ_1 является консервативной системой рассеяния, а так как A не имеет унитарной части, она простая, т. е. $X^o_{\Sigma_1} \vee X^c_{\Sigma_1} = X$. Поскольку $X^o_{\Sigma_1} \subset X^o_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}}$ и $X^c_{\Sigma_1} \subset X^c_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}}$, получаем, что $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ — простая система.

3.1. Свойства матрицы прохождения консервативной системы прохождения типа SI. Рассмотрим передаточную функцию $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI:

$$\tilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) = \begin{bmatrix} S & N & 0 \\ L & D & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} M \\ C \\ 0 \end{bmatrix} (I - zA)^{-1} \begin{bmatrix} K & B & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S + zM(I-zA)^{-1}K & N + zM(I-zA)^{-1}B & 0 \\ L + zC(I-zA)^{-1}K & D + zC(I-zA)^{-1}B & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}.$$

Из равенств (3.2) вытекает, что у консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI основной оператор A является сжатием, и, следовательно, $\Lambda^+_A = D$, $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ — голоморфная двусторонне (J_1, J_2)-сжимающая в D функция со значениями из $\mathbb{B}(\tilde{U}, \tilde{Y})$, т. е. ее сужение на D принадлежит классу $P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$, где J_1 и J_2 определены в (3.7). Более того, матрица похождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ имеет следующую блочную структуру:

$$\tilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & \delta(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Подкласс класса $P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ функций с блочной структурой (3.11) будем обозначать $SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$. Таким образом, сужение на D матрицы прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ консервативной системы прохождения типа SI принадлежит классу $SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$, и, следовательно, для нее выполняются неравенства

$$\tilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)^* J_2 \tilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) \leqslant J_1, \qquad \tilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) J_1 \tilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)^* \leqslant J_2, \quad z \in D. \tag{3.12}$$

Теорема 3.2. *Произвольная функция θ класса $SI \cap P_{J_1,J_2}(D;\tilde{U},\tilde{Y})$ является сужением на D матрицы прохождения некоторой простой консервативной системы прохождения типа SI, определяемой по θ с точностью до унитарного подобия.*

Доказательство. Известно [15, с. 224], что произвольная функция θ класса $P_{J_1,J_2}(D;\tilde{U},\tilde{Y})$ является матрицей прохождения некоторой простой консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2} = (\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D};X,\tilde{U},\tilde{Y})$. Если же $\theta \in SI \cap \cap P_{J_1,J_2}(D;\tilde{U},\tilde{Y})$, где J_1 и J_2 определены в (3.7), то коэффициент $\tilde{D}$ этой системы имеет блочное представление вида (3.10), так как $\tilde{D} = \theta(0)$. Из равенств (3.9), справедливых для системы $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ и записанных для блочных представлений коэффициентов $\tilde{B} = \begin{bmatrix} K & B & B_1 \end{bmatrix}$ и $\tilde{C} = \begin{bmatrix} M \\ C \\ C_1 \end{bmatrix}$, вытекает, что блоки $B_1 \in \mathbb{B}(U,X)$ и $C_1 \in \mathbb{B}(X,U)$ равны нулю. Следовательно, простая система прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ является системой типа SI.

Из (3.11) видно, что матрица сопротивления $c \in \ell(U)$ пассивной системы сопротивления Σ является блоком δ функции $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$. Для блоков β и γ функции $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ справедливы соотношения

$$c(\eta)^* + c(\xi) = \beta(\eta)^*\beta(\xi) + (1-\overline{\eta}\xi)B^*(I-\overline{\eta}A^*)^{-1}(I-\xi A)^{-1}B, \tag{3.13}$$

$$c(\eta) + c(\xi)^* = \gamma(\eta)\gamma(\xi)^* + (1-\overline{\xi}\eta)C(I-\eta A)^{-1}(I-\overline{\xi}A^*)^{-1}C^*, \tag{3.14}$$

вытекающие из формул

$$\beta(z) = N + zM(I-zA)^{-1}B,$$

$$\gamma(z) = L + zC(I-zA)^{-1}K, \qquad c(z) = D + zC(I-zA)^{-1}B$$

и равенств (3.2), (3.3) и (3.5). Эти тождества будут использоваться в дальнейших рассмотрениях.

Рассмотрим класс Смирнова N_+ скалярных функций $f(z)$, голоморфных в D и представляющихся в виде отношения $f = g/h$, где g, h принадлежат скалярному классу S и h является внешней функцией (относительно скалярного, матрично- и операторнозначного классов Смирнова, см. [31, 32]). Будем говорить, что голоморфная в D функция f со значениями из $\mathbb{B}(U,Y)$ принадлежит классу $\tilde{N}_+(U,Y)$, если для любых $u \in U$, $y \in Y$ форма $(f(z)u,y) \in N_+$ при $z \in D$. Для произвольной функции этого класса $f(z)$ при $u \in U$, $y \in Y$ существует

$$\lim_{r\uparrow 1}(f(r\zeta)u,y) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1;$$

будем обозначать этот предел $(f(\zeta)u,y)$. Само по себе выражение $(f(\zeta)u,y)$ не имеет смысла в общем случае, так как $f(\zeta)$ не имеет смысла, и будет пониматься в указанном слабом смысле.

Ясно, что $S(U,Y) \subset \tilde{N}_+(U,Y)$, $H^2(U,Y) \subset \tilde{N}_+(U,Y)$ и $\ell(U) \subset \tilde{N}_+(U,U)$.

Лемма 3.4. *Пусть* $\theta \in SI \cap P_{J_1,J_2}(\tilde{U}, \tilde{Y})$. *Тогда блоки представления* (3.11) *имеют свойства*

$$\alpha \in S(U_1, Y_1), \qquad \beta \in H^2(U, Y_1), \qquad \gamma^{\sim} \in H^2(U, U_1), \qquad \delta(= c) \in \ell(U);$$

β *и* γ *являются решениями факторизационных неравенств*

$$\beta(z)^*\beta(z) \leqslant 2\operatorname{Re} c(z), \qquad \gamma(z)\gamma(z)^* \leqslant 2\operatorname{Re} c(z), \quad z \in D. \tag{3.15}$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из неравенств

$$J_1 - \theta(z)^* J_2 \theta(z) =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{U_1} - \alpha(z)^*\alpha(z) & \alpha(z)^*\beta(z) - \gamma(z)^* & 0 \\ \beta(z)^*\alpha(z) - \gamma(z) & 2\operatorname{Re}\delta(z) - \beta(z)^*\beta(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad z \in D,$$

$$J_2 - \theta(z) J_1 \theta(z)^* =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{Y_1} - \alpha(z)\alpha(z)^* & \alpha(z)\gamma(z)^* - \beta(z) & 0 \\ \gamma(z)\alpha(z)^* - \beta(z)^* & 2\operatorname{Re}\delta(z) - \gamma(z)\gamma(z)^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad z \in D,$$

для голоморфной в D функции θ и из ее представления (3.11).

Из приведенных выше рассуждений и леммы 3.4 следует, что $SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y}) \subset \tilde{N}_+(\tilde{U}, \tilde{Y})$. Значит, можно рассмотреть $\theta(\zeta)$ в указанном слабом смысле. Более того, для любых $\tilde{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u \\ u_2 \end{bmatrix} \in \tilde{U}$ и $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y \\ y_2 \end{bmatrix} \in \tilde{Y}$

$$\lim_{r \uparrow 1} \big(\theta(r\zeta)^* J_2 \theta(r\zeta)\tilde{u}, \tilde{u}\big) \leq \big(J_1 \tilde{u}, \tilde{u}\big) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1, \tag{3.16}$$

$$\lim_{r \uparrow 1} \big(\theta(r\zeta) J_1 \theta(r\zeta)^* \tilde{y}, \tilde{y}\big) \leq \big(J_2 \tilde{y}, \tilde{y}\big) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1. \tag{3.17}$$

Если в (3.16) ((3.17), или в (3.16) и (3.17)) имеют место равенства почти всюду при $|\zeta| = 1$, то будем говорить в дальнейшем, что θ является (J_1, J_2)-внутренней ((J_1, J_2)-$*$-внутренней, или двусторонне (J_1, J_2)-внутренней соответственно). Заметим, что если $\theta \in SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ — (J_1, J_2)-внутренняя ((J_1, J_2)-*-внутренняя), то $\varphi = \beta$ (соответственно, $\psi = \gamma$) является решением задачи a) (b)) в (2.7).

3.2. Оптимальные пассивные системы сопротивления. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. *Для того чтобы пассивная система сопротивления* $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ *с матрицей сопротивления* $c \in \ell(U)$ *была оптимальной, необходимо* *и достаточно, чтобы для матрицы прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ соответствующей консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI блок β являлся максимальным решением факторизационной задачи* а) *в* (2.5).

Доказательство. Поскольку блоки β и $\delta = c$ функции $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ определяются по формулам $\beta(z) = N + zM(I - zA)^{-1}B$ и $c(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B$, где операторы A, B, C, D, N и M связаны соотношениями (3.2), утверждение теоремы равносильно соответствующей теореме 2 в [13].

4. Устойчивые, $*$-устойчивые и двусторонне устойчивые системы сопротивления. В настоящем пункте будем рассматривать, в основном, двусторонне устойчивые пассивные системы сопротивления, т. е. такие, у которых основной оператор A является сжатием класса C_{00}.

4.1. Двусторонне устойчивые системы сопротивления. Подкласс двусторонне (J_1, J_2)-внутренних функций θ класса $SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ будем обозначать $SI \cap U_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$.

Теорема 4.1. *Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ — двусторонне устойчивая пассивная система сопротивления, являющаяся частью консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}; X, \tilde{U}, \tilde{Y})$ типа SI, $c(z)$ — матрица сопротивления системы Σ и $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ — матрица прохождения системы $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$. Тогда*:

1) *спектральная функция $\sigma(\mu)$ функции $c(z)$ абсолютно непрерывна*;

2) $\tilde{\theta}_{J_1,J_2} \in SI \cap U_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$;

3) *система $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ является минимальной.*

Обратно, если имеет место свойство 2 *и A не имеет унитарной части, то $A \in C_{00}$ (так что свойства* 1 *и* 3 *также имеют место*).

Доказательство. Рассмотрим блок $\beta\big(\in H^2(U, Y_1)\big)$ матрицы прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$:

$$\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k, \quad \text{где} \quad \beta_0 = N, \qquad \beta_k = MA^{k-1}B \quad \text{при} \quad k \geq 1.$$

С учетом тождества $I - \lim\limits_{k\to\infty} (A^*)^k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k (I - A^*A) A^k$ для любого $u \in U$ будем иметь

$$\big\|\beta(.)u\big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\beta_k u\|^2 = \|Nu\|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \|MA^k Bu\|^2 = (2\operatorname{Re} Du, u) - \lim_{n\to\infty} \|A^n Bu\|^2.$$

Поскольку $A \in C_{0\cdot}$, то

$$\big\|\beta(.)u\big\|^2 = (2\operatorname{Re} Du, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(\sigma(\mu)u, u) = 2\operatorname{Re}(c(0)u, u). \tag{4.1}$$

Из последнего равенства следует, что $(\sigma(\mu)u, u)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, а также, что для любого $u \in U$

$$\big\|\beta(\zeta)u\big\|^2 = 2\operatorname{Re}(c(\zeta)u, u) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1$$

в слабом смысле, т. е. $\varphi = \beta$ — решение факторизационной задачи a) в (2.7). Аналогично доказывается, что $\psi = \gamma$ является решением факторизационной задачи b) в (2.7) в слабом смысле. Поскольку $A \in C_{00}$ и $\alpha(z)$ является матрицей рассеяния консервативной системы рассеяния $\Sigma_1 = (A, K, M, S; X, U_1, Y_1)$, то $\alpha \in S_{in}(U_1, Y_1)$ и система Σ_1 является минимальной, т. е. $X^o_{\Sigma_1} = X^c_{\Sigma_1} = X$. Так как из (3.10) следует, что

$$X^o_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \subset X^o_{\Sigma} \quad \text{и} \quad X^c_{\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}} \subset X^c_{\Sigma},$$

то свойство 3 имеет место. То, что $\varphi = \beta$ и $\psi = \gamma$ являются решениями факторизационных задач (2.7) и $\alpha \in S_{in}(U_1, Y_1)$, равносильно свойству 2.

Обратно, если A не имеет унитарной части, то консервативная система рассеяния Σ_1 является простой. Из свойства 2 вытекает, что $\alpha \in S_{in}(U_1, Y_1)$. Поэтому $A \in C_{00}$.

Замечание. Если в формулировке теоремы 4.1 условие $A \in C_{00}$ заменить условием $A \in C_{0\cdot}$ ($A \in C_{\cdot 0}$), то свойство 1 остается в силе, вместо свойства 2 будет иметь место такое:

$\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ *является* (J_1, J_2)*-внутренней* ((J_1, J_2)-$*$*-внутренней*) *функцией*,

а вместо свойства 3 —

$\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ — *наблюдаемая система* (соответственно, *управляемая система*).

Следствие. *Если Σ — двусторонне устойчивая система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$, то блоки β и γ матрицы прохождения соответствующей системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI являются решениями факторизационных задач* a) *и* b) *в* (2.7) *соответственно.*

Лемма 4.1. *Если у функции $\theta \in SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ блок $\delta (\in \ell(U))$ имеет абсолютно непрерывную спектральную функцию и блок β (γ) является внешним ($*$-внешним) решением факторизационной задачи* a) (*соответственно,* b)) *в* (2.7), *то оптимальная ($*$-оптимальная) и минимальная пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c \equiv \delta$ в D является устойчивой ($*$-устойчивой).*

Доказательство. Пусть у функции $\theta \in SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ блок β является внешним решением класса $H^2(U, Y_\beta)$ факторизационной задачи a) в (2.7). Рассмотрим функциональную модель простой консервативной системы сопротивления $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}; \hat{X}, U)$ с матрицей сопротивления $c \equiv \delta$ в D, где

$$\hat{X} = L^2(Y_\beta), \qquad \hat{A}x = \zeta^{-1}x(\zeta), \quad x \in L^2(Y_\beta),$$

$$\hat{B}u = \zeta^{-1}\beta(\zeta)u, \qquad \hat{C}^*u = \beta(\zeta)u, \qquad \hat{D}u = c(0)u, \quad u \in U.$$

В этой модели $\hat{X}^o_{\hat{\Sigma}} = \bigvee_0^\infty (\hat{A}^*)^n \hat{C}^* U = H^2(Y_\beta)$ и $H^2(Y_\beta) \ominus P_{\hat{X}^o_{\hat{\Sigma}}} \hat{X}^c_{\hat{\Sigma}}$ — подпространство, инвариантное относительно оператора умножения на ζ. По теореме Берлинга – Лакса – Халмоша существует внутренняя функция $b_\beta \in \mathbb{B}(\hat{Y}, Y_\beta)$ такая, что $H^2(Y_\beta) \ominus P_{\hat{X}^o_{\hat{\Sigma}}} \hat{X}^c_{\hat{\Sigma}} = b_\beta H^2(\hat{Y})$. Будем считать, что $\hat{Y} = \{0\}$, если $P_{\hat{X}^o_{\hat{\Sigma}}} \hat{X}^c_{\hat{\Sigma}} = H^2(Y_\beta)$. Приходим к оптимальной и минимальной системе сопротивления $\Sigma_\circ = (A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ; X_\circ, U)$ с матрицей сопротивления $c(z)$, где

$$X_\circ = H^2(Y_\beta) \ominus b_\beta H^2(\hat{Y}), \qquad A_\circ x = \zeta^{-1}\big(x(\zeta) - x(0)\big), \quad x \in X_\circ,$$

$$B_\circ u = \zeta^{-1}\big(\beta(\zeta) - \beta(0)\big)u, \qquad C_\circ^* u = \beta(\zeta)u - b_\beta P u,$$

$$Pu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\zeta|=1} b_\beta(\zeta)^* \beta(\zeta) u \, |d\zeta| \,,$$

$$D_\circ u = c(0)u, \quad u \in U.$$

Система $\Sigma_\circ$ является устойчивой. В случае, когда у функции θ блок γ является $*$-внешним решением задачи b) в (2.7), лемма доказывается аналогично.

4.2. Условие минимальности потерь каналов рассеяния. Пусть θ — функция класса $SI \cap U_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ с заданным блоком $\delta \equiv c(\in \ell(U))$ в D, где $\tilde{U} = U_1 \oplus U \oplus U$ и $\tilde{Y} = Y_1 \oplus U \oplus U$ определены в пп. 3.1. Тогда функции $\varphi = \beta(\in H^2(U, Y_1))$ и $\psi = \gamma(\gamma^\sim \in H^2(U, U_1))$ являются решениями факторизационных задач соответственно a) и b) в (2.7). Блоки β и γ функции θ записываются в виде

$$\beta(z) = b_1(z)\varphi_c(z), \qquad \gamma(z) = \psi_c(z) b_2(z), \tag{4.2}$$

где b_1 и φ_c — внутренняя и внешняя функции со значениями из $\mathbb{B}(Y_{\varphi_c}, Y_1)$ и $\mathbb{B}(U, Y_{\varphi_c})$, а b_2 и ψ_c — $*$-внутренняя и $*$-внешняя функции со значениями из $\mathbb{B}(U_1, U_{\psi_c})$ и $\mathbb{B}(U_{\psi_c}, U)$ соответственно. Функции φ_c и ψ_c являются решениями факторизационных задач a) и b) в (2.7). Функции b_1 и b_2 являются здесь двусторонне внутренними тогда и только тогда, когда функции β и γ являются решениями с минимальными потерями задач соответственно a) и b) в (2.7), т. е.

$$\text{a)} \ \bigvee_{-\infty}^{\infty} \zeta^k \beta(\zeta) U = L^2(Y_1), \qquad \text{b)} \ \bigvee_{-\infty}^{\infty} \zeta^k \gamma(\zeta)^* U = L^2(U_1). \tag{4.3}$$

Условия a) и b) в (4.3) эквивалентны в силу того, что $\gamma(\zeta)^* = \alpha(\zeta)^* \beta(\zeta)$ почти всюду при $|\zeta| = 1$. В пп. 2.3 было отмечено, что в случае $\dim U < \infty$ число $m_c = \operatorname{rank} \operatorname{Re} c(\zeta)$ не зависит от ζ почти всюду при $|\zeta| = 1$ и

$$d_\beta = \dim Y_1 \geq m_c, \qquad d_\gamma = \dim U_1 \geq m_c. \tag{4.4}$$

При выполнении условий (4.3) имеем знаки равенства в (4.4), эквивалентность условий $d_\beta = d_\gamma = m_c$ почти всюду и (4.3). Будем считать (4.3) условием минимальности потерь каналов рассеяния. Если числа d_β и d_γ конечны, то они интерпретируются как числа потерь каналов рассеяния. В случае, когда $m_c < \infty$, число m_c интерпретируется как минимальное число потерь каналов рассеяния.

Итак, с этого момента считаем, что факторизационные задачи a) и b) в (2.7) разрешимы, φ_c и ψ_c — внешнее и $*$-внешнее решения этих задач, $s_c(\zeta)$ — субоператор рассеяния, определяемый равенствами в (2.8).

4.3. Двусторонне (J_1, J_2)-внутренние SI-дилатации с минимальными потерями. Обозначим $\hat{U} = U_{\psi_c} \oplus U \oplus U$, $\hat{Y} = Y_{\varphi_c} \oplus U \oplus U$, $\hat{J}_1 = J_{U_{\psi_c}, U}$, $\hat{J}_2 = J_{Y_{\varphi_c}, U}$ и рассмотрим почти всюду при $|\zeta| = 1$ функцию

$$\vartheta_r(\zeta) = \begin{bmatrix} s_c(\zeta) & \varphi_c(r\zeta) & 0 \\ \psi_c(r\zeta) & c(r\zeta) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \qquad r < 1,$$

со значениями из $\mathbb{B}(\hat{U}, \hat{Y})$. Для любых $\hat{u} \in \hat{U}$ и $\hat{y} \in \hat{Y}$ почти всюду при $|\zeta| = 1$ существует предел $\lim\limits_{r \uparrow 1} (\vartheta_r(\zeta)\hat{u}, \hat{y})$. Под

$$\vartheta(\zeta) = \begin{bmatrix} s_c(\zeta) & \varphi_c(\zeta) & 0 \\ \psi_c(\zeta) & c(\zeta) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

будем понимать не операторнозначную функцию со значениями из $\mathbb{B}(\hat{U}, \hat{Y})$, а определенную в следующем слабом смысле: для любых $\hat{u} \in \hat{U}$ и $\hat{y} \in \hat{Y}$

$$(\vartheta(\zeta)\hat{u}, \hat{y}) = \lim_{r \uparrow 1} (\vartheta_r(\zeta)\hat{u}, \hat{y}) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1.$$

Для $\vartheta_r(\zeta)$ почти всюду при $|\zeta| = 1$ также справедливы неравенства

$$\text{a)}\ \lim_{r \uparrow 1} (\hat{J}_2 \vartheta_r(\zeta)\hat{u}, \vartheta_r(\zeta)\hat{u}) \le (\hat{J}_1 \hat{u}, \hat{u}), \qquad \text{b)}\ \lim_{r \uparrow 1} (\hat{J}_1 \vartheta_r(\zeta)^* \hat{y}, \vartheta_r(\zeta)^* \hat{y}) \le (\hat{J}_2 \hat{y}, \hat{y}), \tag{4.6}$$

и эти неравенства формально будем записывать в виде

$$\vartheta(\zeta)^* \hat{J}_2 \vartheta(\zeta) \le \hat{J}_1, \qquad \vartheta(\zeta) \hat{J}_1 \vartheta(\zeta)^* \le \hat{J}_2 \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1.$$

Покажем, что в неравенствах (4.6) имеет место знак равенства почти всюду при $|\zeta| = 1$ для любых $\hat{u} \in \hat{U}$ и $\hat{y} \in \hat{Y}$, и будем в связи с этим говорить, что $\vartheta(\zeta)$ принимает $(\hat{J}_1, \hat{J}_2)$-унитарные значения (в слабом смысле).

Лемма 4.2. *Пусть $\vartheta(\zeta)$ — функция, формально определенная почти всюду при $|\zeta| = 1$ (в указанном выше смысле) формулой* (4.5). *Тогда $\vartheta(\zeta)$ принимает $(\hat{J}_1, \hat{J}_2)$-унитарные (в слабом смысле) значения почти всюду при $|\zeta| = 1$, т. е. формально имеют место следующие равенства:*

$$\text{a)}\ \vartheta(\zeta)^* \hat{J}_2 \vartheta(\zeta) = \hat{J}_1 \quad \textit{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1,$$

$$\text{b)}\ \vartheta(\zeta) \hat{J}_1 \vartheta(\zeta)^* = \hat{J}_2 \quad \textit{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\lim_{r \uparrow 1} (\hat{J}_2 \vartheta_r(\zeta)\hat{u}, \vartheta_r(\zeta)\hat{u}) =$$

$$= \lim_{r\uparrow 1}\left(\begin{bmatrix} s_c(\zeta)^* & \psi_c(r\zeta)^* & 0 \\ \varphi_c(r\zeta)^* & c(r\zeta)^* & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{Y_{\varphi_c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_U \\ 0 & -I_U & 0 \end{bmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} s_c(\zeta) & \varphi_c(r\zeta) & 0 \\ \psi_c(r\zeta) & c(r\zeta) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}\hat{u}, \hat{u}\right) =$$

$$= \lim_{r\uparrow 1}\left(\begin{bmatrix} s_c(\zeta)^* s_c(\zeta) & s_c(\zeta)^*\varphi_c(r\zeta) - \psi_c(r\zeta)^* & 0 \\ \varphi_c(r\zeta)^* s_c(\zeta) - \psi_c(r\zeta) & \varphi_c(r\zeta)^*\varphi_c(r\zeta) - 2\operatorname{Re} c(r\zeta) & -I_U \\ 0 & -I_U & 0 \end{bmatrix}\hat{u}, \hat{u}\right) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} I_{U_{\psi_c}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_U \\ 0 & -I_U & 0 \end{bmatrix}\hat{u}, \hat{u}\right) = \left(\hat{J}_1\hat{u}, \hat{u}\right).$$

Аналогично показывается справедливость равенства в b) в (4.6) почти всюду при $|\zeta| = 1$. Отметим, что в случае $\dim U < \infty$ функция $\vartheta(\zeta)$ определена почти всюду при $|\zeta| = 1$ в обычном смысле и принимает $(\hat{J}_1, \hat{J}_2)$-унитарные значения из $\mathbb{B}(\hat{U}, \hat{Y})$ почти всюду при $|\zeta| = 1$.

Теорема 4.2. *Для того чтобы функция $c(z)$ со значениями из $\mathbb{B}(U)$ была матрицей сопротивления некоторой пассивной устойчивой ($*$-устойчивой, двусторонне устойчивой) системы сопротивления, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде 22-блока $\delta(z) \equiv c(z)(\in \ell(U))$, $z \in D$, с абсолютно непрерывной спектральной функцией некоторой (J_1, J_2)-внутренней ($(J_1, J_2)*$-внутренней, двусторонне (J_1, J_2)-внутренней соответственно) в указанном слабом смысле функции θ класса $SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$.*

Доказательство. Докажем теорему для устойчивой системы сопротивления. Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ — пассивная устойчивая система сопротивления с матрицей сопротивления $c \in \ell(U)$. Рассмотрим соответствующую консервативную систему прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI с матрицей прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$. Функция $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ принадлежит классу $SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$. Согласно теореме 4.1 функция $c(z)$ имеет абсолютно непрерывную спектральную функцию, а блок β матрицы прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ является решением факторизационной задачи a) в (2.7). Блок $\alpha(z)$ функции $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ является матрицей рассеяния консервативной системы рассеяния $\Sigma_1 = (A, K, M, S; X, U_1, Y_1)$, так как оператор

$$M_{\Sigma_1} = \begin{bmatrix} A & K \\ M & S \end{bmatrix} \in \mathbb{B}(X \oplus U_1, X \oplus Y_1)$$

является унитарным по построению системы $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$. В силу того что $A \in C_{0\cdot}$, имеем

$$\alpha(\zeta)^*\alpha(\zeta) = I_{U_1} \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1. \tag{4.7}$$

Используя соотношения (4.7) и а) в (2.7) для $\beta(z)$, получаем, что в неравенстве (3.16) имеет место знак равенства почти всюду при $|\zeta| = 1$ в слабом смысле. Значит, $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ является (J_1, J_2)-внутренней (в указанном слабом смысле) функцией класса $SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$.

Обратно, пусть c представима в виде 22-блока $\delta(z) \equiv c(z)$, $z \in D$, с абсолютно непрерывной спектральной функцией некоторой (J_1, J_2)-внутренней (в слабом смысле) функции $\theta \in SI \cap P_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$. Тогда из того, что для θ в указанном смысле в (3.16) имеет место равенство почти всюду при $|\zeta| = 1$, следует, что блок $\beta(\in H^2(U, Y_1))$ является решением задачи а) в (2.7). Согласно лемме 4.1, оптимальная и минимальная пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$ является устойчивой.

Функцию $\theta \in SI \cap U_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ с 22-блоком $\delta \equiv c$ в D назовем двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией функции $c(z)$. Если при этом для ее блоков β и γ выполнено условие (4.3), то такую SI-дилатацию θ функции $c(z)$ будем называть SI-дилатацией с минимальными потерями.

В случае, когда для определенной при $|\zeta| = 1$ функции $h(\zeta)$ со значениями из $\mathbb{B}(U, Y)$ существует упорядоченная пара двусторонне внутренних функций b_1 и b_2 такая, что $b_1(\zeta)h(\zeta)b_2(\zeta)$ — граничное значение в слабом смысле некоторой функции обобщенного класса Смирнова $\tilde{N}_+(U_1, Y_1)$, будем говорить, что h принадлежит обобщенному классу Неванлинны $\tilde{N}(U, Y)$, а пару $\{b_1, b_2\}$ будем называть знаменателем функции h.

Знаменатель $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2\}$ функции h называется делителем знаменателя $\{b_1, b_2\}$ функции h, если $b_1 = u\hat{b}_1$ и $b_2 = \hat{b}_2 v$, где u и v — двусторонне внутренние функции. Такой делитель называется тривиальным, если u и v — постоянные, т. е. унитарные операторы.

Знаменатель $\{b_1, b_2\}$ функции h называется минимальным, если он не имеет нетривиальных делителей среди знаменателей функции h. Известно, что если $h \in \tilde{N}(U, Y)$ и $\{b_1, b_2\}$ — знаменатель h, то существует минимальный знаменатель $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2\}$ функции h, являющийся делителем $\{b_1, b_2\}$ (см. [14, с. 112], предложение 6).

Знаменатели вида $\{b_1, I_U\}$ и $\{I_Y, b_2\}$ называются соответственно левым и правым знаменателями функции h. Если для h существует левый (правый) знаменатель, то для нее существует минимальный левый (соответственно, правый) знаменатель, являющийся делителем всех других левых (правых) знаменателей функции h. Левые $\{b_1, I_U\}$ и правые $\{I_Y, b_2\}$ знаменатели функции h будем записывать в виде b_1 и b_2 соответственно.

Теорема 4.3. *Пусть $c(z)$ — функция из D в $\mathbb{B}(U)$. Для существования двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатации $\theta(z)$ функции $c(z)$ с минимальными потерями необходимо и достаточно, чтобы*:

1) $c \in \ell(U)$;

2) *для c были разрешимы в слабом смысле факторизационные задачи* (2.7);

3) *субоператор рассеяния* $s_c(\zeta)$, *определяемый соотношениями* (2.8), *принадлежал классу* $\tilde{N}(U_{\psi_c}, Y_{\varphi_c})$.

При выполнении этих условий все такие SI-дилатации θ *функции* $c(z)$ *описываются формулой*

$$\theta(z) = \begin{bmatrix} (b_1 s_c b_2)(z) & b_1(z)\varphi_c(z) & 0 \\ \psi_c(z) b_2(z) & c(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

где $\{b_1, b_2\}$ — *произвольный знаменатель функции* $s_c(\zeta)$.

Доказательство. Пусть $\theta \in SI \cap U_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ — двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация функции $c(z)$ с минимальными потерями. Тогда для блоков $\theta(z)$ имеем $c \in \ell(U)$, $\alpha \in S_{in}(U_1, Y_1)$, $\beta \in H^2(U, Y_1)$, $\gamma^\sim \in H^2(U, U_1)$. Из того, что для θ почти всюду при $|\zeta| = 1$ в (3.16), (3.17) имеют место равенства (в слабом смысле), следует, что $\varphi = \beta$ и $\psi = \gamma$ — решения задач a) и b) в (2.7) соответственно, удовлетворяющие условию (4.3), и в слабом смысле справедливо соотношение

$$\alpha(\zeta)^* \beta(\zeta) = \gamma(\zeta)^* \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1. \tag{4.9}$$

Тогда функции β и γ представимы в виде (4.2), где b_1 и b_2 — некоторые двусторонне внутренние функции со значениями из $\mathbb{B}(Y_{\varphi_c}, Y_1)$ и $\mathbb{B}(U_1, U_{\psi_c})$ соответственно. Подставляя в (4.9) выражения для β и γ из (4.2), получаем

$$b_2(\zeta)\alpha(\zeta)^* b_1(\zeta)\varphi_c(\zeta) = \psi_c(\zeta)^* \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1.$$

Сравнивая это равенство с соотношениями (2.8), определяющими функцию $s_c(\zeta)$, видим, что

$$\alpha(\zeta) = b_1(\zeta) s_c(\zeta) b_2(\zeta) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1. \tag{4.10}$$

Учитывая, что α — двусторонне внутренняя функция со значениями из $\mathbb{B}(U_1, Y_1)$, получаем, что $\{b_1, b_2\}$ — знаменатель функции $s_c(\zeta)$. Формулы (4.2) и (4.10) показывают, что $\theta(z)$ представима в виде (4.8).

Обратно, пусть $c \in \ell(U)$, разрешимы в слабом смысле факторизационные задачи в (2.7) и для субоператора рассеяния $s_c(\zeta)$ существует знаменатель $\{b_1, b_2\}$. Определим функцию $\theta(z)$ по формуле (4.8). Получим, что $\theta(\zeta)$ принимает (J_1, J_2)-унитарные (в слабом смысле) значения почти всюду при $|\zeta| = 1$. Использовав преобразование Потапова – Гинзбурга S над функцией θ (см. [15] и [30], § 4.3), убедимся, что $S(\zeta)$ принимает унитарные значения почти всюду при $|\zeta| = 1$. Нетрудно проверить, что все блоки функции S будут принадлежать соответствующим классам Смирнова (проверку этого факта, как и корректности обратного преобразования Потапова – Гинзбурга для рассматриваемого случая мы предоставляем читателю, см. [31, 32]), а это значит, что, в силу принципа максимума, $S(z)$ является сжимающей в D функцией. Следовательно, функция $\theta(z)$ является двусторонне (J_1, J_2)-сжимающей в D. Таким образом, θ принадлежит классу

$SI \cap U_{J_1,J_2}(D;\tilde{U},\tilde{Y})$. Поскольку b_1 и b_2 — двусторонне внутренние функции, для θ выполнено условие (4.3). Значит, θ является двусторонне (J_1,J_2)-внутренней SI-дилатацией функции $c(z)$ с минимальными потерями.

В случае, когда $\dim U < \infty$, имеет неформальный смысл функция $\vartheta(\zeta)$, определенная в (4.5), и тогда (4.8) можно переписать в виде

$$\theta(\zeta) = \begin{bmatrix} b_1(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & I_U & 0 \\ 0 & 0 & I_U \end{bmatrix} \vartheta(\zeta) \begin{bmatrix} b_2(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & I_U & 0 \\ 0 & 0 & I_U \end{bmatrix}. \tag{4.8*}$$

Будем называть двусторонне (J_1,J_2)-внутреннюю SI-дилатацию θ минимальной, если ее нельзя представить в виде

$$\theta = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & I_U & 0 \\ 0 & 0 & I_U \end{bmatrix} \tilde{\theta} \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & I_U & 0 \\ 0 & 0 & I_U \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

где $\tilde{\theta}$ — функция класса $SI \cap U_{J_1,J_2}(D;\tilde{U},\tilde{Y})$, а u и v — двусторонне внутренние функции, хотя бы одна из которых не постоянная.

Теорема 4.4. *Двусторонне (J_1,J_2) -внутренняя SI-дилатация θ функции $c \in \in \ell(U)$ с минимальными потерями является минимальной тогда и только тогда, когда соответствующий ей знаменатель $\{b_1,b_2\}$ субоператора рассеяния $s_c(\zeta)$ минимален.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из описания (4.8) SI-дилатации θ и определений минимальных SI-дилатаций и минимальных знаменателей.

Назовем двусторонне (J_1,J_2)-внутреннюю SI-дилатацию θ функции $c \in \ell(U)$ оптимальной ($*$-оптимальной), если ее блок β (γ) является внешней ($*$-внешней) функцией. Легко видеть, что все оптимальные ($*$-оптимальные) SI-дилатации получаются по формуле (4.8) при правых (соответственно, левых) знаменателях функции $s_c(\zeta)$.

Теорема 4.5. *Двусторонне (J_1,J_2)-внутренняя SI-дилатация θ с минимальными потерями является минимальной и оптимальной ($*$-оптимальной) тогда и только тогда, когда соответствующий знаменатель функции $s_c(\zeta)$ является минимальным правым (соответственно, левым).*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теорем 6, 7 и определения оптимальной ($*$-оптимальной) SI-дилатации.

5. Реализация пассивных двусторонне устойчивых систем сопротивления. ***5.1. Реализация минимальных двусторонне устойчивых пассивных систем сопротивления.*** Пусть θ — двусторонне (J_1,J_2)-внутренняя SI-дилатация функции $c \in \ell(U)$. Рассмотрим следующую функциональную модель $\dot{\tilde{\Sigma}}_{J_1,J_2} = = (\dot{\tilde{A}},\dot{\tilde{B}},\dot{\tilde{C}},\dot{\tilde{D}};\dot{X},\tilde{U},\tilde{Y})$ простой консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI с матрицей прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2} \equiv \theta$ в D класса $SI \cap U_{J_1,J_2}(D;\tilde{U},\tilde{Y})$:

$$\tilde{U} = U_1 \oplus U \oplus U, \qquad \tilde{Y} = Y_1 \oplus U \oplus U, \qquad \dot{X} = H^2(Y_1) \ominus \alpha H^2(U_1),$$

$$x \in \dot{X}, \quad u_1 \in U_1, \quad u \in U, \qquad \dot{\tilde{A}}x = \zeta^{-1}\left[x(\zeta) - x(0)\right],$$

$$\dot{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \dot{K} & \dot{B} & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{K}u_1 = \zeta^{-1}\left[\alpha(\zeta) - \alpha(0)\right]u_1,$$

$$\dot{B}u = \zeta^{-1}\left[\beta(\zeta) - \beta(0)\right]u,$$

$$\dot{\tilde{C}} = \begin{bmatrix} \dot{M} \\ \dot{C} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{M}x = x(0), \tag{5.1}$$

$$\dot{C} \in \mathbb{B}(\dot{X}, U): \quad (\dot{C}x, u)_U = (x, \beta(\zeta)u)_{L^2(Y_1)},$$

$$\dot{\tilde{D}} = \begin{bmatrix} \dot{S} & \dot{N} & 0 \\ \dot{L} & \dot{D} & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{S}u_1 = \alpha(0)u_1, \qquad \dot{N}u = \beta(0)u, \qquad \dot{D}u = c(0)u,$$

$$\dot{L} \in \mathbb{B}(U_1, U): \quad (\dot{L}u_1, u)_U = (\dot{K}u_1, \dot{B}u)_U + (\dot{S}u_1, \dot{N}u)_U.$$

Простота системы прохождения $\dot{\tilde{\Sigma}}$ следует из того, что система $\dot{\Sigma}_1 = (\dot{\tilde{A}}, \dot{K}, \dot{M}, \dot{S}; \dot{X}, U_1, Y_1)$ по построению является простой консервативной системой рассеяния с двусторонне внутренней матрицей рассеяния $\alpha(z)$. Более того, система $\dot{\tilde{\Sigma}}$ является минимальной, так как $\dot{\Sigma}_1$ минимальна, поскольку у нее $A \in C_{00}$.

Согласно теореме 3.1 система $\dot{\Sigma} = (\dot{\tilde{A}}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{D}; \dot{X}, U)$ является пассивной двусторонне устойчивой системой сопротивления с матрицей сопротивления $c \in \ell(U)$.

Если Σ — произвольная двусторонне устойчивая пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(\in \ell(U))$, то ее можно рассматривать как часть некоторой простой консервативной системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI, матрица прохождения которой $\tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ является двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией $c(z)$ по теореме 4.1. Для $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ можно рассмотреть функциональную модель $\dot{\tilde{\Sigma}}_{J_1,J_2}$, построенную по $\theta = \tilde{\theta}_{J_1,J_2}$ по формулам (5.1). Она дает функциональную модель $\dot{\Sigma}$ для системы сопротивления Σ.

Укажем, при каких SI-дилатациях θ такая система $\dot{\Sigma}$ является минимальной. При этом рассматриваемые здесь функции θ не обязательно должны быть (J_1, J_2)-внутренними SI-дилатациями с минимальными потерями функции c.

То, что SI-дилатация θ является минимальной, можно записать в виде двух условий:

$$\text{a)}\ (\alpha, \gamma)_R = I, \qquad \text{b)}\ (\alpha, \beta)_L = I. \tag{5.2}$$

Условие a) (b)) в (5.2) означает, что α и γ (α и β) не имеют нетривиального общего двусторонне внутреннего правого (соответственно, левого) делителя.

Теорема 5.1. *Пусть для $c(z)$ существует двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация θ и Σ — двусторонне устойчивая пассивная система сопротивления, построенная по простой консервативной системе прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ с матрицей прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2} \equiv \theta$ в D как ее часть (по формулам (5.1)). Для того чтобы система Σ с матрицей сопротивления $c(z)$ была управляемой (наблюдаемой), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие a) (b)) в (5.2). Для того чтобы система Σ была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены оба условия в (5.2), т. е. чтобы двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация θ была минимальной.*

Доказательство. Пусть у α и β существует общий левый нетривиальный двусторонне внутренний делитель u. Рассмотрим функциональную модель $\dot{\Sigma} = (\dot{\tilde{A}}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{D};\ \dot{X}, U)$ системы $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$, компоненты которой определены в (5.1). Пусть $\mathfrak{D} := H^2(Y_1) \ominus uH^2(Y_1)$. Получаем, что $\mathfrak{D} \neq \{0\}$, $\mathfrak{D} \subset \dot{X}$ (так как u — делитель α), $\dot{A}\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$ и $\dot{C}\mathfrak{D} = \{0\}$, так как $\dot{C}^*U \subset \beta U = ub_0\varphi_c U \subset uH^2(Y_1) \perp \mathfrak{D}$. Поэтому $\dot{X} \neq \dot{X}^o_{\dot{\Sigma}}$, т. е. $\dot{\Sigma}$ не наблюдаемая система.

Обратно, пусть $\dot{X} \neq \dot{X}^o_{\dot{\Sigma}}$. Рассмотрим $\mathfrak{D} = \dot{X} \ominus \dot{X}^o_{\dot{\Sigma}}$. Ясно, что $\mathfrak{D} \subset H^2(Y_1)$. Поскольку $\dot{A}\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, по теореме Берлинга – Лакса – Халмоша существует внутренняя $\mathbb{B}(U_2, Y_1)$-значная функция u такая, что $\mathfrak{D} = H^2(Y_1) \ominus uH^2(U_2)$. Поскольку

$$\mathfrak{D} = H^2(Y_1) \ominus uH^2(U_2) \subset H^2(Y_1) \ominus \alpha H^2(U_1) = \dot{X},$$

то

$$\alpha H^2(U_1) \subset uH^2(U_2). \tag{5.3}$$

Это означает, что u — внутренний левый делитель α. Из (5.3) следует, что

$$\alpha(\zeta)L^2(U_1) \subset u(\zeta)L^2(U_2). \tag{5.4}$$

Так как $\alpha(\zeta)$ принимает унитарные значения почти всюду при $|\zeta| = 1$, то $\alpha(\zeta)L^2(U_1) = L^2(Y_1)$, и включение (5.4) возможно лишь тогда, когда $u(\zeta)L^2(U_2) = L^2(Y_1)$, что выполняется тогда и только тогда, когда u является двусторонне внутренней функцией. При этом можно записать, $U_2 = Y_1$. Поскольку $\dot{C}\mathfrak{D} = \{0\}$, то $\dot{C}^*U \subset \beta U \subset \mathfrak{D}^\perp = uH^2(Y_1)$, и так как $\beta \in H^2(U, Y_1)$, то u — левый делитель β. Положим

$$\tilde{\theta}(\zeta) := \begin{bmatrix} u(\zeta)^* & 0 & 0 \\ 0 & I_U & 0 \\ 0 & 0 & I_U \end{bmatrix} \theta(\zeta),$$

где $\theta(\zeta)$ понимается в слабом смысле, введенном в пп. 4.3. Функция $\tilde{\theta}(z)$ из D в $\mathbb{B}(\tilde{U}, \tilde{Y})$ является двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией для $c(z)$. С ее помощью легко получаем представление θ в виде (4.11), где $v = I$ и u — непостоянная двусторонне внутренняя функция. Значит, θ не является минимальной двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией $c(z)$.

Критерий управляемости проверяется аналогичным образом.

5.2. Реализация консервативных систем сопротивления. С помощью двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатации θ функции $c \in \ell(U)$ реализуем теперь консервативную систему сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$. Для этого построим простую консервативную систему прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI с матрицей прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2} \equiv \theta$ в D, например, по формулам (5.1). Далее проведем процедуру подключения к пассивной системе сопротивления Σ, являющейся частью системы прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$, каналов рассеяния такую же, как и в случае пассивной системы рассеяния в [15, с. 219] (предложение 9). Тогда полученная консервативная система сопротивления $\hat{\Sigma}$ будет дилатацией пассивной системы Σ. Функциональная модель $\dot{\hat{\Sigma}} = (\dot{\hat{A}}, \dot{\hat{B}}, \dot{\hat{C}}, \dot{\hat{D}}; \dot{\hat{X}}, U)$ системы $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}; \hat{X}, U)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{\hat{X}} := K^2(Y_1) \oplus \dot{X} \oplus \alpha H^2(U_1) = L^2(Y_1), \qquad x \in \dot{\hat{X}}, \quad u \in U,$$

$$\dot{\hat{A}}x = \zeta^{-1}x(\zeta), \qquad \dot{\hat{B}}u = \zeta^{-1}\beta(\zeta)u, \tag{5.5}$$

$$\dot{\hat{C}}^*u = \beta(\zeta)u, \qquad \dot{\hat{D}}u = c(0)u.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть $\theta \in SI \cap U_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ — двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация функции $c \in \ell(U)$ и по θ определены простая консервативная система прохождения $\tilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI с матрицей прохождения $\tilde{\theta}_{J_1,J_2} \equiv \theta$ в D и ее часть — пассивная система сопротивления Σ с матрицей сопротивления $c(z)$. Консервативная система сопротивления $\hat{\Sigma}$, являющаяся дилатацией Σ и полученная из Σ подключением к ней каналов рассеяния, является простой тогда и только тогда, когда θ является (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией функции $c(z)$ с минимальными потерями.*

Доказательство. Рассмотрим функциональную модель $\dot{\hat{\Sigma}}$ системы $\hat{\Sigma}$, построенную по формулам (5.5). Для нее имеем

$$\dot{\hat{X}}^o_{\dot{\hat{\Sigma}}} = \bigvee_0^\infty \left(\dot{\hat{A}}^*\right)^n \dot{\hat{C}}^* U = \bigvee_0^\infty \zeta^n \beta(\zeta) U,$$

$$\dot{\hat{X}}^c_{\dot{\hat{\Sigma}}} = \bigvee_0^\infty \dot{\hat{A}}^n BU = \bigvee_{-\infty}^{-1} \zeta^n \beta(\zeta) U.$$

Отсюда сразу видно, что условие простоты $\dot{\hat{X}} = \dot{\hat{X}}^o_{\dot{\hat{\Sigma}}} \vee \dot{\hat{X}}^c_{\dot{\hat{\Sigma}}}$ системы $\dot{\hat{\Sigma}}$ будет выполнено в том и только в том случае, когда для функции β выполнено условие a) в (4.3). В силу равносильности условий a) и b) в (4.3) можно заключить, что утверждение теоремы имеет место.

В заключение отметим, что справедлива следующая теорема (см. [24]).

Теорема 5.3. *Пусть $c \in \ell(U)$ и $\dim U < \infty$. Тогда для функции $c(z)$ существует SI-дилатация $\theta \in SI \cap U_{J_1,J_2}(D; \tilde{U}, \tilde{Y})$ с минимальными потерями тогда и только тогда, когда c имеет псевдопродолжение c_- во внешность D_e круга D с ограниченной характеристикой Неванлинны в D_e, т. е. такая функция c_-, что $c_-(1/z) \in N(U,U)$ и*

$$\lim_{r\uparrow 1} c(r\zeta) = \lim_{r\downarrow 1} c_-(r\zeta) \quad \text{почти всюду при} \quad |\zeta| = 1.$$

Важным подклассом класса C_{00} является класс C_0 сжатий A, введенный в [27], для которых определена минимальная функция $m_A(z)$. Результаты, касающиеся матриц сопротивления пассивных систем с основным оператором A класса C_0, частично анонсированы в работе [13] и будут подробно опубликованы отдельно. В частности, будет рассмотрен случай, когда $A \in C_0(m)$ в смысле [27], на который переносятся наши результаты о двусторонне (J_1, J_2)-внутренних SI-дилатациях функций $c \in \ell(U)$, полученные в [24] для случая $\dim U < \infty$, т. е. когда $c(z)$ — матрицы-функции класса Каратеодори.

1. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексами дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. – 1949. – № 2. – С. 1 – 66.
2. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах для неоднородной струны // Докл. АН СССР. – 1952. – **82**, № 5. – С. 881 – 884.
3. *Кац И. С., Крейн М. Г.* О спектральных функциях струны // Добавление II в монографии Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М., 1968. – С. 629 – 647.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* О треугольном представлении линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций // Докл. АН СССР. – 1967. – **176**, № 2. – С. 272 – 275.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Об одном описании операторов сжатий, подобных унитарным // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1**, вып. 1. – С. 38 – 60.
7. *Крейн М. Г.* Аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве // Тр. Междунар. конф. математиков (М., 16 – 20 авг. 1966 г.). – М., 1968. – С. 189 – 216.
8. *Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Общие теоремы о треугольном представлении линейных операторов и мультипликативном представлении их характеристических функций // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, вып. 1. – С. 1 – 27.
9. *Willems Jan C.* Dissipative dynamical systems. I. General theory // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1972. – **45**. – P. 321 – 351.
10. *Willems Jan C.* Dissipative dynamical systems. II. Linear systems with quadratic supply rates // Ibid. – P. 352 – 393.
11. *Лившиц М. С.* Операторы, колебания, волны. – М.: Наука, 1966. – 298 с.
12. *Бродский М. С., Лившиц М. С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 1. – С. 3 – 85.
13. *Аров Д. З.* Оптимальные и устойчивые пассивные системы // Докл. АН СССР. – 1979. – **247**, № 2. – С. 265 – 268.
14. *Аров Д. З.* Устойчивые диссипативные линейные стационарные динамические системы рассеяния // J. Oper. Theory. – 1979. – **2**. – P. 95 – 126.
15. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**. – P. 211 – 228.
16. *Arov D. Z., Nudel'man M. A.* Tests for the similarity of all minimal passive realizations of a fixed transfer function (scattering or resistance matrix // Mat. Sb. – 2002. – **193**, № 6. – P. 791 – 810.
17. *Аров Д. З.* О методе Дарлингтона в исследовании диссипативных систем // Докл. АН СССР. – 1971. – **201**, № 3. – С. 559 – 562.
18. *Аров Д. З.* Реализация матриц-функций по Дарлингтону // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 6. – С. 1299 – 1331.

19. *Аров Д. З.* Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 3. – С. 540 – 563.
20. *Аров Д. З.* О функциях класса П // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1984. – **135**. – С. 2645 – 2659.
21. *Lindquist A., Pavon M.* On the structure of state-space models for discrete-time stochastic vector processes // IEEE Trans. Auto. Contr. – 1984. – **AC-29**. – P. 418 – 432.
22. *Lindquist A., Picci G.* On a condition for minimality of Markovian splitting subspaces // Syst. and Contr. Lett. – 1982. – **1**. – P. 264 – 269.
23. *Lindquist A., Picci G.* Realization theory for multivariate stationary Gaussian processes // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 1985. – **23**. – P. 809 – 857.
24. *Аров Д. З., Роженко Н. А.* $J_{p,m}$-внутренние дилатации матриц-функций класса Каратеодори, имеющие псевдопродолжение // Алгебра и анализ. – 2007. – **19**, № 3. – С. 76 – 106.
25. *Dewilde P.* Input-output description of roomy systems // SIAM J. Contr. and Optimiz. – 1976. – **14(4)**. – P. 712 – 736.
26. *Douglas R. G., Helton J. W.* Inner dilations of analytic matrix functions and Darlington synthesis // Acta sci. math. (Szeged). – 1973. – **34**. – P. 61 – 67.
27. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
28. *Аров Д. З.* Линейные стационарные пассивные системы с потерями: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1983. – 298 с.
29. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исслед. – 1966. – **1**, вып. 2. – С. 3 – 64.
30. *Alpay D., Dijksma A., Rovnyak J., de Snoo H.* Schur functions, operator colligations, and reproducing kernel Pontryagin spaces // Operator Theory. – Basel etc.: Birkhäuser, 1997. – **96**. – 229 p.
31. *Гинзбург Ю. П.* О J-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве // Научн. зап. Одес. пед. ин-та. – 1958. – **22**, № 1. – С. 13 – 20.
32. *Katsnelson V. E., Kirstein B.* On the theory of matrix-valued functions belonging to the Smirnov class // Topics in Interpolation Theory / Eds H. Dym, B. Fritsche, V. Katsnelson, B. Kirstein. – Basel: Birkhäuser, 1997. – P. 299 – 350.

Получено 22.01.2007