УДК 517.5

М. Ф. Тиман, д-р физ.-мат. наук (Агроун-т, Днепропетровск)

О РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

We give a new proof of the well-known statement due to S. N. Bernstein that, among entire functions of order $\leq \sigma$, which give the best (of order σ) uniform approximation of a periodic function on $(-\infty, \infty)$, there exists trigonometric polynomial of degree $\leq \sigma$. We prove an analogue of the Bernstein statement and the Jackson's theorem for uniform almost periodic functions with an arbitrary spectrum.

Наводиться доведення відомого твердження С. Н. Бернштейна про те, що серед цілих функцій степеня $\leq \sigma$, які на $(-\infty, \infty)$ найкраще рівномірно наближають (з порядком σ) періодичну функцію, існує тригонометричний поліном степеня $\leq \sigma$. Доведено аналог цього твердження С. Н. Бернштейна та теорему Джексона для рівномірних майже періодичних функцій з довільним спектром.

Пусть $B(\sigma)$ — класс целых функций степени $\leq \sigma$, ограниченных на всей действительной оси. С. Н. Бернштейн [1, с. 374] доказал, что среди функций из класса $B(\sigma)$, осуществляющих на $(-\infty, \infty)$ наилучшее равномерное приближение порядка σ периодической функции $f(x)$, существует тригонометрический полином степени $\leq \sigma$.

В этой статье приводится новое доказательство утверждения С. Н. Бернштейна, позволяющее получить следующие результаты для равномерных почти периодических функций.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — равномерная почти периодическая функция с произвольным спектром $\Lambda\{\lambda_k\}$ и $A(\sigma; f)$, $\sigma > 0$, — наилучшее равномерное приближение порядка σ функции $f(x)$ функциями из класса $B(\sigma)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная тригонометрическая сумма*

$$P(x; N, \sigma) = \sum_{k=1}^{N} b_k \exp(i\lambda_k x), \tag{1}$$

где $\lambda_k \in \Lambda$, $|\lambda_k| \leq \sigma$, $k = 1, 2, \ldots, N$, такая, что равномерно по x

$$|f(x) - P(x; N, \sigma)| \leq A(\sigma; f) + \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — равномерная почти периодическая функция, спектр $\Lambda(\lambda_k)$ которой на каждом конечном отрезке действительной оси имеет конечное число предельных точек. Тогда среди функций $g(x; \sigma) \in B(\sigma)$, удовлетворяющих соотношению*

$$\sup_x |f(x) - g(x; \sigma)| = A(\sigma; f), \quad -\infty < x < \infty, \tag{3}$$

существует тригонометрический полином степени $\leq \sigma$ вида (1) такой, что

$$|f(x) - P(x; N, \sigma)| \leq A(\sigma; f). \tag{4}$$

Наряду с этими утверждениями справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ — равномерная почти периодическая функция с произвольным спектром $\Lambda(\lambda_k)$. Тогда можно указать полином вида (1) степени $\leq \sigma$ такой, что*

$$|f(x) - P(x; N, \sigma)| \leq C(k)\Omega_k(f; 1/\sigma), \tag{5}$$

где $C(k)$ *не зависит от* f, N *и* σ, *а* $\Omega_k(f; 1/\sigma)$ — *модуль гладкости порядка* k *функции* $f(x)$ *с шагом* $1/\sigma$ *в равномерной метрике.*

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для принадлежности равномерной почти периодической функции к классу* $B(\sigma)$ *необходимо и достаточно, чтобы ее показатели Фурье* $\Lambda\{\lambda_k\}$ *удовлетворяли неравенству* $|\lambda_k| \le \sigma$ *для всех* k.

Достаточность условия леммы установлена в [2, с. 88]. Доказательство необходимости условия проводится аналогично тому, как это сделано для случая $\lambda_k = k$ в [1, с. 375].

Доказательство теоремы 2 для случая $\lambda_k = k$ (периодический случай). Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция и

$$\Phi(x; n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F(t; n)\, dt,$$

где $F(t; n) = \sin^2(nt/2)/(n \sin^2(t/2))$ — ее суммы Фейера. Очевидно, в силу периодичности функции $f(x)$

$$\Phi(x; n) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi N}^{\pi N} f(x+t) F(t; n)\, dt. \tag{6}$$

Известно, что равномерно по x

$$\lim \Phi(x; n) = f(x), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Пусть теперь функция $g(x; \sigma) \in B(\sigma)$ удовлетворяет соотношению (3). Для каждого натурального N рассмотрим функцию

$$Q(x; \sigma, N, n) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi N}^{\pi N} g(x+t; \sigma) F(t; n)\, dt.$$

В силу свойств ядра $F(t; n)$ и (6) равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$, N, n имеем

$$|\Phi(x; n) - Q(x; \sigma, N, n)| \le A(\sigma; f). \tag{8}$$

Кроме того, из равенства

$$Q(x+2\pi; \sigma, N, n) - Q(x; \sigma, N, n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi N} \left\{ \int_{N\pi}^{N\pi+2\pi} - \int_{-N\pi}^{-N\pi+2\pi} g(x+t; \sigma) F(t; n)\, dt \right\}$$

вытекает, что для $x \in (-\infty, \infty)$ выполняется соотношение

$$\lim \{ Q(x+2\pi; \sigma, N, n) - Q(x; \sigma, N, n) \} = 0, \quad N \to \infty. \tag{9}$$

Легко также проверить, что в силу свойств функции $g(x; \sigma)$ при всяком фиксированном n совокупность функций $\{Q(x; \sigma, N, n)\}$, $N = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $(-\infty, \infty)$. Следовательно, из нее можно выбрать последовательность $\{Q(x; \sigma, N_l, n)\}$, равномерно сходящуюся на любом конечном отрезке. Пусть

$$\lim Q(x; \sigma, N_l, n) = G(x; \sigma, n), \quad N_l \to \infty, \tag{10}$$

Как известно [1], функции $Q(x; \sigma, N_l, n)$ принадлежат классу $B(\sigma)$, а из (10) следует, что и $G(x; \sigma, n) \in B(\sigma)$. Кроме того, из (9) и (10) вытекает, что функция $G(x; \sigma, n)$ имеет период 2π. В силу приведенной выше леммы $G(x; \sigma, n)$ является тригонометрическим полиномом степени $\leq \sigma$. Рассмотрим теперь совокупность полиномов $\{G(x; \sigma, n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность $\{G(x; \sigma, n_k)\}$. Пусть

$$\lim G(x; \sigma, n_k) = P(x; \sigma), \quad n_k \to \infty, \tag{11}$$

где $P(x; \sigma)$ — полином степени $\leq \sigma$. Тогда при каждом $x \in (-\infty, \infty)$ в силу (8) имеем неравенство

$$|\Phi(x; n_k) - Q(x; \sigma, N_l, n_k)| \leq A(f; \sigma), \tag{12}$$

из которого при $N_l \to \infty$, а затем при $n_k \to \infty$, ввиду (7), (8), (11) и (12) получаем утверждение С. Н. Бернштейна.

***Доказательство** теоремы* 1. Пусть множество чисел $\beta\{\beta_k\}$ является базисом для спектра $\Lambda\{\lambda_k\}$ равномерной почти периодической функции $f(x)$ и $\beta\{\beta_k\} \in \Lambda\{\lambda_k\}$ [2, с. 67]. Рассcмотрим суммы Бохнера – Фейера, соответствующие функции $f(x)$:

$$P(f; x; n, m) = M_t\{f(x+t)K(t; n, m)\} =$$

$$= \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)K(t; n, m)\,dt, \quad T \to \infty,$$

где [2, с. 70]

$$K(t; n, m) = n^{-r} \prod_{j=1}^{r} \sin^2(n\beta_j t/(2m!)) / \sin^2(\beta_j t/(2m!))$$

составное ядро Фейера и $M\{K(t; n, m)\} = 1$.

Пусть теперь $g(x; \sigma) \in B(\sigma)$ и удовлетворяет соотношению (3). Рассмотрим функции

$$F(x; n, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)K(t; n, m)\,dt,$$

для которой равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim F(x; n, T) = P(f; x; n, m), \quad T \to \infty, \tag{13}$$

и

$$Q(x; \sigma, n, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(x+t; \sigma)K(t; n, m)\,dt.$$

В силу теоремы Бохнера – Фейера, для любого $\varepsilon > 0$ выберем n и m так, чтобы

$$|f(x) - P(f; x; n, m)| \leq \varepsilon. \tag{14}$$

Далее, очевидно,

$$|F(x; n, T) - Q(x; \sigma, n, T)| \le A(f; \sigma)\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} K(t; n, m)\, dt \tag{15}$$

и при $T \to \infty$ правая часть в (15) стремится к числу $A(f; \sigma)$. Следовательно, совокупность функций $\{Q(x; \sigma, n, T)\}$ при фиксированных n и m равномерно ограничена. Можно также убедиться в том, что она и равностепенно равномерно непрерывна. Поэтому при фиксированных n и m укажем последовательность чисел $\{T_l\}$, для которой

$$\lim Q(x; \sigma, n, T_l) = G(x; \sigma, n), \quad T_l \to \infty, \tag{16}$$

равномерно на каждом конечном отрезке действительной оси. При этом функция $G(x; \sigma, n) \in B(\sigma)$ и в силу (15)

$$|P(f; x; n, m) - G(x; \sigma, n)| \le A(f; \sigma) \tag{17}$$

равномерно по x, n и m. Покажем, что всякий ε-почти период τ функции $f(x)$ будет также ε-почти периодом функции $G(x; \sigma, n)$. Для этого рассмотрим разность

$$Q(x+\tau; \sigma, n, T) - Q(x; \sigma, n, T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(x+t+\tau; \sigma)\{K(t; n, m) -$$

$$-K(t+\tau; n, m)\}\, dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(x+t+\tau; \sigma) K(t+\tau; n, m)\, dt -$$

$$-\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(x+t; \sigma) K(t; n, m)\, dt = J_1(T) + J_2(T) - J_3(T).$$

Очевидно, разность

$$J_2 - J_3 = \frac{1}{2T}\left\{\int_{T}^{T+\tau} - \int_{-T}^{-T+\tau} [\, g(x+u; \sigma) K(u; n, m)\, dt\,]\right\}$$

при $T \to \infty$ и фиксированных τ, n, m стремится к нулю. Оценим теперь $J_1(T)$. Пусть $|g(x; \sigma)| \le c$. Тогда [2]

$$|J_1(T)| \le \frac{c}{2T}\int_{-T}^{T} |K(t+\tau; n, m) - K(t; n, m)|\, dt \le$$

$$\le c\prod_{k=1}^{r}\sum_{|\nu_k| \le n}\left(1 - \frac{|\nu_k|}{n}\right)\left|\exp\left(\frac{-i\beta_k\tau}{m!}\right) - 1\right| \le cS_N,$$

где

$$S_N = 2\sum_{\nu=1}^{N}\left|\sin\left(\frac{\lambda_\nu\tau}{2}\right)\right|, \quad \lambda_\nu = \sum_{k=1}^{r}\frac{\nu_k\beta_k}{m!}.$$

Так как τ — ε-почти период функции $f(x)$ и $\Lambda\{\lambda_n\}$ — ее спектр, то справедливы неравенства $|\lambda_k\tau| \le \delta \pmod{2\pi}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, где $\sigma < \pi$ и зависит от ε.

Положив $\delta = \varepsilon/(cN)$, получим, что cS_N, а значит, и $J_1(T) \leq \varepsilon$. Из оценок для J_1, J_2, J_3 вытекает

$$\lim |Q(x+\tau; \sigma, n, T) - Q(x; \sigma, n, T)| \leq \varepsilon, \quad T \to \infty.$$

Следовательно, $G(x; \sigma, n)$ — также равномерная почти-периодическая функция. Можно убедиться в том, что функция $G(x; \sigma, n)$ — тригонометрический полином со спектром из спектра $\Lambda\{\lambda_k\}$ функции $f(x)$, у которого $|\lambda_k \tau| \leq \sigma$. Это следует из того, что при $T_l \to \infty$

$$G(x; \sigma, n) = \lim Q(x; \sigma, n, T_l) =$$

$$= \sum c\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{\nu_k \beta_k}{m!}\right) \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{|\nu_k|}{n}\right) \exp\left(\frac{-i\nu_k \beta_k x}{m!}\right),$$

где первая $\sum$ в правой части этого равенства берется по всем ν_k, которые по модулю $\leq n$, $k = 1, 2, \ldots, r$,

$$c\left(\sum \nu_k \beta_k / m!\right) = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(u; \sigma) \prod \exp\left(-\frac{i\nu_k \beta_k u}{m!}\right) du,$$

где сумма и произведение в этом равенстве берутся от $k = 1$ до $k = r$, а предел рассматривается при $T = T_l \to \infty$. Условие $|\lambda_k \tau| \leq \sigma$ следует из приведенной выше леммы. В итоге, поскольку

$$|f(x) - G(x; \sigma, n)| \leq |f(x) - P(f; x; n; m)| + |P(f; x; n, m) - G(x; \sigma, n)|,$$

в силу (14) и (17) получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Тем же методом, что и при доказательстве теоремы 1, получаем совокупность $\{G(x; \sigma, n)\}$, $n = 1, 2, \ldots, r$, тригонометрических полиномов степени $\leq \sigma$. Эта совокупность полиномов равномерно ограничена и равностепенно равномерно непрерывна. Выберем из нее последовательность $\{G(x; \sigma, n_k)\}$, сходящуюся равномерно на каждом конечном отрезке действительной оси. Пусть

$$\lim G(x; \sigma, n_k) = R(x; \sigma), \quad n_k \to \infty. \tag{18}$$

Коэффициенты полиномов $G(x; \sigma, n_k)$, как это видно из доказательства теоремы 1, имеют вид

$$a(\nu; n_k) = c(\lambda_\nu) \prod_{l=1}^{r} \left(1 - \frac{|\lambda_l|}{n_k}\right),$$

и следовательно, при $n_k \to \infty$ удовлетворяют условиям леммы 3.5.2 из [2, с. 168, 169], из которой для спектров $\Lambda\{\lambda_k\}$, оговоренных в теореме 2, вытекает, что предельная функция в (18) является равномерной почти периодической. Так как функция $R(x; \sigma)$, к тому же, целая степени $\leq \sigma$, то она является полиномом степени $\leq \sigma$. Переходя к пределу при $n = n_k \to \infty$ в неравенстве (17), получаем утверждение теоремы 2.

Отметим, что для случая, когда спектр $\Lambda\{\lambda_k\}$ функции $f(x)$ имеет базис, состоящий из одной точки, теорема 2 методом С. Н. Бернштейна установлена Е. А. Бредихиной в [3].

Доказательство *теоремы* 3. Тот факт, что существует тригонометрический полином $P(x; N, \sigma)$ степени $\le \sigma$, для которого верно неравенство (5), вытекает из теоремы 1. Для того чтобы в этом убедиться, в неравенстве (2) следует положить $\varepsilon = \Omega_k(f; 1/\sigma)$ и воспользоваться известным неравенством $A(f; \sigma) \le C(k)\Omega_k(f; 1/\sigma)$ (см., например, [4, с. 183]). Однако можно не только утверждать существование таких полиномов, но и указать конкретный их вид. Действительно, пусть $f(x)$ удовлетворяет теореме 3. Рассмотрим функцию

$$g(x; \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\left\{(-1)^{k-1}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\binom{l}{k} f(x + lt/\sigma)\right\}dt,$$

где

$$K(t) = \frac{\left\{t^{-1}\sin(t/(2r))^{2r}\right\}}{\mu}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt = 1, \quad 2r \ge k + 3.$$

Известно, что равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - g(x; \sigma)| \le C(k)\Omega_k(f; 1/\sigma). \tag{19}$$

Так как $g(x; \sigma)$ — целая равномерная почти периодическая функция степени $\le \sigma$, то для любых n, m функция $Q(x; n, \sigma) = M_t\{g(x+t; \sigma)K(t; n, m)\}$ будет полиномом степени $\le \sigma$, для которого

$$|f(x) - Q(x; n, \sigma)| \le C(k)\Omega_k(f; 1/\sigma). \tag{20}$$

Убедимся в этом. Выберем n настолько большим, чтобы для суммы Бохнера – Фейера выполнялась оценка

$$|f(x) - M_t\{f(x+t)K(t; n, m)\}| \le \Omega_k(f; 1/\sigma), \tag{21}$$

где $K(t; n, m)$ — составное ядро Фейера. Чтобы получить неравенство (20), необходимо при выбранном n в левой части соотношения части под знаком модуля прибавить и вычесть суммы Бохнера – Фейера для функции $f(x)$, а затем воспользоваться оценками (21) и (19).

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени // Собрание сочинений. Т. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – С. 371–375.
2. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М.–Л.: Гостехиздат, 1947. – 396 с.
3. *Бредихина Е. А.* К вопросу об аппроксимации почти периодических функций // Сиб. мат. журн. – 1964. – **5**, № 4. – С. 768–773.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 455 с.

Получено 29.12.93