УДК 517.5

М. Ш. Шабозов, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ФИКСИРОВАННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

For classes of functions given on the segment $[0,1]$ optimal quadrature formulas are found for singular integrals with a fixed singularity. The obtained results are extended to the case of double integrals.

Для класів функцій, заданих на відрізку $[0,1]$, знайдені оптимальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів з фіксованою особливістю. Одержані результати поширюються для двовимірних інтегралів.

1. В последнее время в литературе рассмотрены различные постановки и методы решения задач построения асимптотически оптимальных квдратурных формул для сингулярных интегралов (см. [1, 2] и библиографию в них). Вопрос о построении оптимальной квадратурной формулы для сингулярных интегралов в [1] не рассматривался, а в [2] найдена оптимальная квадратурная формула для класса функций, имеющих ограниченную вариацию на конечном отрезке. Рассмотрим сингулярный интеграл с фиксированной особенностью вида

$$S(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^s}\,dt, \quad 0 < s \le 1. \tag{1}$$

Условие $f(0)=0$ является необходимым для существования интеграла (1) при $s=1$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $f(x)$, определенных на $[0,1]$. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^s}\,dt = \sum_{k=1}^N p_k f(t_k) + R_N^{(s)}(f) \equiv L(f) + R_N^{(s)}(f), \tag{2}$$

задаваемую вектором узлов

$$T = T_N: \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N \le 1 \tag{3}$$

и коэффициентов $P = \{p_k\}$, $k = 1, \ldots, N$. Ясно, что $L(f) = L(f; T, P)$ и $R_N^{(s)}(f) = R_N^{(s)}(f; T, P)$.

Требуется найти величину [3]

$$\mathscr{E}_N^{(s)}(\mathfrak{M}) \overset{\text{def}}{=} \inf_{T,P} R_N^{(s)}(\mathfrak{M}) \overset{\text{def}}{=} \inf_{T,P}\sup_{f\in\mathfrak{M}} \left|R_N^{(s)}(f)\right| \tag{4}$$

и указать вектор (T^0, P^0), на котором достигается нижняя грань в (4). Квадратурная формула с вектором (T^0, P^0) называется оптимальной для класса $\mathfrak{M}$. Будем рассматривать следующие классы функций: $H^1 = H^1(1; 0, 1)$ — класс функций $f(t)$, удовлетворяющих на отрезке $[0,1]$ условию Липшица

$$|f(t') - f(t'')| \le |t' - t''|, \quad t',\ t'' \in [0,1];$$

$W^{(1)} = W^{(1)}(1; 0, 1)$ — класс функций $f(t)$, непрерывных на $[0,1]$ и имеющих кусочно-непрерывную производную $f'(t)$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{0\le t\le 1} \operatorname{vrai} |f'(t)| \le 1.$$

Известно [3], что $H^1 = W^{(1)}$.

2. Если известен вектор значений $f(T_N) = \{ f(t_1), \ldots, f(T_N) \}$ функций $f(t) \in H^1$ в системе точек (3), то верхнюю и нижнюю границы множества [4]

$$H^1(f(T_N)) = \{ g(t)\colon\ g \in H^1,\ g(t_k) = f(t_k),\ k = 1, 2, \ldots, N \}$$

образуют функции, определенные на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, N$, соответственно равенствами

$$\psi(t) = \psi(f(T_N), t) = \max_{1 \le k \le N} \{ f(t_k) - |t - t_k| \}, \tag{5}$$

$$\varphi(t) = \varphi(f(T_N), t) = \min_{1 \le k \le N} \{ f(t_k) + |t - t_k| \}, \tag{6}$$

причем нетрудно проверить, что $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ принадлежат классу H^1 и $\psi(t_k) = f(t_k) = \varphi(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$. Очевидно, при любом $t \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\psi(t) \le f(t) \le \varphi(t). \tag{7}$$

Функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ являются соответственно точной минорантой и точной мажорантой для функций $f(t) \in H^1$. Из (7) вытекает неравенство

$$\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^s}\,dt \ \le\ \int_0^1 \frac{f(t)}{t^s}\,dt \ \le\ \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^s}\,dt, \quad 0 < s \le 1. \tag{8}$$

Класс H^1 является выпуклым, замкнутым и центрально-симметричным множеством. Поэтому из (8) следует, что образом множества $H^1(f(T_N))$ при отображении (1) является отрезок

$$S(H^1(f(T_N))) = \left[\int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^s}\,dt, \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^s}\,dt \right].$$

Согласно определению [5, с. 88] точка

$$L(f; T, P) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(t) + \psi(t)}{t^s}\,dt \tag{9}$$

является центром этого отрезка, а величина

$$R_N^{(s)}(f; T, P) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{t^s}\,dt \tag{10}$$

— его радиусом, т. е. половиной длины. Из (10) следует, что задача (4) при $\mathfrak{M} = H^1$ эквивалентна нахождению величины

$$\mathcal{E}_N^{(s)}(H^1) = \inf_{T,P} \sup_{f \in H^1} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{t^s}\,dt. \tag{11}$$

Квадратурную формулу (2) будем рассматривать на классе H^1 при предположениях: *а*) $t_0 = 0$, $t_N = 1$, т. е. (2) является формулой типа Маркова; *б*) $0 \le t_1$, $t_N \le 1$. В дальнейшем понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $f(t) \in H^1$. *Тогда с учетом предположения а) справедливы соотношения*

$$R_N^{(1)}(H^1(T_N)) \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in H^1} R_N^{(1)}(f; T, P) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ t_{k+1} \ln \frac{2t_{k+1}}{t_{k+1}+t_k} - t_k \ln \frac{t_{k+1}+t_k}{2t_k} \right\}, \tag{12}$$

$$L(f;T,P) = \sum_{k=1}^{N-1} \ln \frac{t_{k+1}+t_k}{t_k+t_{k-1}} f(t_k) + f(1) \ln \frac{2}{1+t_{N-1}}. \tag{13}$$

Доказательство. Очевидно, функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ представимы в виде

$$\psi(t) = \begin{cases} f(t_{k-1}) - (t - t_{k-1}), & t_{k-1} \le t \le \eta_k, \\ f(t_k) - (t_k - t), & \eta_k \le t \le t_k, \end{cases} \quad k = 1, \ldots, N,$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t_{k-1}) + (t - t_{k-1}), & t_{k-1} \le t \le \xi_k, \\ f(t_k) + (t_k - t), & \xi_k \le t \le t_k, \end{cases} \quad k = 1, \ldots, N.$$

Непосредственным вычислением имеем

$$R_N^{(1)}(f;T,P) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{t^s} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left\{ t_k \ln \frac{t_k^2}{\xi_k \eta_k} - t_{k-1} \ln \frac{\xi_k \eta_k}{t_{k-1}^2} - \left[f(t_k) - f(t_{k-1}) \right] \ln \frac{\xi_k}{\eta_k} \right\}. \tag{14}$$

Из геометрических соображений ясно, что при любом расположении точки ξ_k, $\eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ для произвольной $f(t) \in H^1$ $[f(t_k) - f(t_{k-1})] \ln(\xi_k / \eta_k) \ge 0$. Поэтому величина (14) принимает наибольшее значение на тех функциях $f(t) \in H^1$, для которых $f(t_k) = 0$, $k = 1, \ldots, N$. При этом очевидно, что $\xi_k = \eta_k = (t_k + t_{k-1})/2$, и мы получаем (12), причем величина (12) от вектора $P = \{p_k\}$ не зависит. Вычисляя $L(f;T,P)$, определенную равенством (9), имеем соотношение (13). Лемма доказана.

Теорема 1. *Среди квадратурных формул типа Маркова, имеющих вид* (2), *оптимальной для класса* H^1 (*или, что то же самое,* W^1) *является формула*

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{N-1} 2 \ln \frac{k+1}{k} f\left(\frac{k(k+1)}{N(N+1)} \right) + \ln \frac{N+1}{N} f(1) + R_N^{(1)}(f), \tag{15}$$

погрешность которой равна

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(H^1) = \mathscr{E}_N^{(1)}(W^1) = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right). \tag{16}$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (12) через $F(t_1, \ldots, t_{N-1})$ и исследуем на минимум. Приравнивая частные производные $\partial F / \partial t_k$, $k = 1, \ldots, N-1$, нулю, получаем систему уравнений

$$2 \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{t_2}{t_1}\right) = 0,$$

$$2 \ln(2t_k) - \ln(t_k + t_{k-1})(t_{k+1} + t_k) = 0, \quad k = 2, \ldots, N-1.$$

Преобразуем уравнения предыдущей системы к виду

$$\begin{gathered} t_2 = 3t_1, \\ 4t_k^2 = (t_k + t_{k-1})(t_{k+1} + t_k), \quad k = 2, \ldots, N-1. \end{gathered} \tag{17}$$

Выражая последовательно $t_k, k = 2, \ldots, N$, через t_1, из рекуррентной формулы $t_{k+1} = (3\,t_k^2 - t_k t_{k-1})/(t_k + t_{k-1})$, $k = 2, \ldots, N-1$, с учетом условия $t_N = 1$ находим единственное решение системы

$$t_k^0 = \frac{k(k+1)}{N(N+1)}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Обычными средствами дифференциального исчисления легко проверить, что $d^2F(t_1^0, \ldots, t_{N-1}^0) \geq 0$. Итак, узлы (18) доставляют минимум функционала F. Для вычисления минимума, выполнив несложное преобразование в правой части (12), с учетом предположения *а*) имеем

$$F(t_1, \ldots, t_{N-1}) = \sum_{k=1}^{N-1} t_k \ln \frac{4t_k^2}{(t_k + t_{k-1})(t_{k+1} + t_k)} + \ln \frac{2}{1 + t_{N-1}}. \tag{19}$$

Из системы (17) следует, что для оптимальных узлов (18) логарифмы под знаком суммы в (19) исчезают, и в результате получаем

$$F(t_1^0, \ldots, t_{N-1}^0) = \ln \frac{2}{1 + t_{N-1}^0} = \ln \frac{N+1}{N} = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right),$$

откуда и следует соотношение (16). Подставляя узлы (18) в (13), имеем оптимальные коэффициенты $P_k = 2\ln((k+1)/k)$, $k = 1, \ldots, N-1$, $P_N = \ln((N+1)/N)$. Теорема 1 доказана.

Если для вектора узлов T потребовать выполнения предположения *б*), то в этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2), *для которых выполняется предположение б*), *оптимальной для класса* $H^1(W^1)$ *является формула*

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{N} 2\ln\frac{k+1}{k}\, f\left(\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right) + R_N^{(1)}(f), \tag{20}$$

погрешность которой на всем классе равна

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(H^1) = \mathscr{E}_N^{(1)}(W^1) = \frac{1}{N+1}. \tag{21}$$

Доказательство. Опуская простые выкладки, для погрешности квадратурной формулы (2) с учетом предположения *б*) находим

$$R_N^{(1)}(H^1; T, P) = 1 - t_N + t_N \ln \frac{2t_N^2}{t_N + t_{N-1}} + t_1 \ln \frac{4t_1}{t_1 + t_2} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{N-1} t_k \ln \frac{4t_k^2}{(t_k + t_{k-1})(t_{k+1} + t_k)}. \tag{22}$$

Как и в теореме 1, минимизируя правую часть (22), получаем оптимальные узлы и коэффициенты:

$$T^0 = \left\{t_k^0 = \frac{k(k+1)}{(N+1)^2}\right\}, \quad P^0 = \left\{p_k^0 = 2\ln\frac{k+1}{k}\right\}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Для оптимального вектора узлов T^0 в этом случае в (22) логарифмы исчезают, и в результате имеем

$$R_N^{(1)}(H^1;T^0,P^0) = 1 - t_N^0 = 1 - \frac{N(N+1)}{(N+1)^2} = 1 - \frac{N}{N+1} = \frac{1}{N+1},$$

откуда и следует точная оценка (21). Теорема 2 доказана.

Замечание. Утверждение теоремы (2) без доказательства приведено в [6], а в [2, с. 41] для квадратурных формул (15) и (20) указана неточная оценка

$$\mathscr{E}_N^{(1)}(W^1) \le \frac{1}{N+1} + \frac{2+\ln N}{2(N+1)^2}.$$

Отметим, что равенство (11) позволяет гораздо проще доказать асимптотически точные оценки, приведенные в [2] для класса H^α при $0<\alpha\le 1$, $0<s<1$.

3. Приведенные в предыдущем пункте результаты легко распространяются на случай сингулярных интегралов любой конечной размерности. Для краткости обозначений остановимся на двумерном случае.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$S(f) = \iint\limits_{(G)} \frac{f(t,\tau)}{t^s\tau^\gamma}\,dt\,d\tau, \quad 0 < s,\gamma \le 1, \tag{23}$$

где $G = [0,1]\times[0,1]$ и подынтегральная функция при $s=\gamma=1$ удовлетворяет условию $f(0,0) = f(t,0) = f(0,\tau) = 0$, $t,\tau\in[0,1]$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс заданных на G функций. Для $f(t,\tau)\in\mathfrak{M}$ рассмотрим кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(G)} \frac{f(t,\tau)}{t^s\tau^\gamma}\,dt\,d\tau = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} P_{kj}\, f(t_k,\tau_j) + R_{NM}^{(s,\gamma)}(f), \tag{24}$$

определяемую вектором (T_1,T_2) узлов (T_N,τ_N): $0\le t_1<t_2<\ldots<t_N\le 1$, $0\le\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_M\le 1$ и вектором P числовых коэффициентов p_{kj}, $k = 1,\ldots,N$; $j=1,\ldots,M$.

Требуется найти величину

$$\mathscr{E}_{NM}^{(s,\gamma)}(\mathfrak{M}) \overset{\text{def}}{=} \inf_{(T_1,T_2,P)}\ \sup_{f\in\mathfrak{M}} \left|R_{NM}^{(s,\gamma)}(f)\right|. \tag{25}$$

Задачу (25) рассмотрим для классов $W^{(1,1)}(1;G)$ и $W^{(1,1)}L(1;G)$ (определение см. в [3]). Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *При* $s=\gamma=1$ *среди кубатурных формул вида* (24) *типа Маркова оптимальной для класса* $W^{(1,1)}(1;G)$ *является формула*

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(G)} \frac{f(t,\tau)}{t\tau}\,dt\,d\tau = {}& \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} 4\ln\frac{k+1}{k}\ln\frac{j+1}{j}\, f\left(\frac{k(k+1)}{N(N+1)},\frac{j(j+1)}{M(M+1)}\right) + \\ &+ 2\ln\frac{N+1}{N}\sum_{j=1}^{M-1}\ln\frac{j+1}{j}\, f\left(1,\frac{j(j+1)}{M(M+1)}\right) + \\ &+ 2\ln\frac{M+1}{M}\sum_{k=1}^{N-1}\ln\frac{k+1}{k}\, f\left(\frac{k(k+1)}{N(N+1)},1\right) + \\ &+ \ln\frac{N+1}{N}\ln\frac{M+1}{M} f(1,1) + R_{NM}^{(1,1)}(f).\end{aligned} \tag{26}$$

При этом погрешность равна

$$\mathscr{E}_{NM}^{(1,1)}(W^{(1,1)}) = \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{M}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)\ln\left(1+\frac{1}{M}\right). \quad (27)$$

Теорема 4. *При* $s = \gamma = 1$ *среди кубатурных формул вида* (24), *использующих* $N\,M$ *значений подынтегральной функции, оптимальной для класса* $W^{(1,1)}(1\,;G)$ *является формула*

$$\iint\limits_{(G)} \frac{f(t,\tau)}{t\tau}\,dt\,d\tau = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} 4\ln\frac{k+1}{k}\ln\frac{j+1}{j}\, f\left(\frac{k(k+1)}{(N+1)^2}, \frac{j(j+1)}{(M+1)^2}\right) + R_{NM}^{(1,1)}(f), \quad (28)$$

погрешность которой равна

$$\mathscr{E}_{NM}^{(1,1)}(W^{(1,1)}) = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{M+1} + \frac{1}{(N+1)(M+1)}. \quad (29)$$

Доказательство теорем 3 и 4 проводится аналогично доказательствам теорем 1 и 2. В [2, с. 118] для кубатурных формул (26) и (28) при $N = M$ приведены оценки, главная часть которых по порядку совпадает с точными оценками (27) и (29). Используя схему рассуждений работы [7] для класса $W^{(1,1)}L(1;G)$, сформулируем следующее утверждение, являющееся уточнением теоремы 5.1.8 [2, с. 180].

Теорема 5. *При* $0 < s, \gamma < 1$ *среди кубатурных формул вида* (24), *использующих* $N\,M$ *значений подынтегральной функции, оптимальной для класса* $W^{(1,1)}L(1\,;G)$ *является формула*

$$\iint\limits_{(G)} \frac{f(t,\tau)}{t^s\tau^\gamma}\,dt\,d\tau = \frac{4(1-s)^{-1}(1-\gamma)^{-1}}{(2N+1)(2M+1)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f\left(\left(\frac{2k}{2N+1}\right)^{1/(1-s)}, \left(\frac{2j}{2M+1}\right)^{1/(1-\gamma)}\right) + R_{NM}^{(s,\gamma)}(f).$$

Погрешность этой формулы на всем классе равна

$$\mathscr{E}_{NM}^{(s,\gamma)}(W^{(1,1)}L) = \frac{1}{(1-s)(2N+1)} + \frac{1}{(1-\gamma)(2M+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(1-s)(1-\gamma)(2N+1)(2M+1)}.$$

1. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1980. – 232 с.
2. *Бойков И. В.* Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. – 210 с.
3. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Оптимизация адаптивных алгоритмов восстановления монотонных функций класса H^ω // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1627–1634.
5. *Сухарев А. Г.* Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. – М.: Наука, 1989. – 304 с.
6. *Онегов Л. А.* Об одной наилучшей квадратурной фромуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 9. – С. 76–79.
7. *Шабозов М. Ш.* Оценки погрешности кубатурных формул, точных для сплайнов на некоторых классах функций двух переменных // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 1. – С. 74–82.

Получено 23.05.94