УДК 512.64

Б. З. Шаваровський (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КАНОНІЧНА ФОРМА МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ З УСІМА РІВНИМИ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ДІЛЬНИКАМИ

The problem of reducing polynomial matrices to the canonical form by using semiscalar equivalent transformations is studied. A class of polynomial matrices is singled out, for which the canonical form with respect to semiscalar equivalence is indicated. This form enables one to solve the classification problem for collections of matrices over a field up to similarity.

Исследуется задача приведения многочленных матриц к каноническому виду посредством полускалярно эквивалентных преобразований. Выделен один класс многочленных матриц, для которого указана каноническая форма относительно полускалярной эквивалентности. Последняя дает возможность решать задачу классификации наборов матриц над полем с точностью до подобия.

При вивченні структури матриць над кільцями многочленів (далі многочленних матриць або матричних многочленів) одним із методів є метод напівскалярної еквівалентності. Поняття напівскалярної еквівалентності вперше було введене П. С. Казімірським і В. М. Петричковичем [1] (див. також монографію [2]). Пізніше з'явилися близькі до цього напрямку праці [3, 4]. Подальший розвиток ця тематика отримала у роботах В. М. Петричковича (див., наприклад, [5, 6]). Задача полягає у побудові простішої, зокрема канонічної, форми матриці та знаходженні її інваріантів, тобто величин, функцій та інших об'єктів, які не змінюються при напівскалярно еквівалентних перетвореннях. Остання задача пов'язана з відомою класичною проблемою пар матриць, якій присвячено значну кількість праць (див., наприклад, [7 – 9]). Кожна з вказаних задач викликає значні труднощі і розв'язується в наш час лише в окремих випадках. Деякі з цих випадків розглянуто в роботах автора [10, 11], а одному з них присвячено дану статтю.

Нехай F — поле, $M(n, F[x])$ — кільце многочленних матриць порядку n над F. Через $\operatorname{codeg} G(x)$ позначимо *молодший степінь* довільної ненульової многочленної матриці $G(x)$, тобто найменший із усіх степенів ненульових мономів, що утворюють цю матрицю. За означенням $\operatorname{codeg} G(x)$ нульової матриці дорівнює символу $+\infty$. Через t і T позначатимемо символи операцій транспонування і блочного транспонування матриці відповідно. Нагадаємо спочатку означення напівскалярної еквівалентності матриць, сформульоване в [1] для випадку алгебраїчно замкненого поля F нульової характеристики, і доведемо два загальних твердження.

Означення 1. *Многочленні матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються напівскалярно еквівалентними, якщо*

$$A(x) = QB(x)R(x),$$

де Q — неособлива матриця над F, $R(x)$ — оборотна (тобто з постійним і відмінним від нуля визначником) матриця над $F[x]$.

Твердження 1. *Матриця $N(x) \in M(n, F[x])$ з визначником x^s напівскалярно еквівалентна до матриці вигляду*

$$A(x) = \left\| \begin{matrix} E_{l_1} x^{s_1} & & & \\ A_{21}(x) & E_{l_2} x^{s_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ A_{h1}(x) & A_{h2}(x) & \cdots & E_{l_h} x^{s_h} \end{matrix} \right\|, \qquad A_{uv}(x) \in M(l_u, l_v, F[x]), \tag{1}$$

де $\deg A_{uv}(x) < s_u$, $\operatorname{codeg} A_{uv}(x) > s_v$, $s_{u-1} < s_u$, $u = 2, \dots, h$, $v < u$.

Доведення. Нехай s_1 — молодший степінь заданої матриці $N(x)$. Тоді або деякий її рядок має вигляд $\left\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad x^{s_1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\|$, або у класі напівскалярно еквівалентних до $N(x)$ існує матриця з таким рядком. У всякому разі можливе зведення $N(x)$ до матриці вигляду

$$\left\| \begin{array}{c|c} x^{s_1} & \\ \hline \overline{a}_1(x) & A_1(x) \end{array} \right\|,$$

де $\operatorname{codeg} \overline{a}_1(x) \geq s_1$, $\operatorname{codeg} A_1(x) \geq s_1$. На другому кроці аналогічні міркування застосовуємо до матриці $A_1(x)$ і т. д. У підсумку прийдемо до трикутної матриці з інваріантними множниками на головній діагоналі. Можливість подальшого зведення такої трикутної матриці до матриці вигляду (1), де степінь і молодший степінь кожного піддіагонального блоку $A_{uv}(x)$ строго обмежені зверху і знизу степенями діагональних елементів s_u і s_v відповідно, не викликає сумніву.

Твердження доведено.

Слід зауважити, що доведене твердження має самостійне значення. Воно гарантує звідність матриці $N(x)$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями до трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі. Однак це твердження не є наслідком теореми 1 із праці [1], оскільки останню теорему доведено для випадку алгебраїчно замкненого поля нульової характеристики. Більш того, у твердженні 1 суттєвою є умова щодо визначника матриці $N(x)$, тобто без неї твердження є хибним.

Твердження 2. *Для матриці* $A(x)$ *вигляду* (1) *та довільної неособливої тієї ж блочної будови матриці*

$$S = \left\| \begin{matrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1h} \\ & S_{22} & \cdots & S_{2h} \\ & & \dots & \dots \\ & & & S_{hh} \end{matrix} \right\|$$

над полем F *добуток* $SA(x)$ *правоеквівалентний до матриці вигляду*

$$A_0(x) = \begin{Vmatrix} E_{l_1}x^{s_1} & & & \\ B_{21}(x) & E_{l_2}x^{s_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ B_{h1}(x) & B_{h2}(x) & \cdots & E_{l_h}x^{s_h} \end{Vmatrix}, \quad \deg B_{uv}(x) < s_u, \quad \operatorname{codeg} B_{uv}(x) > s_v .$$

Доведення. Із блоків матриць $A(x)$ та S побудуємо матрицю

$$R_{11}(x) = \| S_{11} \quad S_{12} \quad \dots \quad S_{1h} \| \, \| E_{l_1} \quad \bar{A}_{21}(x) \quad \dots \quad \bar{A}_{h1}(x) \|^T \in M(l_1, F[x]),$$

де $x^{s_1}\bar{A}_{u1}(x) = A_{u1}(x)$, $u = 2, \dots, h$. Розглянемо конгруенцію

$$X_{21}(x)R_{11}(x) \equiv \| S_{22} \quad \dots \quad S_{2h} \| \, \| A_{21}(x) \quad \dots \quad A_{h1}(x) \|^T \pmod{x^{s_2}}$$

з невідомим $X_{21}(x) \in M(l_2, l_1, F[x])$. Оскільки $\operatorname{codeg} R_{11}(x) = 0$ і матриця $R_{11}(0)$ збігається з $S_{11} \in GL(l_1, F)$, то існує єдиний розв’язок $X_{21}(x) = B_{21}(x)$ цієї конгруенції такий, що $\deg B_{21}(x) < s_2$. Очевидно також, що $\operatorname{codeg} B_{21}(x) > s_1$. Розв’язавши останню конгруенцію, можемо знайти матрицю $R_{21}(x) \in M(l_2, l_1, F[x])$ так, що

$$x^{s_2} R_{21}(x) = \| S_{22} \quad \dots \quad S_{2h} \| \, \| A_{21}(x) \quad \dots \quad A_{h1}(x) \|^T - B_{21}(x)R_{11}(x).$$

Якщо побудувати матриці $R_{12}(x) \in M(l_1, l_2, F[x])$, $R_{22}(x) \in M(l_2, F[x])$ так, що

$$x^{s_1} R_{12}(x) = \| S_{12} \quad S_{13} \quad \dots \quad S_{1h} \| \, \| E_{l_2}x^{s_2} \quad A_{32}(x) \quad \dots \quad A_{h2}(x) \|^T,$$

$$x^{s_2} R_{22}(x) = \| S_{22} \quad S_{23} \quad \dots \quad S_{2h} \| \, \| E_{l_2}x^{s_2} \quad A_{32}(x) \quad \dots \quad A_{h2}(x) \|^T - B_{21}(x)R_{12}(x),$$

то на першому кроці можемо записати рівність

$$\begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1h} \\ & S_{22} & \cdots & S_{2h} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} E_{l_1}x^{s_1} & \\ A_{21}(x) & E_{l_2}x^{s_2} \\ \dots & \dots \\ A_{h1}(x) & A_{h2}(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_{l_1}x^{s_1} & \\ B_{21}(x) & E_{l_2}x^{s_2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{Vmatrix}.$$

Розглянемо далі конгруенцію

$$\| X_{31}(x) \quad X_{32}(x) \| \begin{Vmatrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{Vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left\| S_{33} \quad \ldots \quad S_{3h} \right\| \left\| \begin{matrix} A_{31}(x) & A_{32}(x) \\ \ldots & \ldots \\ A_{h1}(x) & A_{h2}(x) \end{matrix} \right\| \pmod{x^{s_3}}.$$

з невідомими $X_{31}(x) \in M(l_3, l_1, F[x])$, $X_{32}(x) \in M(l_3, l_2, F[x])$. Оскільки

$$\operatorname{codeg} R_{12}(x) > 0, \qquad \left\| \begin{matrix} R_{11}(0) & R_{12}(0) \\ R_{21}(0) & R_{22}(0) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} S_{11} & \\ * & S_{22} \end{matrix} \right\| \in GL(l_1 + l_2, F),$$

то можна розв'язати останню конгруенцію та знайти єдиний розв'язок степеня меншого за s_3. Молодший степінь цього розв'язку, очевидно, перевищує s_1. А через те, що

$$\operatorname{codeg} \left\| A_{32}(x) \quad \ldots \quad A_{h2}(x) \right\|^T > s_2, \qquad \operatorname{codeg} R_{12}(x) \geq s_2 - s_1, \qquad R_{22}(0) = S_{22} \in GL(l_2, F),$$

маємо $\operatorname{codeg} B_{32}(x) > s_2$. На основі розв'язку останньої конгруенції можемо знайти блочну матрицю $\left\| R_{31}(x) \quad R_{32}(x) \right\| \in M(l_3, l_1 + l_2, F[x])$ таку, що

$$x^{s_3} \left\| R_{31}(x) \quad R_{32}(x) \right\| = \left\| S_{33} \quad \cdots \quad S_{3h} \right\| \left\| \begin{matrix} A_{31}(x) & A_{32}(x) \\ \cdots & \cdots \\ A_{h1}(x) & A_{h2}(x) \end{matrix} \right\| -$$

$$- \left\| B_{31}(x) \quad B_{32}(x) \right\| \left\| \begin{matrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{matrix} \right\|,$$

де $R_{31}(x) \in M(l_3, l_1, F[x])$, $R_{32}(x) \in M(l_3, l_2, F[x])$. Якщо, крім цього, утворити матриці $R_{13}(x) \in M(l_1, l_3, F[x])$, $R_{23}(x) \in M(l_2, l_3, F[x])$, $R_{33}(x) \in M(l_3, F[x])$ так, що

$$x^{s_1} R_{13}(x) = \left\| S_{13} \quad S_{14} \quad \ldots \quad S_{1h} \right\| \left\| E_{l_3} x^{s_3} \quad A_{43}(x) \quad \ldots \quad A_{h3}(x) \right\|^T, \ x^{s_2} R_{23}(x) =$$

$$= \left\| S_{23} \quad S_{24} \quad \ldots \quad S_{2h} \right\| \left\| E_{l_3} x^{s_3} \quad A_{43}(x) \quad \ldots \quad A_{h3}(x) \right\|^T - B_{21}(x) R_{13}(x), \ x^{s_3} R_{33}(x) =$$

$$= \left\| S_{33} \quad S_{34} \quad \ldots \quad S_{3h} \right\| \left\| E_{l_3} x^{s_3} \quad A_{43}(x) \quad \ldots \quad A_{h3}(x) \right\|^T - \left\| B_{31}(x) \quad B_{32}(x) \right\| \left\| \begin{matrix} R_{13}(x) \\ R_{23}(x) \end{matrix} \right\|,$$

то на другому кроці можна переконатись у правильності рівності

$$\left\| \begin{matrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots & S_{1h} \\ & S_{22} & S_{23} & \cdots & S_{2h} \\ & & S_{33} & \cdots & S_{3h} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} E_{l_1}x^{s_1} & & \\ A_{21}(x) & E_{l_2}x^{s_2} & \\ A_{31}(x) & A_{32}(x) & E_{l_3}x^{s_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{h1}(x) & A_{h2}(x) & A_{h3}(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} E_{l_1}x^{s_1} & & \\ B_{21}(x) & E_{l_2}x^{s_2} & \\ B_{31}(x) & B_{32}(x) & E_{l_3}x^{s_3} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) & R_{13}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) & R_{23}(x) \\ R_{31})x) & R_{32}(x) & R_{33}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Продовжуючи так і далі, через $h-1$ крок знайдемо матрицю $A_0(x)$ вказаного в умові вигляду і побудуємо матрицю $R(x) = \| R_{ij}(x) \|_1^h \in GL(n, F[x])$, які разом з матрицями $A(x)$, S задовольняють співвідношення $SA(x) = A_0(x)R(x)$.

Твердження доведено.

Припустимо, що матриця $N(x) \in M(n, F[x])$ має перший інваріантний множник $\varphi_1(x)$ та рівні між собою решту інваріантних множників $\varphi_2(x)$, до того ж виконується $\varphi_2(x)/\varphi_1(x) = (x-\alpha)^l$. Без обмеження загальності вважаємо, що $\alpha = 0$ і $\varphi_1(x) = 1$.

Тоді справджується наступне твердження.

Твердження 3. *Матриця $N(x)$ напівскалярно еквівалентна до матриці вигляду*

$$QN(x)P(x) = A(x) = \left[\left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ a_1(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{r-1}(x) & & & x^l \end{matrix} \right\| \oplus x^l E_{n-r} \right], \quad 1 < r \le n, \tag{2}$$

де

$$a_i(x) = x^{l_i} + a_{i1}x^{l_i+1} + \ldots + a_{i,\, l-l_i-1}x^{l-1}, \quad i = 1, \ldots, r-1, \quad 0 < l_1 < \ldots < l_{r-1} < l, \tag{3}$$

$$a_{i,\, l_{i+1}-l_i} = a_{i,\, l_{i+2}-l_i} = \ldots = a_{i,\, l_{r-1}-l_i} = 0. \tag{4}$$

Числа $l_1, \ldots, l_{r-1}$ та r визначаються матрицею $N(x)$ однозначно.

Доведення. Можливість зведення матриці вказаними перетвореннями до нижньої трикутної форми з головною діагоналлю $(1, x^l, \ldots, x^l)$ показано у твердженні 1. Далі доведення звідності до матриці потрібного вигляду з властивостями (3), (4) не викликає труднощів.

Нехай матриця (2) з умовами (3) напівскалярно еквівалентна до матриці

$$\left[\begin{Vmatrix} 1 & & & \\ \tilde{a}_1(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{\tilde{r}-1}(x) & & & x^l \end{Vmatrix} \oplus x^l E_{n-\tilde{r}}\right], \quad 1 < \tilde{r} \le n, \tag{5}$$

де $\tilde{a}_i(x) = x^{\tilde{l}_i} + x^{\tilde{l}_i+1}\overline{a}_i(x)$, $i = 1, \ldots, \tilde{r}-1$, $0 < \tilde{l}_1 < \ldots < \tilde{l}_{\tilde{r}-1} < l$. Тоді виконується рівність

$$\left\| s_{kj} \right\|_1^n \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ a_1(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n-1}(x) & & & x^l \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ \tilde{a}_1(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{a}_{n-1}(x) & & & x^l \end{Vmatrix} \left\| p_{kj}(x) \right\|_1^n, \tag{6}$$

де $a_r(x) = \ldots = a_{n-1}(x) \equiv 0$, $\tilde{a}_{\tilde{r}}(x) = \ldots = \tilde{a}_{n-1}(x) \equiv 0$, $\left\| p_{kj}(x) \right\|_1^n \in GL(n, F[x])$, $\left\| s_{kj} \right\|_1^n \in$ $\in GL(n, F)$. Із цієї рівності можемо записати

$$\begin{aligned}
&\| s_{21} \quad s_{22} \quad \ldots \quad s_{2n} \| \, \| 1 \quad a_1(x) \quad \ldots \quad a_{n-1}(x) \|^t = \tilde{a}_1(x) p_{11}(x) + x^l p_{21}(x), \\
&\| s_{31} \quad s_{32} \quad \ldots \quad s_{3n} \| \, \| 1 \quad a_1(x) \quad \ldots \quad a_{n-1}(x) \|^t = \tilde{a}_2(x) p_{11}(x) + x^l p_{31}(x), \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\| s_{n1} \quad s_{n2} \quad \ldots \quad s_{nn} \| \, \| 1 \quad a_1(x) \quad \ldots \quad a_{n-1}(x) \|^t = \tilde{a}_{n-1}(x) p_{11}(x) + x^l p_{n1}(x).
\end{aligned} \tag{7}$$

Покладаючи в рівностях (7) $x = 0$, маємо $s_{21} = s_{31} = \ldots = s_{n1} = 0$. Оскільки $p_{11}(0) \ne 0$, то із першої рівності випливає імплікація $a_1(x) \equiv 0 \Rightarrow \tilde{a}_1(x) \equiv 0$. На основі властивості симетричності напівскалярної еквівалентності дістаємо $\tilde{a}_1(x) \equiv 0 \Rightarrow a_1(x) \equiv 0$. Отже, має місце еквівалентність $a_1(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \tilde{a}_1(x) \equiv 0$.

Якщо $a_1(x) \ne 0$, то з першої рівності системи (7) робимо висновок, що $\tilde{l}_1 \ge l_1$, а з урахуванням симетричності $\tilde{l}_1 = l_1$. Із другої рівності та всіх наступних тепер легко дістати $s_{32} = \ldots = s_{n2} = 0$. Якщо $a_2(x) \equiv 0$, то із другої рівності знаходимо $\tilde{a}_2(x) \equiv 0$. Тому з огляду на симетричність маємо еквівалентність $a_2(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \tilde{a}_2(x) \equiv 0$.

У випадку $a_2(x) \ne 0$, порівнюючи молодші степені у лівій та правій частинах другої рівності системи (7), встановлюємо, що $\tilde{l}_2 \ge l_2$, а через симетричність насправді матимемо $\tilde{l}_2 = l_2$. Тоді із третьої та всіх наступних рівностей отримуємо $s_{43} = \ldots = s_{n3} = 0$ і т. д. Тому в підсумку дістаємо, що в матрицях (2) і (5) $\tilde{r} = r$, $\tilde{l}_i = l_i$, $i = 1, \ldots, r-1$, і в матриці перетворення $\left\| s_{kj} \right\|_1^n$ в перших r її стовпцях всі піддіагональні елементи дорівнюють нулеві.

Твердження доведено.

***Наслідок* 1.** *Матриця перетворення* $\left\| s_{kj} \right\|_1^n$ *у співвідношенні* (6) *має вигляд*

$$\left\| s_{kj} \right\|_1^n = \left\| \begin{matrix} s_{11} & \dots & s_{1,\, r+1} & \dots & s_{1n} \\ & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ & & s_{r+1,\, r+1} & \dots & s_{r+1,\, n} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & s_{n,\, r+1} & \dots & s_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad s_{11} = \dots = s_{rr}. \tag{8}$$

Перші r *діагональних елементів можемо вважати рівними одиниці.*

Розглянемо числа l_i, $i = 1, \dots, r-1$, — молодші степені елементів $a_i(x)$ матриці (2), які згідно з твердженням 2 є інваріантами відносно напівскалярної еквівалентності. В загальному випадку матриця $A(x)$ вигляду (2) визначається неоднозначно. Однак у окремому випадку виконується наступне твердження.

Твердження 4. *Якщо для матриці* (2) *виконуються умови* (3), (4) *і* $2l_1 \ge l$, *то вона єдина у класі напівскалярно еквівалентних матриць.*

Доведення. Нехай матриця (2) з умовами (3), (4) напівскалярно еквівалентна до матриці

$$B(x) = \left[\left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ b_1(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{r-1}(x) & & & x^l \end{matrix} \right\| \oplus x^l E_{n-r} \right], \tag{9}$$

де

$$b_i(x) = x^{l_i} + b_{i1}x^{l_i+1} + \dots + b_{i,\, l-l_i-1}x^{l-1}, \qquad i = 1, \dots, r-1, \tag{10}$$

$$b_{i,\, l_{i+1}-l_i} = b_{i,\, l_{i+2}-l_i} = \dots = b_{i,\, l_{r-1}-l_i} = 0. \tag{11}$$

Тоді повинна виконуватися рівність

$$\left\| s_{kj} \right\|_1^n \left[\left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ a_1(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{r-1}(x) & & & x^l \end{matrix} \right\| \oplus x^l E_{n-r} \right] =$$

$$= \left[\left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ b_1(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{r-1}(x) & & & x^l \end{matrix} \right\| \oplus x^l E_{n-r} \right] \left\| p_{kj}(x) \right\|_1^n, \tag{12}$$

де $\left\| s_{kj} \right\|_1^n \in GL(n, F)$, $\left\| p_{kj}(x) \right\|_1^n \in GL(n, F[x])$. Враховуючи вигляд (8) матриці перетворення $\left\| s_{kj} \right\|_1^n$, на основі рівності (12) можна записати

$$s_{22}a_1(x) + \ldots + s_{2r}a_{r-1}(x) - s_{11}b_1(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ x^l).$$

Із цієї конгруенції, враховуючи рівність нулеві всіх мономів степенів $l_2, \ldots, l_{r-1}$ многочленів $a_1(x)$, $b_1(x)$, дістаємо $s_{23} = \ldots = s_{2r} = 0$ і $a_1(x) = b_1(x)$. Далі, із конгруенції

$$s_{33}a_2(x) + \ldots + s_{3r}a_{r-1}(x) - s_{11}b_2(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ x^l),$$

записаної на основі рівності (12), знаходимо $s_{34} = \ldots = s_{3r} = 0$ і $a_2(x) = b_2(x)$. Продовжуючи міркування і далі, отримуємо $A(x) = B(x)$.

Твердження доведено.

Таким чином, матрицю $A(x)$ вигляду (2) з умовами (3), (4) у розглянутому окремому випадку, коли $2l_1 \geq l$, можемо вважати канонічною.

Розглянемо загальніший випадок, коли в множині $M = \{l_1, \ldots, l_{r-1}\}$ для кожного l_i, $i = 1, \ldots, r-1$, існує такий елемент l_{q_i}, що $l_i + l_{q_i} \notin M$ і $l_i + l_{q_i} < l$ або $l_i + l_1 \geq l$. У цій ситуації істинним є наступне твердження.

Твердження 5. *Нехай* l_{q_h} *— найменший елемент множини* $M = \{l_1, \ldots, l_{r-1}\}$ *такий, що* $l_h + l_{q_h} \notin M$ *і* $l_h + l_{q_h} < l$, $h = 1, \ldots, t-1$, $1 < t \leq r$, *і* $l_t + l_1 \geq l$, *якщо* $t < r$. *Тоді матриця* $A(x)$ *вигляду* (2) *з умовами* (3), (4) *напівскалярно еквівалентна до матриці* $B(x)$ *вигляду* (9) *з умовами* (10), (11), *в якій елемент* $b_{q_h}(x)$ *не містить монома степеня* $l_h + l_{q_h}$. *Матриця* $B(x)$ *визначається однозначно.*

Доведення. *Існування.* На першому кроці фіксуємо елемент $s_{12} \in F$, що дорівнює коефіцієнту монома степеня $l_1 + l_{q_1}$ елемента $a_{q_1}(x)$ матриці $A(x)$, і з конгруенцій

$$a_i(x) \equiv d_{i1}(x)(1 + s_{12}a_1(x)) \ (\mathrm{mod}\ x^l), \qquad i = 1, \ldots, r-1,$$

знаходимо многочлени $d_{11}(x), \ldots, d_{r-1,\,1}(x)$ степеня меншого за l. Очевидно, що $d_{q_1,\,1}(x)$ серед інших знайдених так многочленів буде вільним від монома степеня $l_1 + l_{q_1}$ і $a_i(x) \equiv d_{i1}(x) \ (\mathrm{mod}\ x^{l_1 + l_i})$, $i = 1, \ldots, r-1$. Далі, побудуємо матрицю

$$A_1(x) = \left[\left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ d_{11}(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ d_{r-1,\,1}(x) & & & x^l \end{matrix} \right\| \oplus x^l E_{n-r} \right]$$

і переконаємось у правильності рівності

$$\left[\left\| \begin{matrix} 1 & s_{12} \\ & 1 \end{matrix} \right\| \oplus E_{n-r} \right] A(x) \;=\; A_1(x) \left\| p_{kj1}(x) \right\|_1^n,$$

де елементи матриці $\left\| p_{kj1}(x) \right\|_1^n$ над $F[x]$ задовольняють умови:

$$p_{111}(x) = 1 + s_{12} a_1(x), \qquad p_{121}(x) = s_{12} x^l, \qquad p_{221}(x) = 1 - s_{12} d_{11}(x),$$

$$p_{321}(x) = -s_{12} d_{21}(x), \ldots, \; p_{r21}(x) = -s_{12} d_{r-1,\,1}(x),$$

$$p_{i+1,\,1,\,1}(x) x^l = a_i(x) - d_{i1}(x) p_{111}(x), \;\; i = 1, \ldots, r-1,$$

і всі решта діагональних елементів дорівнюють одиниці, а недіагональних — нулеві. В отриманій матриці $A_1(x)$, напівскалярно еквівалентній до матриці $A(x)$, можуть бути втрачені деякі потрібні властивості останньої. Однак ці властивості легко відновити додаванням одних рядків, помножених на деякі елементи з поля F, до розміщених вище від них інших рядків та відповідними операціями над стовпцями матриці $A_1(x)$. Щоб не вводити нових позначень, будемо вважати, що елемент $d_{i1}(x)$ матриці $A_1(x)$ є вільним від мономів степенів $l_{i+1}, \ldots, l_{r-1}$, $i = 1, \ldots, r-1$.

На другому кроці фіксуємо елемент $s_{13} \in F$, що дорівнює коефіцієнту монома степеня $l_2 + l_{q_2}$ многочлена $d_{q_2,\,1}(x)$ із матриці $A_1(x)$, і знаходимо елементи $d_{i2}(x) \in F[x]$, $i = 1, \ldots, r-1$, степеня меншого за l так, що

$$d_{i1}(x) \;\equiv\; d_{i2}(x)(1 + s_{13} d_{21}(x)) \; (\mathrm{mod}\; x^l).$$

Легко переконатися, що серед знайдених так многочленів $d_{q_2,\,2}(x)$ не містить монома степеня $l_2 + l_{q_2}$ і $d_{i1}(x) \equiv d_{i2}(x) \; (\mathrm{mod}\; x^{l_2 + l_i})$, $i = 1, \ldots, r-1$. Далі, будуємо матрицю

$$A_2(x) \;=\; \left[\left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ d_{12}(x) & x^l & & \\ \vdots & & \ddots & \\ d_{r-1,\,2}(x) & & & x^l \end{matrix} \right\| \oplus x^l E_{n-r} \right],$$

яка напівскалярно еквівалентна до матриці $A(x)$. Підтвердженням цього є рівність

$$\left[\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & s_{13} \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{matrix}\right\| \oplus E_{n-3}\right] A_1(x) = A_2(x) \left\| p_{kj2}(x) \right\|_1^n,$$

де в матриці $\left\| p_{kj2}(x) \right\|_1^n$

$$p_{112}(x) = 1 + s_{13}d_{21}(x), \quad p_{132}(x) = s_{13}x^l, \quad p_{232}(x) = -s_{13}d_{12}(x),$$

$$p_{332}(x) = 1 - s_{13}d_{22}(x), \quad p_{432}(x) = -s_{13}d_{32}(x), \ldots, \quad p_{r32}(x) = -s_{13}d_{r-1,\,2}(x),$$

$$p_{i+1,\,1,\,2}(x)x^l = d_{i1}(x) - d_{i2}(x)p_{112}(x), \quad i = 1, \ldots, r-1,$$

і всі решта діагональних елементів дорівнюють одиниці, а недіагональних — нулеві. Якщо деякі властивості матриці $A_1(x)$ в матриці $A_2(x)$ втрачено, то їх легко поновити шляхом додавання одних рядків матриці $A_2(x)$, помножених на деякі константи із F, до попередніх рядків та відповідними операціями над стовпцями. В матриці $A_2(x)$ елементи $d_{q_1,\,2}(x)$, $d_{q_2,\,2}(x)$ є вільними від мономів степенів $l_1 + l_{q_1}$, $l_2 + l_{q_2}$ відповідно.

Продовжуючи так і далі, прийдемо до матриці вигляду (9) з потрібними властивостями.

Єдиність. Нехай задано напівскалярно еквівалентні матриці $A(x)$ і $B(x)$ з умовами (3), (4) і (10), (11) відповідно, в яких многочлени $a_{q_h}(x)$ і $b_{q_h}(x)$ не містять мономів степенів $l_h + l_{q_h}$, $h = 1, \ldots, t-1$. Тоді виконується рівність (12), у якій матриця $\left\| s_{kj} \right\|_1^n$ має вигляд (8). Із цієї рівності для $i = 1, \ldots, r-1$ очевидним способом випливають конгруенції

$$s_{i+1,\,i+1}a_i(x) + \ldots + s_{i+1,\,r}a_{r-1}(x) \equiv b_i(x)(s_{11} + s_{12}a_1(x) + \ldots + s_{1r}a_{r-1}(x)) \pmod{x^l}. \tag{13}$$

При $i = q_1, \ldots, i = q_{t-1}$ із (13) послідовно дістаємо $s_{12} = 0, \ldots, s_{1t} = 0$ і з урахуванням цього при $i = 1, \ldots, r-1$ будемо мати $s_{i+1,\,i+2} = \ldots = s_{i+1,\,r} = 0$. Отже,

$$s_{i+1,\,i+1}a_i(x) \equiv s_{11}b_i(x)) \pmod{x^l}, \quad i = 1, \ldots, r-1.$$

Оскільки $\deg a_i(x) < l$, $\deg b_i(x) < l$ і $s_{i+1,\,i+1} = s_{11}$, то насправді $a_i(x) = b_i(x)$.

Твердження доведено.

Таким чином, матрицю $B(x)$ в умовах твердження 4 можна вважати канонічною щодо напівскалярної еквівалентності.

Повернемося до матриці $A(x)$ (2) і розглянемо випадок наявності елемента $l_t \in M$ такого, що $l_t + l_1 \in M$ і або $l_t + l_i \in M$, або $l_t + l_i \geq l$ для $i = 2, \ldots, r-1$. Нехай l_t — найменший такий елемент. Якщо $t > 1$, то, як і раніше, позначимо через l_{q_h} найменший елемент із M такий, що $l_h + l_{q_h} \notin M$ і $l_h + l_{q_h} < l$, $h = 1, \ldots, t-1$. Згідно з твердженням 5 можна припускати, що елемент $a_{q_h}(x)$ є вільним від монома степеня $l_h + l_{q_h}$, $h = 1, \ldots, t-1$. Всі подальші перетворення не повинні порушувати цю властивість. Очевидно, $\operatorname{codeg}(a_1(x)a_t(x)) = l_1 + l_t < l$. Нехай $l_1 + l_k < l$ для кожного k, $t \le k \le u \le r-1$, і $l_1 + l_{u+1} \ge l$, якщо $u < r-1$. Нехай також $l_t + l_j \in M$ для кожного j, $1 \le j \le v < r-1$, і $l_t + l_{v+1} \ge l$. Далі, введемо позначення $l_t + l_j = l_{t_j}$, де $l_{t_j} = \operatorname{codeg} a_{t_j}(x)$. Добуток $a_j(x)a_k(x)$ зведемо за модулем x^l:

$$a_j(x)a_k(x) \equiv c_{jk}(x) \pmod{x^l}, \qquad j = 1, \ldots, v, \quad k = t, \ldots, u.$$

Позначимо через A_{jk} стовпець висоти $l - l_j - l_t$, що складається із коефіцієнтів многочлена $c_{jk}(x)$, записаного у порядку зростання степенів, починаючи з монома степеня $l_j + l_t$ і не пропускаючи мономи з нульовими коефіцієнтами. За таким же правилом побудуємо стовпці із коефіцієнтів кожного з многочленів $a_{t_j}(x), a_{t_j+1}(x), \ldots, a_{r-1}(x)$ і позначимо через A_{t_j} матрицю із цих $r - t_j$, $j = 1, \ldots, v$, стовпців. Сконструюємо матрицю вигляду

$$D = \left\| \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ \ldots \\ D_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{1t} & \ldots & A_{1u} & A_{t_1} & & & \\ A_{2t} & \ldots & A_{2u} & & A_{t_2} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \ddots & \\ A_{vt} & \ldots & A_{vu} & & & & A_{t_v} \end{matrix} \right\|. \tag{14}$$

Кожний рядок цієї матриці складається з коефіцієнтів різних многочленів при одному і тому ж степені x. Тому рядку підматриці

$$D_j = \left\| \begin{matrix} A_{jt} & \ldots & A_{ju} & 0 & \ldots & A_{t_j} & \ldots & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad j = 1, \ldots, v, \tag{15}$$

із коефіцієнтів при деякому степені x^h поставимо у відповідність моном того ж степеня многочлена $a_j(x)$. Отже, рядки матриці (14) будуть „міченими" коефіцієнтами елементів $a_1(x), \ldots, a_v(x)$ матриці $A(x)$. Підматриці D_j (15) матриці (14) горизонтальними лініями розіб'ємо на $u - t + 1$ блоків, кількість рядків в кожному із них (рахуючи зверху вниз) складає відповідно $l_{t+1} - l_t, l_{t+2} - l_{t+1}, \ldots, l - l_j - l_u$:

$$D_j = \left\| \begin{matrix} D_{1j} & \ldots & D_{u-t+1,j} \end{matrix} \right\|^T, \qquad j = 1, \ldots, v.$$

Тоді матрицю (14) можна зобразити у вигляді

$$D = \left\| \begin{matrix} D_{11} & \ldots & D_{u-t+1,1} & \ldots & D_{1v} & \ldots & D_{u-t+1,v} \end{matrix} \right\|^T. \tag{16}$$

Оскільки послідовність чисел рядків у підматрицях D_j, $j = 1, \ldots, v$, спадає, то за вказаного розбиття матриці D деякі блоки можуть виявитися порожніми. Блочними перестановками перейдемо від матриці (16) до матриці вигляду

$$\tilde{D} = \left\| \tilde{D}_1 \quad \ldots \quad \tilde{D}_{u-t+1} \right\|^T, \quad \tilde{D}_m = \left\| \tilde{D}_{m1} \quad \ldots \quad \tilde{D}_{m,\,v} \right\|^T, \quad m = 1, \ldots, u-t+1. \tag{17}$$

Нагадаємо, що так само, як і в матриці D, кожному рядку матриці $\tilde{D}$ відповідає деякий, можливо з нульовим коефіцієнтом, моном одного із многочленів $a_1(x), \ldots, a_v(x)$, які є елементами матриці $A(x)$ (2).

Означення 2. *Матриця* $A(x)$ *вигляду* (2) *з умовами* (3), (4) *називається канонічною в класі напівскалярно еквівалентних за виконання таких умов*:

1) *якщо* l_{q_h}, $h = 1, \ldots, t-1$, — *найменший елемент множини* M *такий, що* $l_h + l_{q_h} \notin M$ *і* $l_h + l_{q_h} < l$, *то елемент* $a_{q_h}(x)$ *цієї матриці є вільним від монома степеня* $l_h + l_{q_h}$;

2) *якщо* $l_t + l_1 \in M$ *і для кожного* $i = 2, \ldots, r-1$ *або* $l_t + l_i \in M$, *або* $l_t + l_i \geq l$, *то елементи* $a_1(x), \ldots, a_v(x)$ *є вільними від мономів, що відповідають максимальній системі перших лінійно незалежних рядків матриці* $\tilde{D}$ (17).

Теорема. *У класі напівскалярно еквівалентних матриць існує, до того ж єдина, канонічна матриця в сенсі означення* 2.

Попередньо доведемо одне допоміжне твердження.

Твердження 6. *Для матриць* $\left\| s_{kj} \right\|_1^n \in GL(n, F)$ *вигляду* (8) *та* $A(x)$ *вигляду* (2) *з умовою* (3) *існують матриці* $\left\| p_{kj}(x) \right\|_1^n \in GL(n, F[x])$ *і* $B(x)$ *вигляду* (9) *з умовою* (10), *які задовольняють рівність* (12).

Доведення. Існування оборотної матриці $\left\| p_{kj}(x) \right\|_1^n$ та деякої матриці $B(x)$ вигляду (9) випливає з твердження 2. Покажемо, що матриця $B(x)$ має властивості (10). Для цього розглянемо конгруенції (13), з яких при $i = 1$ одержуємо $b_1(x) = x^{l_1} + x^{l_1+1}\bar{b}_1(x)$. При $i = 2$ аналогічно отримуємо $b_2(x) = x^{l_2} + x^{l_2+1}\bar{b}_2(x)$ і т. д.

Твердження доведено.

Доведення теореми. *Єдиність.* Нехай канонічні матриці $A(x)$ та $B(x)$ вигляду (2) та (9) напівскалярно еквівалентні. Тоді, аналогічно до доведення твердження 4, із конгруенцій (13) при $i = q_1, \ldots, i = q_{t-1}$ отримуємо $s_{12} = 0, \ldots, s_{1t} = 0$, а при $i = 1, \ldots, r-1$ знаходимо $s_{23} = \ldots = s_{2t_1} = 0$, $s_{34} = \ldots = s_{3t_2} = 0, \ldots$, $s_{v+1,\,v+2} = \ldots = s_{v+1,\,t_v} = 0$, $s_{v+2,\,v+3} = \ldots$ $\ldots = s_{v+2,\,r} = 0, \ldots$, $s_{r-1,\,r} = 0$. Таким чином, із конгруенцій (13) випливає, що

$$a_i(x) \equiv b_i(x) \ (\mathrm{mod}\, x^{l_i + l_t}), \quad i = 1, \ldots, r-1. \tag{18}$$

Із (18) з огляду на нерівності $l_t + l_m \geq l$, $m = v+1, \ldots, r-1$, та вигляд многочленів $a_m(x), b_m(x)$ отримуємо рівності $a_m(x) = b_m(x)$.

Розглянемо многочлени $c_j(x) = a_j(x) - b_j(x)$, $j = 1, \ldots, v$. Запишемо кожен із них у порядку зростання степенів, починаючи з монома степеня $l_{t_j} = l_t + l_j$ (з нульовим коефіцієнтом) і до степеня $l-1$, не пропускаючи мономи з нульовими коефіцієнтами. Позначимо через C_j стовпець коефіцієнтів многочлена $c_j(x)$ і запишемо його у вигляді

$$C_j = \left\| C_{1j}^t \quad C_{2j}^t \quad \ldots \quad C_{u-t+1,\,j}^t \right\|^t,$$

де висоти підстовпців $C_{1j}, C_{2j}, \ldots, C_{u-t+1,\,j}$ дорівнюють $l_{t+1}-l_t,\ l_{t+2}-l_{t+1}, \ldots,\ l-l_j-l_u$ відповідно. Із конгруенцій (18) знаходимо

$$b_j(x)a_t(x) \equiv a_j(x)a_t(x) \pmod{x^{l_j+2l_t}}, \quad j=1,\ldots,v.$$

Оскільки $l_1+l_t \geq l_{t+1}$ і $l_t \geq l_1$, то $l_j+2l_t \geq l_j+l_{t+1}$. Таким чином, на підставі наслідку 1 із конгруенцій (13) в позначеннях (17) випливає рівність

$$\tilde{D}_1 S = \left\| C_{11}^t \quad \ldots \quad C_{1v}^t \right\|^t,$$

де

$$S = \left\| s_{1,\,t+1} \quad \ldots \quad s_{1,\,u+1} \quad -s_{2,\,t_1+1} \quad \ldots \quad -s_{2r} \quad \ldots \quad -s_{v+1,\,t_v+1} \quad \ldots \quad -s_{v+1,\,r} \right\|^t.$$

Оскільки елементи стовпця $\left\| C_{11}^t \quad \ldots \quad C_{1v}^t \right\|^t$, що відповідають максимальній системі перших лінійно незалежних рядків матриці $\tilde{D}_1$, дорівнюють нулеві, то цей стовпець насправді є нульовим. Тому $a_j(x) \equiv b_j(x) \pmod{x^{l_j+l_{t+1}}}$, $j=1,\ldots,v$. На основі цього для $j=1,\ldots,v$ маємо конгруенції

$$b_j(x)a_t(x) \equiv a_j(x)a_t(x) \pmod{x^{l_j+l_t+l_{t+1}}}, \qquad b_j(x)a_{t+1}(x) \equiv a_j(x)a_{t+1}(x) \pmod{x^{l_j+2l_{t+1}}}.$$

А через те, що $l_2+l_t \geq l_{t+2}$ і $l_{t+1} \geq l_2$, маємо $l_t+l_{t+1} \geq l_{t+2}$, звідки дістаємо нерівності $l_j+l_t+l_{t+1} \geq l_j+l_{t+2}$ і $l_j+2l_{t+1} \geq l_j+l_{t+2}$. Тому на основі конгруенцій (13), враховуючи наслідок 1, можемо записати рівність

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{D}_1 \\ \tilde{D}_2 \end{matrix} \right\| S = \left\| C_{11}^t \quad \ldots \quad C_{1v}^t \quad C_{21}^t \quad \ldots \quad C_{2v}^t \right\|^t,$$

де C_{1j}, $j=1,\ldots,v$, — нульові стовпці. Оскільки у правій частині рівності елементи стовпця, що відповідають максимальній системі перших лінійно незалежних рядків матриці у лівій частині, нульові, то $C_{2j}=0$. Тому

$$a_j(x) \equiv b_j(x) \pmod{x^{l_j+l_{t+2}}}, \quad j=1,\ldots,v.$$

Продовжуючи міркування, отримуємо $c_j(x) \equiv 0$, тому

$$a_j(x) = b_j(x), \quad j=1,\ldots,v.$$

Існування. Нехай дано матрицю $A(x)$ вигляду (2) з умовами (3), (4). Як зазначалося, можемо вважати, що у випадку $t>1$ елемент $a_{q_h}(x)$ цієї матриці є вільним від монома степеня

$l_h + l_{q_h}$, $h = 1, \ldots, t-1$. Позначимо через $\hat{D}_1$ підматрицю з максимального числа перших лінійно незалежних рядків матриці $\tilde{D}_1$ із (17), якщо відповідний рядкам цієї підматриці стовпець G_1 коефіцієнтів многочленів $a_1(x), \ldots, a_v(x)$ є нульовим. На першому кроці розглянемо рівняння $\hat{D}_1 X = G_1$ з невідомим

$$X = \left\| x_{1,\, t+1} \quad \ldots \quad x_{1,\, u+1} \quad x_{2,\, t_1+1} \quad \ldots \quad x_{2r} \quad \ldots \quad x_{v+1,\, t_v+1} \quad \ldots \quad x_{v+1,\, r} \right\|^t.$$

Це рівняння, очевидно, має розв'язок, оскільки рядки матриці $\hat{D}_1$ є лінійно незалежними. Зрозуміло, що ті компоненти розв'язку, які „падають" на нульові стовпці матриці $\hat{D}_1$ (наприклад, $x_{1,\, t+1}$), вважаємо нульовими. За компонентами знайденого розв'язку

$$\left\| x_{1,\, t+1,\, 1} \quad \ldots \quad x_{1,\, u+1,\, 1} \quad x_{2,\, t_1+1,\, 1} \quad \ldots \quad x_{2r1} \quad \ldots \quad x_{v+1,\, t_v+1,\, 1} \quad \ldots \quad x_{v+1,\, r,\, 1} \right\|^t$$

побудуємо верхню унітрикутну матрицю $S_1 = \left\| s_{kj1} \right\|_1^n$, де

$$s_{1,t+1,\,1} = x_{1,t+1,\,1}, \ldots, \quad s_{1,u+1,\,1} = x_{1,u+1,\,1}, \quad s_{2,\,t_1+1,\,1} = -x_{2,\,t_1+1,\,1}, \ldots$$

$$\ldots, \; s_{2r1} = -x_{2r1}, \ldots, \quad s_{v+1,\,t_v+1,\,1} = -x_{v+1,\,t_v+1,\,1}, \ldots, \quad s_{v+1,\,r,\,1} = -x_{v+1,\,r,\,1}$$

і всі інші недіагональні елементи дорівнюють нулеві. За твердженням 6 добуток $S_1 A(x)$ є правоеквівалентним до деякої матриці $B(x)$ вигляду (9) з умовами (10). Зауважимо, що матриця $\tilde{D}_1$, побудована для $A(x)$, і аналогічна матриця для $B(x)$ збігаються і, більше того, коефіцієнти многочленів $b_1(x), \ldots, b_v(x)$, які відповідають максимальній системі перших лінійно незалежних рядків матриці $\tilde{D}_1$, дорівнюють нулеві. У матриці $B(x)$ зберігаються також й інші потрібні властивості матриці $A(x)$.

Щоб не вводити на кожному кроці нових позначень для отриманої матриці, будемо вважати, що набуті властивості вже має матриця $A(x)$, і на другому кроці позначимо через $\hat{D}_2$ підматрицю з максимального числа перших лінійно незалежних рядків матриці $\left\| \hat{D}_1 \quad \tilde{D}_2 \right\|^T$ із (17). Якщо стовпець G_2 із коефіцієнтів многочленів $a_1(x), \ldots, a_v(x)$, що відповідає рядкам матриці $\hat{D}_2$, є нульовим, то розглянемо рівняння $\hat{D}_2 X = G_2$. Через лінійну незалежність рядків матриці $\hat{D}_2$ це рівняння є розв'язним. За розв'язком

$$\left\| x_{1,\, t+1,\, 2} \quad \ldots \quad x_{1,\, u+1,\, 2} \quad x_{2,\, t_1+1,\, 2} \quad \ldots \quad x_{2r2} \quad \ldots \quad x_{v+1,\, t_v+1,\, 2} \quad \ldots \quad x_{v+1,\, r,\, 2} \right\|^t$$

цього рівняння побудуємо верхню унітрикутну матрицю $S_2 = \left\| s_{kj2} \right\|_1^n$, де

$$s_{1,t+1,\,2} = x_{1,t+1,\,2}, \ldots, \quad s_{1,u+1,\,2} = x_{1,u+1,\,2}, \quad s_{2,\,t_1+1,\,2} = -x_{2,\,t_1+1,\,2}, \ldots$$

$$\ldots, \; s_{2r2} = -x_{2r2}, \ldots, \quad s_{v+1,\,t_v+1,\,2} = -x_{v+1,\,t_v+1,\,2}, \ldots, \quad s_{v+1,\,r,\,2} = -x_{v+1,\,r,\,2}$$

і всі решта недіагональних елементів дорівнюють нулеві. Згідно з твердженням 6 матриця

$A(x)$ за допомогою S_2 та деякої оборотної матриці зводиться до вигляду (9) з умовами (10). Можна переконатися, що отримана в результаті матриця $B(x)$ має властивості (11) та інші властивості матриці $A(x)$. Слід зазначити також, що підматриця $\left\| \tilde{D}_1 \quad \tilde{D}_2 \right\|^T$ матриці $\tilde{D}$ та відповідна підматриця, побудована для $B(x)$, збігаються. До того ж коефіцієнти многочленів $b_1(x), \ldots, b_v(x)$, які відповідають максимальній системі перших лінійно незалежних рядків матриці $\left\| \tilde{D}_1 \quad \tilde{D}_2 \right\|^T$, є нульовими.

Цим робимо ще один крок у зведенні матриці $A(x)$. Продовжуючи так і далі, у підсумку дістаємо канонічну матрицю.

Теорему доведено.

Ми розглянули всі можливі випадки і в кожному із них вказали канонічну форму многочленної матриці щодо напівскалярної еквівалентності. Отриману тут канонічну форму для многочленної матриці у класі напівскалярно еквівалентних матриць можна застосувати для побудови канонічної форми відповідного типу наборів матриць над полем F у класі подібних наборів.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61 – 66.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
3. *Baratchart L.* Un theoreme de factorisation et son application a la representation des systemes cycliques causaux // C. r. Acad. sci. Paris. Ser. 1. Math. – 1982. – **295**, № 3. – P. 223 – 226.
4. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra and its Appl. – 1999. – **291**. – P. 167 – 184.
5. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – **26**. – С. 13 – 16.
6. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644 – 649.
7. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104 – 114.
8. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24 – 41.
9. *Sergeichuk V. V.* Canonical matrices for linear matrix problems // Linear Algebra Appl. – 2000. – **317**. – P. 53 – 102.
10. *Шаваровский Б. З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Мат. заметки. – 1998. – **65**, № 5. – С. 769 – 782.
11. *Шаваровский Б. З.* О некоторых „ручных” и „диких” аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 1. – С. 119 – 132.

Одержано 17.05.11