УДК 517.946 + 511.2

Л. І. Комарницька, асп. (Львів. ун-т),
Б. Й. Пташник, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗНОГО ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ*

Existence and uniqueness conditions are given for solutions of differential equations not solved with respect to the higher time derivative with local boundary conditions for the time variable and the condition of periodicity in spatial variables. A metric theorem on lower estimates of small denominators, which appear in the construction of solutions of the problem, is proved.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язків задач з локальними крайовими умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. Доведено метричну теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач.

В області $D = [0, T] \times \Omega$, Ω — p-вимірний тор, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней паралелепіпеда $\{ x \in \mathbb{R}^p : 0 \le x_r \le 2\pi, \ r = 1, \dots, p \}$, розглянемо задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\sum_{|s| \le 2m} a_\beta^s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta u(t,x) = 0, \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \qquad j = 1, \dots, l,$$
$$1 \le l \le n-1, \qquad (2)$$
$$\left.\frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{l+r}(x), \qquad r = 1, \dots, n-l,$$

де оператор

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{|s| \le 2m} b^s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}$$

еліптичний, $b^s, a_\beta^s \in \mathbb{R}$, $n \ge 2$, $m \ge 1$. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \dots, x_p$ на шукану функцію $u(t,x)$ та функції $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$.

Диференціальні рівняння вигляду (1) (не розв'язні відносно старшої похідної за часом) виникають у багатьох задачах гідродинаміки. У випадку $n = 1$ такі рівняння одержані при вивченні деяких типів хвиль у тонких шарах рідини на поверхні глобуса, що обертається [1, 2]. При $n = 2$ частинними випадками рівняння (1) є відоме рівняння С. Л. Соболєва, яке описує малі коливання ідеальної рідини в посудині, що обертається [3, 4], рівняння динаміки стратифікованих рідин [5, 7].

Основи загальної теорії задачі Коші та мішаних задач для диференціальних рівнянь і систем довільного порядку, не розв'язних відносно старшої похідної, розроблено в роботах [8 – 12], зокрема, в [8] використовується метод інтегрального зображення розв'язків, який дозволяє встановити точні апріорні оцінки, а в [10] — методи операційного числення.

* Робота підтримана фондом фундаментальних досліджень Державного комітету України з питань науки та технологій.

У даній статті, яка є продовженням праць [13–15], досліджено питання коректності задачі (1), (2), яка, взагалі, умовно коректна. При цьому, зокрема, використано методи метричної теорії чисел. Одним з основних результатів роботи є доведення метричної теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Позначимо через $\mathbb{Z}^p$ множину точок $\mathbb{R}^p$ з цілими координатами, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$; $H_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{Z}$, — простір 2π-періодичних за всіма змінними функцій

$$v(x) = \sum_{|k| \geq 0} v_k \exp[(ik, x)]$$

з нормою

$$\|v(x)\|^2_{H_q(\Omega)} = (2\pi)^p \sum_{|k| \geq 0} \left[1 + \|k^2\|\right]^q |v_k|^2.$$

Розв'язок розглядуваної задачі шукатимемо в просторі $C^n([0, T], H_q(\Omega))$ функцій $u(t, x)$ таких, що

$$\|u(t,x)\|_{C^n([0,T], H_q(\Omega))} = \sum_{j=0}^{n} \max_{0 \leq t \leq T} \left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{H_q(\Omega)};$$

якщо $q \geq [p/2] + 2m + 1$, то згідно з теоремою Соболєва про вкладення просторів він буде класичним.

Зобразимо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp[(ik, x)],$$

де коефіцієнти $u_k(t)$ є відповідно розв'язками таких задач:

$$L(ik)\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{\beta=0}^{n-1}\left(\sum_{|s| \leq 2m} a^s_\beta (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p}\right)\frac{d^b u_k(t)}{dt^\beta} = 0, \quad 0^0 \equiv 1, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &u_k^{(j-1)}(0) = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \ldots, l, \\ &u_k^{(r-1)}(T) = \varphi_{l+r,k}, \quad r = 1, \ldots, n-l, \end{aligned} \qquad 1 \leq l \leq n-1, \tag{4}$$

$\varphi_{j,k}$ — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$. Припустимо, що

$$L(ik) \equiv \sum_{|s| \leq 2m} b^s (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p. \tag{5}$$

Введемо такі позначення:

$$A_1(k) = \operatorname{Re} L(ik) = \sum_{\alpha=0}^{m} \sum_{|s|=2\alpha} (-1)^\alpha b^s k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p},$$

$$A_2(k) = \operatorname{Im} L(ik) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{|s|=2\alpha-1} (-1)^{\alpha+1} b^s k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p},$$

$$A_3(k) = (-1)^m \sum_{|s|=2m} b^s k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p} = (-1)^m \|k\|^{2m} \sum_{|s|=2m} b^s \left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1} \cdots \left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p}, \tag{6}$$

$$A_4(k) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{|s|=2\alpha} (-1)^{\alpha} b^s k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p}, \quad \omega(k) = A_1^2(k) + A_2^2(k).$$

Лема 1. *Існують константи* $C_0 > 0$ *і* $K = K(C_0) > 0$ *такі, що*

$$|L(ik)| \geq C_0 |k|^{2m} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| \geq K.$$

Доведення. З еліптичності оператора $L(\partial/\partial x)$ і теореми Вейєрштрасса випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ $|A_3(k)| \geq C_1 \| k \|^{2m} \geq C_1 p^{-m} |k|^{2m}$, де $C_1 > 0$ — точна нижня грань величини $|A_3(\xi)|$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, на одиничній сфері. Враховуючи, що $A_3(k) = A_1(k) - A_4(k)$, маємо нерівність

$$C_1 p^{-m} |k|^{2m} \leq |A_1(k)| + |A_4(k)| \leq |A_1(k)| + C_2 |k|^{2m-2}, \quad k \in \mathbb{Z}^p,\ C_2 = \delta\beta,$$

де $\beta = \max\{|b^s|,\ |s| = 2\alpha,\ \alpha = 0, \ldots, m-1\}$, δ — число коефіцієнтів b^s у виразі $A_4(k)$. Тоді

$$|L(ik)| \geq |A_1(k)| \geq \left(C_1 p^{-m} |k|^2 - C_2\right) |k|^{2m-2}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{7}$$

З нерівності (7) випливає справедливість леми 1 для довільних $C_0 \in (0, C_1 p^{-m})$ і $K = \sqrt{C_2 p^m \left(C_1 - C_0 p^m\right)^{-1}}$.

Лема 2. *Для коренів* $\lambda_\gamma \equiv \lambda_\gamma(k)$, $\gamma = 1, \ldots, n$, *характеристичного рівняння*

$$L(ik)\lambda^n + \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\sum_{|s| \leq 2m} a_\beta^s (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \right) \lambda^\beta = 0, \tag{8}$$

що відповідає рівнянню (3), *справедливі оцінки*

$$|\lambda_\gamma(k)| \leq C, \quad \gamma = 1, \ldots, n, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p, \tag{9}$$

де константа $C > 0$ *не залежить від* k.

Доведення випливає з умови (5) та леми 1.

Припустимо, що для довільного $k \in \mathbb{Z}^p$ усі λ-корені рівняння (8) мають кратність, рівну одиниці. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ розв'язок задачі (3), (4) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{\gamma=1}^{n} C_{k,\gamma} \exp(\lambda_\gamma(k) t),$$

де сталі $C_{k,\gamma}$, $\gamma = 1, \ldots, n$, визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\gamma=1}^{n} C_{k,\gamma} \lambda_\gamma^{j-1}(k) = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \ldots, l,$$

$$\sum_{\gamma=1}^{n} C_{k,\gamma} \lambda_\gamma^{r-1}(k) \exp(\lambda_\gamma(k) T) = \varphi_{l+r,k}, \quad r = 1, \ldots, n-l,$$

визначник $\Delta(k)$ якої має вигляд

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(k) & \dots & \lambda_n(k) \\ \hdashline \lambda_1^{l-1}(k) & \dots & \lambda_n^{l-1}(k) \\ \exp(\lambda_1(k)T) & \dots & \exp(\lambda_n(k)T) \\ \lambda_1(k)\exp(\lambda_1(k)T) & \dots & \lambda_n(k)\exp(\lambda_n(k)T) \\ \hdashline \lambda_1^{n-l-1}(k)\exp(\lambda_1(k)T) & \dots & \lambda_n^{n-l-1}(k)\exp(\lambda_n(k)T) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^n([0, T], H_q(\Omega))$, $q \in \mathbb{Z}$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\Delta(k) \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p. \tag{10}$$

Доведення. Зауважимо, що для довільного $q \in \mathbb{Z}$ $H_q \subset I'$, де I' — простір усіх лінійних неперервних функціоналів над простором I тригонометричних многочленів. Як показано в ([16], розд. 2), I' співпадає з простором формальних тригонометричних рядів. З єдиності розвинення функції $v(x) \in I'$ в ряд Фур'є випливає доведення теореми 1.

Припустимо, що умови (10) виконані. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ задача (3), (4) має єдиний розв'язок, а розв'язок задачі (1), (2) формально зображається у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \sum_{\alpha, \gamma = 1}^{n} \frac{\Delta_{\alpha,\gamma}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{\alpha,k} \exp\left(\lambda_\gamma(k)t + (ik, x)\right), \tag{11}$$

де $\Delta_{\alpha,\gamma}(k)$ — алгебраїчне доповнення елемента α-го рядка і γ-го стовпця у визначнику $\Delta(k)$. Питання про збіжність ряду (11) пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки величина $|\Delta(k)|$, відмінна від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Теорема 2. *Нехай існують* $M_0 > 0$ *і* $\nu \in \mathbb{N}$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq M_0 |k|^{-\nu - \varepsilon_0}, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1. \tag{12}$$

Якщо $\varphi_\alpha(x) \in H_{q+\nu+1}(\Omega)$, $\alpha = 1, \dots, n$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2), *який зображається рядом* (11) *і належить простору* $C^n([0, T], H_q(\Omega))$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, n$.

Доведення. З (9) випливає оцінка

$$|\Delta_{\alpha,\gamma}(k)| \leq M_1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p, \tag{13}$$

в якій $M_1 > 0$ — деяка константа, не залежна від k. На основі (9), (11) – (13)

$$\|u(t,x)\|_{C^n([0,T], H_q(\Omega))} \leq M_2 \sum_{\alpha=1}^{n} \|\varphi_\alpha(x)\|_{H_{q+\nu+1}(\Omega)}, \tag{14}$$

де $M_2 = M_2(M_0, M_1, T, n, p)$. З нерівності (14) випливає доведення теореми.

Зауваження 1. Якщо при деякому $k \in \mathbb{Z}^p$ $L(ik) = 0$,

$$\sum_{|s| \leq 2m} a_{n-j}^s (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} = 0, \quad j = 1, \dots, \rho - 1, \quad 1 \leq \rho \leq n-1,$$

$$\sum_{|s|\leq 2m} a_{n-\rho}^{s}(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p} \neq 0,$$

то відповідна задача (3), (4) має єдиний розв'язок $u_k(t)$ тоді і тільки тоді, коли для даного k виконуються умови $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = n-\rho$, де A і $\overline{A}$ — відповідно матриця і розширена матриця перевизначеної системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n-\rho} C_{k,i}\lambda_i^{j-1}(k) = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$\sum_{i=1}^{n-\rho} C_{k,i}\lambda_i^{r-1}(k)\exp(\lambda_j(k)T) = \varphi_{l+r,k}, \quad r = 1, \dots, n-l.$$

Розглянемо питання про можливість виконання оцінки (12). Для цього нам буде потрібне наступне твердження. Позначимо через y вектор, складений з усіх коефіцієнтів рівняння (1), за винятком коефіцієнтів

$$a_0^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)}, \quad b^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)}, \quad r = 1, \dots, p,$$

а через h — вектор з компонентами

$$h_r = a_0^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)}\, b^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)}, \quad r = 1, \dots, p.$$

Лема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів h і для довільного фіксованого вектора y виконуються нерівності*

$$\prod_{n\geq i>j\geq 1} |\lambda_i(k)-\lambda_j(k)| \geq M|k|^{-p(n-1)/2-\varepsilon/2}, \quad 0<\varepsilon<1, \ |k| > K_1(h), \tag{15}$$

де M — додатна константа, яка не залежить від k.

Доведення. Поділивши ліву частину рівняння (8) на $L(ik) \equiv A_1(k) + iA_2(k)$, де $A_q(k)$, $q = 1, 2$, визначені формулами (6), одержуємо поліном

$$\lambda^n + [L(ik)]^{-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \left(\sum_{\alpha=0}^{m} \sum_{|s|=2\alpha} (-1)^\alpha a_\beta^s k_1^{s_1}\dots k_p^{s_p} - \right.$$

$$\left. - i\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{|s|=2\alpha-1} (-1)^\alpha a_\beta^s k_1^{s_1}\dots k_p^{s_p} \right)\lambda^\beta \equiv$$

$$\equiv \lambda^n + \sum_{\beta=0}^{n-1} P_\beta(k)\lambda^\beta \equiv P(\lambda). \tag{16}$$

Для дискримінанта $D(P)$ полінома $P(\lambda)$ справедливі зображення [17]

$$D(P) = \prod_{n\geq i>j\geq 1} (\lambda_i(k)-\lambda_j(k))^2, \tag{17}$$

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \begin{vmatrix} 1 & P_{n-1} & P_{n-2} & \dots & P_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & P_{n-1} & \dots & P_1 & P_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & P_0 \\ n & (n-1)P_{n-1} & \dots & P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & 2P_2 & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n & (n-1)P_{n-1} & \dots & \dots & P_1 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Використовуючи схему доведення теореми 6 в [18], покажемо, що для майже всіх векторів h, які належать деякому паралелепіпеду $\Pi_p = [\alpha, \beta] \times \Pi_{p-1} \subset \subset \mathbb{R}^p$, виконується нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| \geq C_1 |k|^{-p(n-1)-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \; |k| > K_1(h). \tag{19}$$

Позначимо через W множину h, для яких протилежна нерівність

$$|\operatorname{Re} D(P)| < C_1 |k|^{-p(n-1)-\varepsilon} \tag{20}$$

має безмежне число розв'язків $k \in \mathbb{Z}^p$, а через W_k — множину векторів h, для яких нерівність (20) справедлива при фіксованому k. Не обмежуючи загальності, припустимо, що

$$|k_1| = \max_{1 \leq \alpha \leq p} |k_\alpha|$$

і $h_1 \neq 0$. З (18) видно, що $D(P) = \pm n^n P_0^{n-1}(k) + F(k)$, а

$$\operatorname{Re} D(P) = \pm n^n (\operatorname{Re} P_0(k))^{n-1} + F_1(k),$$

де $F_1(k)$ містить степені $\operatorname{Re} P_0(k)$, менші, ніж $n-1$. Враховуючи, що

$$\omega(k) \leq C_2 |k|^{4m} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p \tag{21}$$

і $\operatorname{Re} P_0(k)$ лінійно залежить від h_1, маємо

$$\left| \frac{\partial^{n-1}}{\partial h_1^{n-1}} \operatorname{Re} D(P) \right| \geq n^n (n-1)! \left(\frac{|k_1|^{4m}}{C_2 |k|^{4m}} \right)^{n-1} \geq C_3$$

$$(C_3 = n^n (n-1)! \, (C_2 p^{4m})^{1-n}).$$

На основі леми 2 [18] одержуємо, що міра множини $W_k(h_1)$ значень $h_1 \in [\alpha, \beta]$, які задовольняють нерівність (20) (при фіксованих $h_2, \ldots, h_p$), має оцінку

$$|W_k(h_1)| \leq C_4(n) (C_3)^{1-n} |k|^{-p-\varepsilon/(n-1)}. \tag{22}$$

Інтегруючи (22) за змінними $h_2, \ldots, h_p$ в паралелепіпеді Π_{p-1}, маємо

$$|W_k| \leq C_5(n, p) |k|^{-p-\varepsilon/(n-1)}.$$

Ряд $\sum_{|k|>0} |W_k|$ збігається, тоді за лемою Бореля–Кантеллі ([19], розд. 1, § 1) міра множини W дорівнює нулю. Оскільки весь простір $\mathbb{R}^p$ можна покрити зліченним числом паралелепіпедів Π_p, то, враховуючи (17), (19) і те, що $|D(P)| \geq |\operatorname{Re} D(P)|$, одержуємо, що для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів h справджуються оцінки (15). Лема 3 доведена.

Знову розглянемо оцінку (12), вважаючи, що $T \in [T_1, T_2]$. За теоремою Лапласа визначник $\Delta(k)$ зображається у вигляді

$$\Delta(k) = (-1)^{(n+l+1)(n-l)/2} \sum_{S_n} (-1)^{s_1 + \ldots + s_{n-l}} V(\lambda_{s_1}, \ldots, \lambda_{s_{n-l}}) \times$$

$$\times V(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l}) \exp[(\lambda_{s_1} + \ldots + \lambda_{s_{n-l}}) T] \equiv (-1)^{(n+l+1)(n-l)/2} \Delta^*(k), \tag{23}$$

де S_n — множина мультиіндексів $(s_1, \ldots, s_{n-l})$ таких, що $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-l} \le n$, $V(\lambda_{s_1}, \ldots, \lambda_{s_{n-l}})$ — визначник Вандермонда, складений з елементів множини $\Gamma_1 = \{\lambda_{s_1}, \ldots, \lambda_{s_{n-l}}\}$, а $V(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_l})$ — з елементів $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$, $\Gamma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Сума в (23) містить $\sigma = n!/(l!(n-l)!)$ доданків. Впорядкуємо множину S_n лексикографічним способом, підказаним звичним розміщенням слів у словниках: вважаючи букви впорядкованими за алфавітом, ми визначаємо взаємне розміщення двох даних слів за їх першими буквами, якщо ж ці букви співпадають — то за другими буквами і т. д. Тоді, звичайно, першим елементом $(s_1^1, \ldots, s_{n-l}^1)$ множини S_n буде мультиіндекс $(1, \ldots, n-l)$, а останнім елементом $(s_1^\sigma, \ldots, s_{n-l}^\sigma)$ — мультиіндекс $(l+1, \ldots, n)$. Враховуючи впорядкованість множини S_n, одержуємо для $\Delta^*(k)$ таке зображення:

$$\Delta^*(k) = \sum_{r=1}^{\sigma} (-1)^{s_1^r + \ldots + s_{n-l}^r} V\left(\lambda_{s_1^r}, \ldots, \lambda_{s_{n-l}^r}\right) V\left(\lambda_{j_1^r}, \ldots, \lambda_{j_l^r}\right) \times$$

$$\times \exp\left[\left(\lambda_{s_1^r} + \ldots + \lambda_{s_{n-l}^r}\right) T\right] \equiv \sum_{r=1}^{\sigma} B_r(k) \exp\left[\beta_r(k) T\right], \tag{24}$$

де

$$B_r(k) = (-1)^{s_1^r + \ldots + s_{n-l}^r} V\left(\lambda_{s_1^r}, \ldots, \lambda_{s_{n-l}^r}\right) V\left(\lambda_{j_1^r}, \ldots, \lambda_{j_l^r}\right),$$

$$\beta_r(k) = \lambda_{s_1^r} + \ldots + \lambda_{s_{n-l}^r}.$$

Позначимо $\alpha_r(k) = \operatorname{Re} \beta_r(k)$, $\delta_r(k) = \operatorname{Im} \beta_r(k)$.

Розглянемо функції $F_r(T)$, $r = 1, \ldots, \sigma$, і $Q(\bar{\lambda})$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, означені таким чином:

$$F_1(T) = \Delta^*(k), \quad F_2(T) = \exp\left[-\beta_1(k) T\right] F_1(T),$$

$$F_3(T) = \exp\left[-(\beta_2(k) - \beta_1(k)) T\right] \frac{dF_2(T)}{dT}, \ldots, F_\sigma(T) =$$

$$= \exp\left[-(\beta_{\sigma-1}(k) - \beta_{\sigma-2}(k)) T\right] \frac{dF_{\sigma-1}(T)}{dT},$$

$$Q(\bar{\lambda}) = \exp\left[-(\beta_\sigma(k) - \beta_{\sigma-1}(k)) T\right] \frac{dF_\sigma(T)}{dT} = B_\sigma(k) \prod_{j=1}^{\sigma-1} (\beta_\sigma(k) - \beta_j(k)) \equiv \tag{25}$$

$$\equiv (-1)^{(n+l+1)(n-l)/2} V(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) V(\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n) \prod_{j=1}^{\sigma-1} \left(\sum_{\gamma=1}^{n} d_{j,\gamma} \lambda_\gamma \right),$$

де $d_{j,\gamma}$ набувають значень -1, 0, 1; $Q(\bar{\lambda})$ є многочленом від $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ степеня $n(n-1)/2 - l(n-l) + \sigma - 1$. Припустимо, що існують $C_0 > 0$ і $\mu \in \mathbb{N}$ такі, що виконується нерівність

$$|Q(\bar{\lambda})| \ge C_0 |k|^{-\mu-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1/\sigma; \quad |k| > K_2. \tag{26}$$

Зауважимо, що з нерівності (9) випливають оцінки

$$|\exp\left[-(\beta_r(k) - \beta_{r-1}(k)) T\right]| \ge \tilde{C}, \quad r = 2, \ldots, \sigma; \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{27}$$

де $\tilde{C} = \exp[-2CT(n-l)]$. З (25)–(27) маємо

$$\left|\frac{dF_\sigma(T)}{dT}\right| \geq C_1 |k|^{-\mu-\varepsilon}, \quad |k| > K_2; \quad C_1 = C_0 \tilde{C}. \tag{28}$$

Для довільного фіксованого вектора $k \in \mathbb{Z}^p$ такого, що справедлива нерівність (28), відрізок $[T_1, T_2]$ розбивається на підмножини $\mathcal{A}_1$ і $\mathcal{B}_1$ такі, що

$$\begin{aligned} &\left|\operatorname{Re}\frac{dF_\sigma(T)}{dT}\right| \geq \frac{C_1}{\sqrt{2}} |k|^{-\mu-\varepsilon}, \quad T \in \mathcal{A}_1, \\ &\left|\operatorname{Im}\frac{dF_\sigma(T)}{dT}\right| \geq \frac{C_1}{\sqrt{2}} |k|^{-\mu-\varepsilon}, \quad T \in \mathcal{B}_1, \end{aligned} \tag{29}$$

Оскільки функція

$$\operatorname{Re}\frac{dF_\sigma(T)}{dT} = \exp[(\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma-1})T] \times$$
$$\times \left\{\operatorname{Re}\left(B_\sigma \prod_{j=1}^{\sigma-1} (\beta_\sigma - \beta_j)\right) \cos[(\delta_\sigma - \delta_{\sigma-1})T] - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Im}\left(B_\sigma \prod_{j=1}^{\sigma-1} (\beta_\sigma - \beta_j)\right) \sin((\delta_\sigma - \delta_{\sigma-1})T)\right\}$$

як функція змінної T є добутком експоненти на функцію, періодичну з періодом $2\pi / |\delta_\sigma(k) - \delta_{\sigma-1}(k)|$, і $|\delta_\sigma(k) - \delta_{\sigma-1}(k)| \leq 2C(n-l)$, то множина $\mathcal{A}_1$ (як і $\mathcal{B}_1$) складається не більше, ніж з $[(T_2 - T_1)|\delta_\sigma(k) - \delta_{\sigma-1}(k)|/\pi] + 2 \leq d_1$ інтервалів, де $[a]$ — ціла частина a, d_1 не залежить від k. На основі леми 2 [18] і першої з нерівностей (29) маємо, що на кожному з інтервалів множини $\mathcal{A}_1$ оцінка

$$|\operatorname{Re} F_\sigma(T)| < \frac{C_1}{\sqrt{2}} |k|^{-\mu-p-\varepsilon_1}, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1,$$

виконується для множини значень T, міра якої не перевищує $M_{1,1}|k|^{-p-(\varepsilon_1-\varepsilon)}$, $M_{1,1} = \text{const}$. Аналогічно показується, що на кожному з інтервалів множини $\mathcal{B}_1$ оцінка

$$|\operatorname{Im} F_\sigma(T)| < \frac{C_1}{\sqrt{2}} |k|^{-\mu-p-\varepsilon_1}$$

виконується для множини значень T, міра якої не перевищує $M_{2,1}|k|^{-p-(\varepsilon_1-\varepsilon)}$, $M_{2,1} = \text{const}$. Отже, існує підмножина $D_1 \subset [T_1, T_2]$ така, що для довільних $T \in D_1$

$$|F_\sigma(T)| \geq C_1 |k|^{-\mu-p-\varepsilon_1},$$

причому $\operatorname{mes} D_1 > T_2 - T_1 - d_1(M_{1,1} + M_{2,1})|k|^{-p-(\varepsilon_1-\varepsilon)}$.

Аналогічними міркуваннями, переходячи послідовно від оцінки функції $F_{q+1}(T)$ до оцінки $F_q(T)$, $q = \sigma - 1, \ldots, 2$, одержуємо, що існує підмножина $D_{\sigma-1}$, $D_{\sigma-1} \subset D_{\sigma-2} \subset \ldots \subset [T_1, T_2]$ така, що для довільних $T \in D_{\sigma-1}$

$$|F_2(T)| \geq \tilde{C}^{\sigma-1} C_0 |k|^{-\mu-(\sigma-1)p-\varepsilon_{\sigma-1}}, \tag{30}$$

і

$$\operatorname{mes} D_{\sigma-1} > T_2 - T_1 - \sum_{j=1}^{\sigma-1} d_j (M_{1,j} + M_{2,j}) |k|^{-p-(\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1})}.$$

При цьому враховується той факт, що число інтервалів множини $\mathcal{A}_{\sigma-q+1}$ або $\mathcal{B}_{\sigma-q+1}$, $q = \sigma-1, \ldots, 2$, на яких виконуються нерівності

$$\left| \operatorname{Re} \frac{dF_q(T)}{dT} \right| \geq l(k)$$

або

$$\left| \operatorname{Im} \frac{dF_q(T)}{dT} \right| \geq l(k),$$

не перевищує деякої константи $d_{\sigma-q+1}$, яка не залежить від k. Покажемо це. Розглянемо функції $F_q(T)$, $q = 2, \ldots, \sigma-1$, визначені формулами (25). Очевидно,

$$\frac{dF_q(T)}{dT} = \sum_{r=q}^{\sigma} B_r(k) \prod_{j=1}^{q-1} (\beta_r(k) - \beta_j(k)) \exp[(\beta_r(k) - \beta_{q-1}(k))T],$$

$$\operatorname{Re} \frac{dF_q(T)}{dT} = \sum_{r=q}^{\sigma} \exp[(\alpha_r - \alpha_{q-1})T] \left\{ \operatorname{Re}\left(B_r \prod_{j=1}^{q-1} (\beta_r - \beta_j) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \cos((\delta_r - \delta_{q-1})T) - \operatorname{Im}\left(B_r \prod_{j=1}^{q-1} (\beta_r - \beta_j) \right) \sin((\delta_r - \delta_{q-1})T) \right\}.$$

На кожному з інтервалів (крім, можливо, двох крайніх) зміни величини $T \in [T_1, T_2]$, на яких справджується нерівність $|\operatorname{Re}(dF_q(T)/dT)| \geq l(k)$, функція $\operatorname{Re}(d^2 F_q(T)/dT^2) \equiv \tilde{y}(T)$ має за теоремою Ролля принаймні один нуль. Зауважимо, що функція $\tilde{y}(T)$ є розв'язком рівняння

$$\prod_{r=q}^{\sigma} \left(\frac{d^2}{dT^2} + 2(\alpha_{q-1} - \alpha_r) \frac{d}{dT} + \left((\alpha_{q-1} - \alpha_r)^2 + (\delta_{q-1} - \delta_r)^2 \right) \right) y(T) = 0. \tag{31}$$

Поряд з рівнянням (31) розглянемо рівняння

$$\prod_{r=q}^{\sigma} \left(\frac{d^2}{dT^2} + 2\psi_{q,r} \frac{d}{dT} + \theta_{q,r} \right) y(T) = 0, \tag{32}$$

де $\psi_{q,r}$, $\theta_{q,r}$ — константи такі, що $|\alpha_{q-1} - \alpha_r| \leq \psi_{q,r}$, $(\alpha_{q-1} - \alpha_r)^2 + (\delta_{q-1} - \delta_r)^2 \leq \theta_{q,r}$. Згідно з теоремою Валле–Пуссена ([20], розд. 4), існує така стала $h_q > 0$, що довільний нетривіальний розв'язок рівняння (32), а отже, і рівняння (31), має на відрізку довжиною h_q не більше, ніж $2\sigma - 2q + 1$ нулів. Тому число нулів функції $\tilde{y}(T)$ на $[T_1, T_2]$, а значить, число інтервалів множини $\mathcal{A}_{\sigma-q+1}$ (як і $\mathcal{B}_{\sigma-q+1}$), не перевищує $d_{\sigma-q+1} = ([(T_2 - T_1)/h_q] + 1) \times (2\sigma - 2q + 1)$, де $[a]$ — ціла частина a.

З формул (23), (25) та нерівності (30) випливає, що оцінка

$$|\Delta(k)| = |\exp(\beta_1(k)T)||F_2(T)| \geq \tilde{C}^{\sigma-1/2}C_0|k|^{-\mu-(\sigma-1)p-\varepsilon_{\sigma-1}} \tag{33}$$

не виконується лише для множини D' значень T такої, що

$$\operatorname{mes} D' \leq \sum_{r=1}^{\sigma-1} d_j(M_{1,j}+M_{2,j})|k|^{-p-(\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1})}.$$

Покладемо $\varepsilon_j=(j+1)\varepsilon, j=1,\dots,\sigma-1$. Оскільки при $\varepsilon>0$ ряд $\sum_{|k|>0}|k|^{-p-\varepsilon}$ збіжний, то на основі леми Бореля–Кантеллі ([19], розд. 1, § 1) маємо, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ нерівність (33) виконується для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $T\in[T_1,T_2]$ у припущенні, що виконана нерівність (26).

З'ясуємо, за яких умов виконується оцінка (26). Домножимо $\sum_{\gamma=1}^{n} d_{j,\gamma}\lambda_\gamma$, $j=1,\dots,\sigma-1$, на добуток всеможливих сум вигляду $\sum_{\gamma=1}^{n} l_{j,s_\gamma}\lambda_\gamma$, де $(s_1,\dots,s_n)$ — перестановка чисел $(1,\dots,n)$, l_{j,s_γ} набувають значень d_{j,s_γ} або $(-d_{j,s_\gamma})$. Одержимо симетричний многочлен $S(\overline{\lambda})$ від змінних $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ степеня $q\leq n!$. Згідно з основною теоремою про симетричні многочлени $S(\overline{\lambda})$ є многочленом від елементарних симетричних многочленів, тому він, а значить, і $\operatorname{Re} S(\overline{\lambda})$, поліноміально залежать від коефіцієнтів рівняння $P(\lambda)=0$, де $P(\lambda)$ визначений формулою (16).

Позначимо через η вектор, складений з усіх коефіцієнтів рівняння (1), за винятком коефіцієнтів

$$a_\beta^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)},\quad b^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)},\quad r=1,\dots,p;\quad \beta=0,\dots,n-1.$$

Припустимо, що вектор $(g_1,\dots,g_p)$, де

$$g_r=(g_{n-1,r},\dots,g_{0,r}),\quad g_{\beta,r}=a_\beta^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)}\,b^{(\overbrace{0,\dots,0}^{r-1},2m,0,\dots,0)},$$
$$r=1,\dots,p;\quad \beta=0,\dots,n-1,$$

належить деякому паралелепіпеду $\Pi_{np}=\Pi_n\times\Pi_{n(p-1)}\subset\mathbb{R}^{np}$. Зафіксуємо вектор k. Нехай

$$|k_1|=\max_{1\leq\alpha\leq p}|k_\alpha|,$$

що не обмежує загальності. Оскільки хоча б один із доданків полінома $\operatorname{Re} S(\overline{\lambda})$ має вигляд

$$d\prod_{\beta=0}^{n-1}\left(\frac{g_{n-1-\beta,1}k_1^{4m}}{\omega(k)}\right)^{\kappa_{\beta+1}} = \frac{dk_1^{4m|\kappa|}}{\omega^{|\kappa|}(k)}\prod_{\beta=0}^{n-1} g_{\beta,1}^{\kappa_{n-\beta}},$$

де $d\in\mathbb{Z}$, $|\kappa|=\kappa_1+\dots+\kappa_n$, $\kappa_1+2\kappa_2+\dots+n\kappa_n=q$, $\omega(k)$ визначено в (6), то, враховуючи (21), маємо

$$\left|\frac{\partial^{|\kappa|}\operatorname{Re}S(\overline{\lambda})}{\partial g_{n-1,1}^{\kappa_1}\dots\partial g_{0,1}^{\kappa_n}}\right| = \frac{|d|\,|k_1|^{4m|\kappa|}}{\omega^{|\kappa|}(k)}\prod_{\gamma=1}^{n}(\kappa_\gamma)!\geq C_3>0,\quad |\kappa|\leq q\leq n!.$$

Згідно з лемою 2.3 ([13], розд. 1), міра множини $G_1 \subset \Pi_n$ векторів $g_1 = (g_{n-1,1}, \ldots, g_{0,1})$, для яких

$$|\operatorname{Re} S(\overline{\lambda})| < |k|^{-n!p-\varepsilon/(2(\sigma-1))}, \tag{34}$$

має оцінку

$$\operatorname{mes} G_1 \leq C_4 |k|^{-(n!p+\varepsilon/(2(\sigma-1)))/|\kappa|}. \tag{35}$$

Інтегруючи оцінку (35) за змінними $g_{\beta,r}$, $r = 2, \ldots, p$; $\beta = 0, \ldots, n-1$, в паралелепіпеді $\Pi_{n(p-1)}$, одержуємо, що міра множини G векторів $(g_1, \ldots, g_p)$, для яких виконується (34), має оцінку

$$\operatorname{mes} G_1 \leq C_5 |k|^{-(n!p+\varepsilon/(2(\sigma-1)))/|\kappa|}.$$

Враховуючи те, що ряд $\sum_{|k|>0} |k|^{-(n!p+\varepsilon/(2(\sigma-1)))/|\kappa|}$ збіжний, за лемою Бореля–Кантеллі ([19], розд. 1, §1) для майже всіх векторів $(g_1, \ldots, g_p)$ нерівність

$$|S(\overline{\lambda})| \geq |\operatorname{Re} S(\overline{\lambda})| \geq |k|^{-n!p-\varepsilon/(2(\sigma-1))}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів k.

Оскільки для довільних $k \in \mathbb{Z}^p$

$$\left| \sum_{\gamma=1}^{n} l_{j,s_\gamma} \lambda_\gamma \right| \leq C_6,$$

то для майже всіх векторів $(g_1, \ldots, g_p)$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{\gamma=1}^{n} d_{j,\gamma} \lambda_\gamma \right| \geq C_7 |k|^{-n!p-\varepsilon/(2(\sigma-1))},$$

а значить, і нерівність

$$\prod_{j=1}^{\sigma-1} \left| \sum_{\gamma=1}^{n} d_{j,\gamma} \lambda_\gamma \right| \geq C_8 |k|^{-n!p(\sigma-1)-\varepsilon/2}, \quad |k| > K_3. \tag{36}$$

Зауважимо, що

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) V(\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{\substack{1 \leq j \leq l \\ l+1 \leq i \leq n}} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1},$$

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq l \\ l+1 \leq i \leq n}} |\lambda_i - \lambda_j| \leq 2Cl(n-l).$$

На основі нерівності (15) маємо, що для майже всіх векторів $h \in \mathbb{R}^p$ справедлива оцінка

$$|V(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) V(\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n)| \geq C_9 |k|^{-p(n-1)/2-\varepsilon/2}, \quad |k| > K_1(h). \tag{37}$$

З формул (25) та оцінок (36), (37) випливає, що нерівність (26) виконується для майже всіх векторів $(g_1, \ldots, g_p) \in \mathbb{R}^{np}$ при $\mu = n!p(\sigma-1) + p(n-1)/2$, $|k| > \max\{K_1(h), K_3\}$.

З доведеного вище з урахуванням того, що проміньь $[0, \infty[$ можна покрити зліченним числом відрізків $[T_1, T_2]$, а простір $\mathbb{R}^{np}$ — зліченним числом паралелепіпедів Π_{np}, випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{np+1}$) векторів $(g_1, \ldots, g_p, T)$ і довільного фіксованого вектора η нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq M_0 |k|^{-p(C_n^l - 1)(nl+1) - p(n-1)/2 - \varepsilon_0}, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1,$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауваження 2. Результати роботи узагальнюються на системи рівнянь вигляду (1).

1. *Rossby C. G.* Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action // J. Marine Res. – 1939. – **2**, № 1. – P. 38–55.
2. *Lighthill M. I.* On waves generated in dispersive system by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids // J. Fluid Mech. – 1967. – **27**, № 4. – P. 725–752.
3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С. 3–50.
4. *Соболев С. Л.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью // Прикл. механика и техн. физика. – 1960. – № 3. – С. 20–55.
5. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированной жидкости. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
6. *Габов С. А., Сундукова А. В.* Об одной начально-краевой задаче, возникающей в динамике сжимаемой стратифицированной жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1990. – **30**, № 3. – С. 457–465.
7. *Свешников А. Г., Симаков С. Т.* Фундаментальные решения и формулы Грина для семейств уравнений, возникающих в теории колебаний стратифицированной вязкой жидкости // Там же. – № 10. – С. – 1502–1512.
8. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. – Новосибирск: Наука, 1984. – 224 с.
9. *Демиденко Г. В.* L_p-теория краевых задач для уравнений соболевского типа. – Новосибирск, 1991. – 38 с. – (Препринт / СО АН СССР. Ин-т математики; 16.91).
10. *Плетнер Ю. Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1992. – **32**, № 12. – С. 1885–1899.
11. *Кахраманов А. Ш.* Краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной // Числ. методы решения краевых задач. – Баку, 1989. – С. 43–48.
12. *Павлов А. Л.* Задача Коши для уравнений типа Соболева–Гальперна в пространствах функций степенного роста // Мат. сб. – 1993. – **184**, № 11. – С. 3–20.
13. *Пташник Б. Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
14. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4. – С. 669–678.
15. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795–802.
16. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.
17. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
18. *Берник В. И., Пташник Б. Й., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
19. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.
20. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.

Получено 06.04.95