УДК 517.5

А. С. Сердюк, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ КЛАССОВ СВЕРТОК ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Sufficient conditions are given for the kernels to belong to the class N_n^*. This enables, in certain cases, to find exact values of the best approximations for classes of convolutions by trigonometric polynomials in the metrics C and L.

Запропоновані достатні умови належності ядер до класу N_n^*, що дало змогу в деяких випадках знайти точні значення величин найкращих наближень класів згорток тригонометричними поліномами в метриках C і L.

Пусть $L_p, p \geq 1$, — множество 2π-периодических функций φ с конечной нормой $\|\varphi\|_p$, где при $p \in [1, \infty)$

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

и $\|\varphi\|_\infty = \operatorname{es\,sup} |\varphi(t)|$, C — пространство 2π-периодических непрерывных функций f с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{0 \leq r \leq 2\pi} |f(t)|$. Пусть, далее, $L^\psi_{\beta,p}$ — класс 2π-периодических функций f, представимых в виде

$$f(\cdot) = c_0 + (\Psi_\beta * \varphi)(\cdot) \overset{\text{def}}{=} c_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_\beta(\cdot - t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

где $\Psi_\beta(t)$ — суммируемая функция с рядом Фурье

$$s[\Psi_\beta(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2), \tag{2}$$

$\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, — некоторая положительная функция натурального аргумента, β — фиксированное действительное число, а $\varphi(t)$ — суммируемые функции такие, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0, \quad \|\varphi\|_p \leq 1,$$

c_0 — произвольная константа. Множества $C \cap L^\psi_{\beta,p}$ для краткости обозначим $C^\psi_{\beta,p}$. Классы $L^\psi_{\beta,p}$ и $C^\psi_{\beta,p}$ являются частными случаями введенных А. И. Степанцом [1] классов $L^\psi_\beta \mathfrak{N}$, $C^\psi_\beta \mathfrak{N}$, где в качестве множества $\mathfrak{N}$ выбран единичный шар U_p в пространстве L_p: $U_p = \{ f \in L_p : \|f\|_p \leq 1 \}$, $1 \leq$ $\leq p \leq \infty$.

Обозначим через $E_{n-1}(C^\psi_{\beta,\infty})_C$, $E_{n-1}(L^\psi_{\beta,1})_1$ величины наилучших приближений классов $C^\psi_{\beta,\infty}$ и $L^\psi_{\beta,1}$ в метриках C и L тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(\cdot)$ порядка $n-1$. Вопросы о получении точных значений указанных величин для классов функций f вида (1) в случае $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, $\beta \in R$

изучались ранее в работах Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, Сунь Юн-Шена, В. К. Дзядыка и др. (см., например, комментарии и библиографические указания к гл. 6 работы [1]), в случае $\psi(k) = \rho^k$, $0<\rho<1$, — в работах М. Г. Крейна [2] $(\beta \in Z)$ и В. Т. Шевалдина [3] $(\beta \in R)$, а также в других случаях (см. ссылки в работах Н. П. Корнейчука [4] и В. Ф. Бабенко [5]).

Отметим, что все известные к настоящему времени точные значения величин $E_{n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ и $E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_1$ получены для классов сверток с ядрами, удовлетворяющими условию A_n^* С. М. Никольского [6] (см. также определение 1 в [3]) или более жесткому, чем A_n^*, условию N_n^*: существуют полином T^*_{n-1} и точка $\xi \in [0, \pi/n)$ такие, что разность $\Psi_\beta(t) - T^*_{n-1}(t)$ меняет знак на $[0, 2\pi]$ в точках $t_k = \xi + k\pi/n$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и только в них.

В настоящей работе устанавливается, что в случае выполнения неравенств

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)(n+1)}, \quad k = n, n+1, \ldots, \tag{3}$$

для коэффициентов $\psi(k)$ в тригонометрическом разложении (2) функции $\Psi_\beta(\cdot)$ имеет место включение $\Psi_\beta(\cdot) \in N_n^*$ для произвольных $\beta \in R$ и $n \in N$, на основании чего, следуя схеме рассуждений из [7], для соответствующих классов сверток вычисляются точные значения величин $E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_1$, $E_{n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$. А именно: доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция* $\Psi_\beta(\cdot)$ *вида* (2) *такова, что для данного* $n \in N$ *выполняются условия* (3). *Тогда справедливы равенства*

$$E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = E_{n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = E_{n-1}(\Psi_\beta)_1 = \| \Psi_\beta(t) * \operatorname{sign} \sin nt \|_\infty =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi[(2j+1)n]}{2j+1} \sin((2j+1)n\xi_0 - \beta\pi/2) \right|, \tag{4}$$

где ξ_0 *является корнем уравнения*

$$\sum_{j=0}^{\infty} [\psi(2j+1)n] \cos((2j+1)n\xi_0 - \beta\pi/2) = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Отметим, что функция $\Psi_\beta(\cdot)$ с коэффициентами $\psi(k)$, удовлетворяющими условиям (3), является бесконечно дифференцируемой (см., например, п. 8.2 гл. 1 [1]). Подействовав на функцию $\Psi_\beta(\cdot)$ линейным дифференциальным оператором $\lambda_{n-1}(D) = D(D^2+1^2)(D^2+2^2)\ldots(D^2 + (n-1)^2)$ ($D = d/dt$ — символ дифференцирования), получим

$$\lambda_{n-1}(D)\Psi_\beta(t) = (-1)^{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \frac{(k+n-1)!}{(k+n)!} \sin(kt - \beta\pi/2). \tag{6}$$

Обозначив $b_n(k) = (k+n-1)!\,\psi(k)/(k-n)!$, покажем, что

$$n\, b_n(n) > \sqrt{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k b_n(k). \tag{7}$$

Для каждого фиксированного n запишем тождество

$$\sqrt{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k b_n(k) = \sqrt{2}\, n\, b_n(n) \sum_{k=n+1}^{\infty} \prod_{i=n+1}^{k} \frac{i b_n(i)}{(i-1)\, b_n(i-1)}. \tag{8}$$

Поскольку согласно условиям (4) для всех $k = n, n+1, \ldots$ выполняются соотношения

$$\frac{(k+1)\, b_n(k+1)}{k\, b_n(k)} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+n)!\, \psi(k+1)\,(k-n)!}{(k+1-n)!\, k\,(k+n-1)!\, \psi(k)} = \frac{k+1}{k}\, \frac{k+n}{k+n-1}\, \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \le$$

$$\le 2(n+1)\, \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} < \frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

то из равенства (8) следует

$$\sqrt{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} k b_n(k) < \sqrt{2}\, n\, b_n(n) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} \right)^k = n\, b_n(n).$$

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся следующим утверждением работы [8].

Лемма. *Пусть*

$$g(x) = \sum_{k=l}^{\infty} b_k \cos(k(x + x_k)), \quad l \ge 1,$$

и

$$l\,|b_l| > \sqrt{2} \sum_{k=l+1}^{\infty} k\,|b_k|.$$

Тогда число нулей $Z(g)$ функции g на периоде $[0, 2\pi]$ с учетом кратности равно $2l$.

Применив лемму к функции $\lambda_{n-1}(D)\,\Psi_\beta(t)$, на основании неравенства (7) и представления (6) заключаем, что $Z(\lambda_{n-1}(D)\,\Psi_\beta(t)) = 2n$. Из теоремы 2 работы [8] следует, что в силу последнего соотношения выполняется неравенство

$$Z(\Psi_\beta(t) - T_{n-1}(t)) \le 2n, \tag{9}$$

в котором $T_{n-1}(\cdot)$ — произвольный тригонометрический полином порядка $n-1$. Тогда из (9) и теоремы 5 [7] вытекает, что $\Psi_\beta(\cdot) \in N_n^*$ при любом $\beta \in R$ и выполняются равенства (4). Теорема доказана.

При $\beta \in Z$ теорема 1 вытекает из [9]. С учетом теоремы 1 и теоремы 1 работы [10] справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты $\psi(k)$ функции $\Psi_\beta(\cdot)$ вида* (2) *удовлетворяют условиям* (3). *Тогда справедливы равенства*

$$d_{2n}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L) =$$

$$= \| \Psi_\beta(t) * \operatorname{sign} \sin nt \|_\infty, \tag{10}$$

где $d_N(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C)$ *и* $d_N(L^{\psi}_{\beta,1}, L)$ *— поперечники по Колмогорову порядка* N *классов* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *и* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *в метриках* C *и* L *соответственно.*

В случае, когда $\beta \in Z$, теорема 2 вытекает, например, из работ [10, 11].

Замечание. Условиям (3) при всех $n \in N$, как несложно убедиться, удовлетворяют, например, функции $\psi(k)$ вида:

$$a) \quad \psi(k) = \varphi(k)\rho^k/k!, \quad 0 < \rho < \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)};$$

$$b) \quad \psi(k) = \varphi(k)k^{-\alpha k}, \quad \alpha > \log_4 4(\sqrt{2}+1);$$

$$c) \quad \psi(k) = \varphi(k)e^{-\alpha e^k}, \quad \alpha > \frac{\ln 4(\sqrt{2}+1)}{e(e-1)};$$

$$d) \quad \psi(k) = \varphi(k)e^{-\alpha k^r}, \quad \alpha > 0, \quad r > 1, \quad \begin{cases} \alpha r(r-1) \geq 1, \\ \alpha r > \ln 4(\sqrt{2}+1), \end{cases}$$

где $\varphi(k)$ — произвольная невозрастающая положительная функция натурального аргумента. Таким образом, для всех приведенных выше функций $\psi(k)$ равенства (4) и (10) выполняются при произвольных $n \in N$.

Пусть $\nu(f)$ — число перемен знака периодической функции f на периоде.

Определение. *Периодическую функцию* $\Omega(\cdot)$ *называют* CVD*-ядром (ядром, не увеличивающим осцилляцию) и записывают* $\Omega(\cdot) \in CVD$, *если для любой непрерывной* 2π*-периодической функции* f *выполняется неравенство*

$$\nu(\Omega * f) \leq \nu(f). \tag{11}$$

Считая ядро $\Omega(\cdot) \in CVD$ непрерывной функцией, а систему функций $\{\Omega(x - y_i)\}_{i=0}^{2n+1}$ при любых $0 \leq y_0 < y_1 < \ldots < y_{2n+1} < 2\pi$ линейно независимой, А. Пинкус [12] доказал, что $\Omega(\cdot) \in N_n^*$, и вычислил поперечники $d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ и $d_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ при $p = \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и при $1 \leq p < \infty$, $q = 1$ для соответствующих классов сверток.

Сформулируем результат Мерхьюбера, Шенберга и Вильямсона [13, с. 245], позволяющий указать примеры функций $\Psi_\beta(\cdot)$ вида (2) с коэффициентами $\psi(k)$, выбранными, например, из условий $a)$ и $b)$, для которых свойство CVD не выполняется.

Утверждение. 2π*-периодическая функция* $\Omega(t)$ *не увеличивает осцилляции тогда и только тогда, когда для всех последовательностей* t *и* τ *таких, что* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_1 + 2\pi$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \tau_1 + 2\pi$ *при всех* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *выполняются условия*

$$(-1)^{\varepsilon} D_{2k+1}(t, \tau) = (-1)^{\varepsilon} \det[\Omega(t_i - \tau_j)]_{2k+1} \geq 0, \tag{12}$$

где ε *— фиксированное число, равное* 0 *либо* 1.

В самом деле, в качестве таких функций можно взять, например, функции

$$\Psi_0^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,2^k}{k!} \cos kt, \quad \text{и} \quad \Psi_0^{**}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2k} \cos kt.$$

Тогда в силу утверждения достаточно проверить, что определители $D_3(t,\tau)$, построенные для этих функций, не сохраняют знака. Выбрав

$$t_1^{(1)} = 10^0, \ t_2^{(1)} = 20^0, \ t_3^{(1)} = 30^0, \ \tau_1^{(1)} = 65^0, \ \tau_2^{(1)} = 200^0, \ \tau_3^{(1)} = 210^0,$$

$$t_1^{(2)} = 10^0, \ t_2^{(2)} = 20^0, \ t_3^{(2)} = 30^0, \ \tau_1^{(2)} = 78^0, \ \tau_2^{(2)} = 200^0, \ \tau_3^{(2)} = 210^0$$

и производя вычисления на ЭВМ IBM AT-286, получаем следующие значения:

для функции $\Psi_0^*(t)$:

$$D_3(t^{(2)},\tau^{(2)}) = 5{,}94\cdot 10^{-7} + r_1; \quad D_3(t^{(1)},\tau^{(1)}) = -3{,}43\cdot 10^{-7} + r_2;$$

для функции $\Psi_0^{**}(t)$:

$$D_3(t^{(2)},\tau^{(2)}) = 3{,}5450\cdot 10^{-5} + r_3; \quad D_3(t^{(1)},\tau^{(1)}) = -5{,}0378\cdot 10^{-5} + r_4;$$

где $|r_i| < 10^{-9}, \ i = 1,2,3,4.$

Таким образом, для ядер $\Psi_0^*(t)$ и $\Psi_0^{**}(t)$ условия (12) не выполняются. Поэтому, на основании утверждения заключаем, что они не являются CVD-ядрами. В то же время функции $\Psi_0^*(t)$ и $\Psi_0^{**}(t)$ удовлетворяют условиям теорем 1 и 2 и для них справедливы равенства (4) и (10) при всех $n \in N$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 267 с.
2. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 4–5. – С. 245–249.
3. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 6. – С. 126–136.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
5. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6–21.
6. *Никольский С. М.* Приближения функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
7. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691–701.
8. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Оператор $D(D^2+1^2)(D^2+2^2)\ldots(D^2+n^2$ и тригонометрическая интерполяция // Anal. Math. – 1989. – **15**, № 4. – P. 291–306.
9. *Nady B.* Über gewisse Extremolfragen bei transformierten trigonometrishen Entwicklungen. – Berichte Akad. d. Wiss Leipzig. – 1938. – **90**. – P. 103–134.
10. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L // Укр. мат. журн. – 1995. – **49**, № 8. – С. 1112–1122.
11. *Кушпель А. К.* Точные оценки поперечников классов сверток // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 6. – С. 1305–1322.
12. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 209–235.
13. *Mairhuber J. C., Schoenberg I. J., Williamson.* On variation diminishing transformations on the circle // Rend. Circ. Math. Palenno. Serie II. Jomo VIII. Anno. – 1959. – P. 241–270.

Получено 23.02.94