УДК 517.9

Е. Л. Перчик, канд. техн. наук (Харьк. инж.-строит. ин-т)

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

A method of solving nonlinear second order differential equations by using a system of second kind Fredholm equations is given.

Запропоновано метод розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку за допомогою системи рівнянь Фредгольма другого роду.

Целью настоящей работы является развитие эффективного метода численной реализации начальных и граничных задач, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями на ограниченных интервалах. Общие соображения проиллюстрируем схемой решения уравнения Эмдена для политропного газа

$$u'' + \frac{2}{x}u' + \beta^2 u^\nu = 0, \quad x \in [0, \pi], \tag{1}$$

где $0 < \nu < 5$, $\beta = x_0/\pi$ при $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$.

Значение β зависит от ν, случаи $\nu = 0$ и $\nu = 1$ тривиальны [1, с. 347– –369]. В настоящей статье приведены результаты качественного анализа поведения решения. Аналогичной проблематике для более общих уравнений Эмдена–Фаулера посвящена гл. 7 работы [2], где отмечается невозможность получения решения в явном виде. Современное состояние данной теории отражено в гл. 5 работы [3].

Задача состоит в построении конструктивного алгоритма вычисления функции $u > 0$ и параметра β с учетом дополнительного условия $u(\pi) = 0$.

1. Сведение к интегральному уравнению. Если обозначить

$$a = -\varepsilon^\mu \beta^2 u^{\nu-1}(x), \tag{2}$$

где ε — параметр; $\mu = 1/(2-\nu)$, уравнение (1) формально линеаризуется:

$$u'' + \frac{2}{x}u' + \varepsilon^{-\mu} a u = 0, \quad x \in [0, \pi]. \tag{3}$$

Для устранения особенности ядра получаемого ниже интегрального уравнения используем обозначение $v = u'(x)/x$, преобразуя уравнение (3) следующим образом:

$$xv'(x) + 3v(x) - \varepsilon^{-\mu} a(x) \int_0^x \xi v(\xi)\, d\xi = \varepsilon^{-\mu} a(x), \quad x \in [0, \pi], \tag{4}$$

и решение будем искать в виде

$$v = \frac{c}{x}\psi(x) + (A\psi)(x). \tag{5}$$

Здесь ψ — новая неизвестная, c — некоторая постоянная;

$$A. = \int_{-\pi}^{\pi} k(x,\xi).\, d\xi, \quad k = \frac{1}{\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos 2(x-\xi)+\rho^2}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (4), получаем уравнение

$$c\psi'(x) + \frac{2c}{x}\psi(x) + 3(A\psi)(x) + x(A'\psi)(x) -$$

$$- \varepsilon^{-\mu}a(x)\int_0^x [c\psi(\xi) - \xi(A\psi)(\xi)]\,d\xi = \varepsilon^{-\mu}a(x), \quad x \in [0,\pi]. \tag{7}$$

Сопоставляя интервалы определения ψ и уравнения (7), видим, что последнее может иметь множество решений. В этой связи попытаемся удовлетворить наряду с ним следующее уравнение:

$$\psi(x) = \lambda(A\psi)(x) + f(x), \quad x \in [0,\pi], \tag{8}$$

где λ — параметр, функция f определяется из условия равенства ее свободному члену уравнения (7), в котором предварительно исключается $\psi'(x)$ с помощью (8).

Уравнение (7) приобретает вид

$$\psi(x) = (B\psi)(x) + f(x), \quad x \in [0,\pi], \tag{9}$$

где

$$B. = -3(A.)(x) - (c\lambda + x)(A'.)(x) + \varepsilon^{-\mu}a(x)\int_0^\pi [c. + \xi(A.)(\xi)]\,d\xi; \tag{10}$$

$$f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = \frac{1}{c}\varepsilon^{-\mu}a(x).$$

Отсюда с учетом $f(0) = 0$ получаем равенство

$$f = \frac{\varepsilon^{-\mu}}{cx^2}\int_0^x \xi^2 a(\xi)\,d\xi. \tag{11}$$

2. Анализ приведенных преобразований. Исследуем существование представления (5) в смысле разрешимости уравнения (8).

Лемма 1. *Для функций* $\psi(x)$, $x \in [0,\pi]$, *представимой рядом Фурье, существует функция* ψ *на* $x \in [-\pi, 0]$, *при которой уравнение* (8) *имеет решение в* $L_2[0,\pi]$.

Доказательство. Рассматриваемое уравнение представим в виде

$$\int_{-\pi}^0 k(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = q(x), \quad x \in [0,\pi], \tag{12}$$

где

$$q = \lambda^{-1}[\psi(x) - f(x)] - \int_0^\pi k(x,\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Замена переменных $\zeta = 2x$, $\theta = 2(\xi + \pi)$ преобразует (12) к виду

$$\frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(\theta)\,d\theta}{1 - 2\rho\cos(\zeta - \theta) + \rho^2} = q(\zeta), \quad \zeta \in [0, 2\pi]. \tag{13}$$

Ядро интеграла Пуассона в левой части полученного уравнения замкнуто. По теореме Пикара условием однозначной разрешимости (13) является

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 q_n^2 < \infty, \quad q_n = \int_0^{2\pi} q(\zeta)\psi_n(\zeta)\,d\zeta,$$

где λ_n, ψ_n — характеристические числа и собственные функции ядра $k(\zeta, \theta)$. Вместе с тем, как показал Э. Гурса [4, с. 143, 144], даже если оно не выполняется, при разложении $q(\zeta)$ в сходящийся ряд Фурье по элементам $\{\psi_n\}$ существует функция ψ, удовлетворяющая уравнению (13) в $L_2[0, 2\pi]$, т. е.

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^{2\pi} \left| q(\zeta) - \int_0^{2\pi} k(\zeta,\theta)\psi_n(\theta)\,d\theta \right|^2 d\zeta = 0,$$

где

$$\psi_N = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n q_n \psi_n(\theta)$$

(понятно, что в обычном смысле этот ряд при $N \to \infty$ расходится).

***Замечание* 1.** Приведенный весьма важный, по мнению автора, результат Э. Гурса не нашел отражения в последующих курсах по теории интегральных уравнений. Однако утверждение Э. Гурса о том, что функцию ψ „всегда можно найти" [4, с. 143] является не точным.

Согласно современной терминологии $\psi(\theta)$ трактуется в качестве обобщенной функции — распределения [5, с. 17–19]

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^{2\pi} k(\zeta,\theta)\psi_n(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} k(\zeta,\theta)\psi(\theta)\,d\theta.$$

Аналогичное заключение в $L_2[0, \pi]$ справедливо для уравнения (12), а значит, и исходного уравнения (8). Вычисление ψ на $x \in [-\pi, 0]$ не потребуется. Также подчеркнем конструктивность с точки зрения предлагаемых построений самого утверждения леммы 1.

***Замечание* 2.** Выражение (6) может содержать некоторое другое ядро, обеспечивающее указанные свойства $k(\zeta, \theta)$.

Лемма 2. *Решение рассматриваемой задачи допускает представление* (5) *при условии* (8).

Действительно, исключая $A\psi$ из (5) с помощью (8), получаем

$$v = \frac{c\lambda + x}{\lambda x}\psi(x) - \frac{1}{\lambda} f(x).$$

Как нетрудно заметить, с учетом начальных условий, а также выполненной замены неизвестной можно положить $\psi = x\tilde{\psi}(x)$.

***Замечание* 3.** Если

$$v = \frac{c}{x}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi + (A\psi)(x),$$

то значение $v(0)$ ограничено, но уравнение (4) оказывается нефредгольмовым.

3. Спектральная эквивалентность. Уравнения (8), (9) допускают следующее распространение на интервал $[-\pi, \pi]$:

$$\psi(x) \equiv \lambda(A\psi)(x) + \begin{cases} f(x), & x \in [0,\pi]; \\ \kappa(x), & x \in [-\pi,0], \end{cases} \tag{14}$$

$$\psi(x) \equiv \begin{cases} (B\psi)(x) + f(x), & x \in [0,\pi]; \\ \lambda(A\psi)(x) + \kappa(x), & x \in [-\pi,0], \end{cases} \tag{15}$$

где κ — некоторая неопределенная функция.

Утверждение. *Уравнения* (14), (15) *— уравнения типа Фредгольма второго рода.*

В самом деле, принимая во внимание (6), (10) и (11), можно сделать вывод о непрерывности их ядер и свободных членов.

Теорема. *Уравнения* (14), (15) *тождественны в* $L_2[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Свободные члены этих уравнений одинаковы, их решения по определению тождественны в метрике пространства L_2, что обусловливается выполненной подстановкой с участием (8), утверждением леммы 1, а также устойчивостью свойств разрешимости [6, с. 113, 114].

Следствие. *Характеристические числа и собственные функции рассматриваемых уравнений тождественны в* $L_2[-\pi, \pi]$, *откуда*

$$r_n = \int_0^\pi [\psi_n(x) - (B_n\psi_n)(x)]^2 dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где $B_n = B$ *при* $\lambda = \lambda_n$; $\lambda_0 = 1$, $\psi_0 = 1/\sqrt{2\pi}$; λ_n, φ_n: ρ^{-n}, $\pi^{-1/2}\sin 2nx$; $\pi^{-1/2}\cos 2nx$, $n = 1, 2, \ldots$, *— соответственно характеристические числа и собственные функции однородного уравнения* (14), *причем на основании теоремы Мерсера*

$$k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\psi_n(\xi)/\lambda_n\right]$$

и $A\psi_n = \psi_n(x)/\lambda_n$.

Если в (10)

$$\varepsilon^{-\mu}a(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \varphi_m(x), \tag{17}$$

где $\{\varphi_m\}$ — подходящая система координатных элементов (например, $\cos(m\pi x/2)$, $m = 1, 3, 5, \ldots$); то α_m — постоянные, вычисление которых сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_m} = 0, \quad R = \sum_{n=0}^{\infty} r_n, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Но при этом не учитывается (2), вследствие чего выражение (17), обозначаемое далее через $\overline{a}(x)$, естественно трактовать как эквивалент $\varepsilon^{-\mu}a(x)$ в смысле оговоренной тождественности спектральных характеристик однородных уравнений (14), (15). Таким образом, данные уравнения удается линеаризовать.

4. Восстановление решения. С использованием (8) исключим выражение $A\psi$ из уравнения (9) и проигнорируем его от 0 до x. С учетом $\psi(0) = 0$ и (11) получаем

$$\psi(x) = \int_0^x \left[\overline{a}(\xi) \int_0^\xi (c\lambda + \zeta)\psi(\zeta)\,d\zeta - 4\psi(\xi) \right] \frac{d\xi}{c\lambda + \xi} +$$

$$+ (La)(x, \varepsilon, \mu, c, \lambda), \quad x \in [0, \pi]. \tag{18}$$

Здесь значения c и λ необходимо выбрать так, чтобы $c\lambda + x \neq 0$;

$$L. = \frac{\varepsilon^{-\mu}}{cx^2} \int_0^x \xi^2\,d\xi +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{-\mu}}{c} \int_0^x \frac{d\xi}{\xi^2} \left\{ \frac{3}{c\lambda + \xi} - \xi \left[\int_0^x \frac{\overline{a}(\xi)\,d\xi}{c\lambda + \xi} - \int_0^\xi \frac{\overline{a}(\zeta)\,d\xi}{c\lambda + \zeta} \right] \right\} \int_0^\xi \zeta^2\,d\zeta.$$

Решение уравнения Вольтерра второго рода (18) можно выразить через определяемую специальным образом резольвенту [7]:

$$\psi(a, x) = (La)(x) + \int_0^x \Gamma(x, \xi)(La)(\xi)\,d\xi, \quad x \in [0, \pi].$$

С помощью (5) находим

$$u(a, x) = 1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^x \left[(c\lambda + \xi)\psi(a, \xi) - \frac{\varepsilon^{-\mu}}{c\xi} \int_0^\xi \zeta^2 a(\zeta)\,d\zeta \right] d\xi. \tag{19}$$

Подстановка в правую часть этого выражения функции a из (2) сводит вычисление $u(x)$ к решению нелинейного уравнения Вольтерра второго рода. При этом параметры c и λ могут использоваться для обеспечения требований равномерной сходимости простых итераций [6, с. 317, 318]. Постоянная β в (2) определяется из условия $u(\pi) = 0$. Для вычисления $u(x)$ имеется также ряд других методов [8, 9].

Обратно, если выражение (19) подставить в (2) с учетом $\mu - \mu(\nu - 1) = 1$, то нелинейные члены получаемого интегрального уравнения будут иметь множителями параметр ε со степенью не ниже единицы. На основании принципа сжатых отображений при достаточно малом ε вычисление $a(x)$ производится последовательными приближениями [8].

В случае $\nu = 2$ зависимость (2), а также уравнения Вольтерра второго рода для $u(x)$, $a(x)$ становятся линейными.

5. Другие примеры и краткие комментарии. Уравнение Польвани движения электрона в магнетроне:

$$\ddot{u} = \frac{1}{2\beta^2} \left(\nu^2 \frac{t}{u} - u + \frac{1}{u^3} \right), \tag{20}$$

где ν — известный параметр; $\beta = \pi / t_0$ — коэффициент отображения на $t \in$ $\in [0, \pi]$, t_0 — временной интервал. Свойства решения исследованы в [1, с. 369–380], причем обращается внимание на отсутствие эффективных методов численной реализации соответствующих начальных задач.

В данном случае целесообразно обозначить

$$a = \frac{1}{2} \beta^{-2} \varepsilon^{1/3} [u^{-4}(t) + \nu^2 t u^{-2} - 1],$$

преобразуя уравнение (20) к виду

$$\ddot{u} = \varepsilon^{-1/3} a(t) u, \tag{21}$$

и использовать представление решения

$$u = \int_0^t [K(t,\eta)\psi(\eta) + (A\psi)(\eta)]\, d\eta + c_0 + c_1 t.$$

Предполагается, что ядро

$$K(t,t) = 0; \quad \partial_t K(t,t) \neq 0; \quad \partial_t^m K(t,\eta) < \infty,\ m = 0,1,2;$$
$$t \in [0,\pi], \quad |\eta| \leq \pi$$

(неоднозначность его задания может использоваться для упрощения процедуры вычислений). Постоянные c_0, c_1 предназначены для удовлетворения начальных условий. Дальнейшие выкладки в целом аналогичны изложенным для уравнения Эмдена.

При иследовании колебаний свободно качающегося маятника, описываемых уравнением [10]

$$\ddot{u} + \beta\gamma\dot{u} + (\beta\omega)^2 \sin u = 0, \tag{22}$$

где постоянные γ, ω заданы, и обозначая $a = \varepsilon(\beta\omega)^2(\sin u)/u$, получаем

$$\ddot{u} + \beta\gamma\dot{u} + \varepsilon^{-1} a(t) u = 0. \tag{23}$$

Заметим, что одним из структурных элементов изложенного алгоритма является аналитическое представление решений линейных дифференциальных уравнений (3), (21), (23) через входящие в них переменные коэффициенты. Данное обстоятельство может иметь определенную самостоятельную значимость в смысле аналогии с известным методом Г. Фубини [11, с. 33–37].

Сведение задач рассматриваемого типа к нелинейным интегральным или функциональным уравнениям второго рода можно осуществить и более простым способом, однако это не обязательно окажется эффективным с вычислительной точки зрения. Действительно, если в уравнении (1) положить $u = \varepsilon\beta^2 u(x)$ и дважды проинтегрировать его от 0 до x, то получаем ядро с особенностью $1/\xi^2$. Полагая в (22) $a = \varepsilon(\beta\omega)^2 \sin u$, при $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$ и $\gamma \equiv 0$ получаем

$$u = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (t-\eta)\, a(\eta)\, d\eta + u_0.$$

Уравнение для $a(x)$ принимает вид

$$a(x) = \varepsilon(\beta\omega)^2 \sin\left[u_0 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (t-\eta)\, a(\eta)\, d\eta \right], \quad t \in [0,\pi],$$

и очевидно, оператор в его правой части не удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений. Соответственно утрачивается целесообразность подобного преобразования.

Заключение. Выделим следующие принципиальные положения изложенной методики:

– общая ориентация на конструктивное использование фактора неоднозначной разрешимости (данная идейная концепция имеет целый ряд эффективных приложений, из которых отметим метод дифференциальных связей Н. Н. Яненко [12]);

– реализация указанного тезиса посредством специальной формы интегрального представления решений и дополнительной зависимости канонического вида;

– удовлетворение последней в среднем, базирующееся на оговоренных выше результатах Э. Гурса;

– прием формальной линеаризации исходных дифференциальных уравнений за счет трактовки соответствующих функциональных сомножителей в качестве коэффициентов;

– приведение рассматриваемых начальных или граничных задач к двум уравнениям Фредгольма второго рода с обоснованием тождественности их спектральных характеристик в метрике пространства L_2;

– использование данного обстоятельства для фактической линеаризации получаемых на промежуточном этапе преобразований уравнений Вольтерра второго рода;

– сведение процедуры численной реализации к решению уравнений второго рода с нелинейными операторами, находящимися в условиях сжатия.

1. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 2. – 415 с.
2. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 216 с.
3. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 429 с.
4. *Гурса Э.* Курс математического анализа: В 3-х т. – М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1934. – Т. 3; Ч. 2. – 318 с.
5. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – Т. 1. – 260 с.
6. *Функциональный* анализ / Под. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
7. *Вдовкин С. В., Воронков А. И., Михлин С. Г.* О численной реализации резольвентного метода / Решение функциональных уравнений и смежные вопросы. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – С. 42–60.
8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
9. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок. – Киев: Наук. думка, 1967. – 336 с.
10. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Математические проблемы нелинейной механики. – Киев: Вища шк., 1987. – 72 с.
11. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 299 с.
12. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. – Новосибирск: Наука, 1984. – 272 с.

Получено 28.01.94