УДК 517.98

А. М. Гомилко (Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев),
М. Ф. Городний (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
О. А. Лагода (Киев. нац. ун-т технологий и дизайна)

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕКУРРЕНТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We investigate the problem of the boundedness of the reccurence sequence

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_{n-k} + y_n, \quad n \ge 1, \quad x_n = \alpha_n, \quad n \le 0,$$

in the Banach space B, where $\{y_n\}$, $\{\alpha_n\}$ are sequences bounded in B and A_k, $k \ge 1$, are linear bounded operators. We prove that if, for any $\varepsilon > 0$, the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\varepsilon} \| A_k \| < \infty$$

is satisfied, then the sequence $\{x_n\}$ is bounded for arbitrary bounded sequences $\{y_n\}$ and $\{\alpha_n\}$ if and only if the operator $I - \sum_{k=1}^{\infty} z^k A_k$ has a continuous inverse operator for every $z \in C$, $|z| \le 1$.

Досліджується питання про обмеженість рекурентної послідовності

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_{n-k} + y_n, \quad n \ge 1, \quad x_n = \alpha_n, \quad n \le 0,$$

в банаховому просторі B, де $\{y_n\}$, $\{\alpha_n\}$ — обмежені в B послідовності, A_k, $k \ge 1$, — лінійні обмежені оператори. Доведено, що коли для деякого $\varepsilon > 0$ виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\varepsilon} \| A_k \| < \infty,$$

то послідовність $\{x_n\}$ обмежена для довільних обмежених послідовностей $\{y_n\}$, $\{\alpha_n\}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $z \in C$, $|z| \le 1$, оператор $I - \sum_{k=1}^{\infty} z^k A_k$ має неперервний обернений оператор.

1. Пусть B — комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом $\bar{0}$; $\mathcal{L}(B)$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в B; I, O — соответственно единичный и нулевой операторы в B. В пространстве B рассматривается рекуррентная последовательность

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_{n-k} + y_n, \quad n \geq 1, \qquad x_n = \alpha_n, \quad n \leq 0, \tag{1}$$

где $\{A_k\} \subset \mathcal{R}(B)$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| A_k \| = a < \infty. \tag{2}$$

Предполагается, что заданные последовательности элементов $\{y_n\} \subset B$, $\{\alpha_n\} \subset B$ являются ограниченными:

$$\| y_n \| \leq b_1, \quad n \geq 1; \qquad \| \alpha_n \| \leq b_0, \quad n \leq 0. \tag{3}$$

Будем говорить, что рекуррентные соотношения (1) имеют свойство ограниченности, если последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной при произвольных ограниченных последовательностях $\{\alpha_n\}$ и $\{y_n\}$. Далее будем пользоваться обозначениями

$$D = \{z \in C : |z| < 1\}, \quad T = \{z \in C : |z| = 1\}, \quad \overline{D} = D \bigcup T.$$

Введем в рассмотрение оператор-функцию

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k A_k, \quad z \in \overline{D}. \tag{4}$$

В работе [1] установлен следующий результат об ограниченности последовательности $\{x_n\}$ (подробное доказательство содержится в [2]).

Теорема 1 [1]. *Пусть оператор-функция $G(z)$ определена и является аналитической в круге $|z| < d$ с некоторым $d > 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *рекуррентные соотношения* (1) *имеют свойство ограниченности*;

2) *оператор $I - G(z)$ непрерывно обратим для произвольного $z \in \overline{D}$.*

Эта теорема обобщает соответствующий результат из [3], относящийся к рекуррентной последовательности

$$x_n = A_1 x_{n-1} + y_n, \quad n \geq 1; \quad x_0 = \alpha_0.$$

В данной работе показано, что в теореме 1 условие аналитичности $G(z)$ в круге радиуса большего, чем единица, можно существенно ослабить, а именно, достаточно потребовать выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\varepsilon} \| A_k \| = a_{1+\varepsilon} < \infty \tag{5}$$

для некоторого $\varepsilon \in (0, 1]$.

Далее через C, c_j будем обозначать положительные постоянные, значения которых несущественны.

2. Установим предварительные оценки норм рекуррентной последовательности $\{x_n\}$ из (1), исходя лишь из условий (2), (3). Прежде всего, из соотношений (1) получаем следующее выражение для последовательности $\{x_n\}$:

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \alpha_{n-k} + y_1, \quad x_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k x_{n-k} + \sum_{k=n}^{\infty} A_k \alpha_{n-k} + y_n, \quad n \geq 2. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (2), (3). *Для произвольного* $t \geq 1$ *положим* $\beta(t) = \max\{a + (ab_0 + b_1)t^{-1}, 1\}$. *Тогда для последовательности* (6) *справедлива оценка*

$$\|x_n\| \leq t\beta^n(t), \quad n \geq 1. \tag{7}$$

Доказательство. Оценку (7) будем проверять по индукции. При $n = 1$ имеем неравенство

$$\|x_1\| \leq b_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| + b_1 \leq ab_0 + b_1 \leq t\beta(t).$$

Предположим теперь, что оценка (7) справедлива для $n = 1, 2, \ldots, m$. Тогда, используя (2), (3), (6) и неравенство $\beta(t) \geq 1$, имеем

$$\|x_{m+1}\| \leq t\sum_{k=1}^{m} \|A_k\|\beta^{m+1-k}(t) + b_0 \sum_{k=m+1}^{\infty} \|A_k\| + b_1 \leq$$

$$\leq at\beta^m(t) + ab_0 + b_1 \leq t(a + (ab_0 + b_1)t^{-1})\beta^m(t) \leq t\beta^{m+1}(t).$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что если при некотором $t \geq 1$ величина

$$\bar{\beta}(t) = a + (ab_0 + b_1)t^{-1}$$

удовлетворяет неравенству $\bar{\beta}(t) \leq 1$, то рекуррентная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, а именно $\|x_n\| \leq t$, $n \geq 1$.

***Замечание* 1.** Если $a < 1$, то полагая

$$t = \max\left\{\frac{ab_0 + b_1}{1 - a}, 1\right\},$$

получаем, что $\bar{\beta}(t) \leq 1$, а следовательно, $\beta(t) = 1$. Таким образом, при $a < 1$ рекуррентная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной и справедлива оценка

$$\forall\, n \geq 1: \|x_n\| \leq \max\left\{\frac{ab_0 + b_1}{1 - a}, 1\right\}. \tag{8}$$

Утверждение об ограниченности $\{x_n\}$ при $a < 1$ можно также получить, если рассмотреть последовательность $\bar{x} = \{\bar{x}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, задаваемую соотношениями

$$\bar{x}_n = \alpha_n, \quad n \leq 0, \qquad \bar{x}_n = x_n, \quad n \geq 1,$$

как решение линейного уравнения

$$\bar{x} - \mathcal{A}\bar{x} = \bar{y} \tag{9}$$

в банаховом пространстве

$$\mathcal{B} = \left\{\bar{z} = \{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset B: \|\bar{z}\|_{\mathcal{B}} = \sup_{n=0,\pm1,\ldots} \|z_n\| < \infty\right\}.$$

При этом в уравнении (9) оператор $\mathcal{A}$ в матричном представлении $\mathcal{A} = \{A_{n,m}\}$ имеет вид

$$A_{n,m} = O, \quad n \le 0, \qquad A_{n,m} = O, \quad n > 0, \quad m \ge n,$$

$$A_{n,m} = A_{n-m}, \qquad m < n; \quad n > 0,$$

и правая часть

$$\bar{y} = \{\bar{y}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \qquad \bar{y}_n = \alpha_n, \quad n \le 0, \qquad \bar{y}_n = y_n, \quad n \ge 1.$$

Поскольку

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{B}} \le \sup_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \|A_{n,m}\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| = a,$$

при $a < 1$ единственное решение уравнения (9) задается выражением $\bar{x} = (\bar{I} - \mathcal{A})^{-1}\bar{y}$ ($\bar{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{B}$). Поэтому последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, а для норм $\|x_n\|$ выполняются оценки

$$\|x_n\| \le \|\bar{x}\|_{\mathcal{B}} \le (1-a)^{-1}\|\bar{y}\|_{\mathcal{B}} \le (1-a)^{-1}\max\{b_0, b_1\}, \quad n \ge 1. \tag{10}$$

Отметим, что при различных значениях постоянных a, b_0, b_1 оценка (10) может быть как лучше, так и хуже по сравнению с (8).

Лемма 2. *Пусть выполняется условие* (5) *и рекуррентные соотношения* (1) *имеют свойство ограниченности. Тогда для любого* $y \in B$ *ограниченная последовательность*

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_{n-k} + \delta_{n1} y_n, \quad n \ge 1; \qquad x_n = \bar{0}, \quad n \le 0 \tag{11}$$

(δ_{nm} — *символ Кронекера*) *удовлетворяет оценке*

$$\exists\, C > 0 \;\; \forall\, n \ge 1 : n^{1+\varepsilon}\|x_n\| \le C.$$

Доказательство. Положим

$$u_n = n x_n, \qquad v_n = n^{1+\varepsilon} x_n, \quad n \ge 1.$$

Тогда $u_1 = x_1 = y$ и из (11) при $n \ge 2$ имеем

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (n-k) x_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} k A_k x_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k u_{n-k} + y_n.$$

Здесь

$$y_1 = y, \qquad y_n = \sum_{k=1}^{n-1} k A_k x_{n-k}, \quad n \ge 2.$$

Поскольку

$$\forall\, n \ge 2 : \|y_n\| \le \sum_{k=1}^{n-1} k\|A_k\|\|x_{n-k}\| \le a_1 \sup_{n \ge 1}\|x_n\|,$$

то последовательность $\{u_n\}$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям (1) с $\alpha = \bar{0}$, $n \le 0$ и ограниченной последовательностью $\{y_n\}$. Значит, в силу условия ограниченности рекуррентных соотношений (1) последовательность $\{u_n = n x_n\}$ является ограниченной: $n\|x_n\| \le c_1$, $n \ge 1$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{v_n\}$. Здесь $v_1 = y$ и на основании (11) при $n \geq 2$ получаем

$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k v_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(n^{1+\varepsilon} - (n-k)^{1+\varepsilon}\right) A_k x_{n-k},$$

т. е. $\{v_n\}$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям (1) с $\alpha_n = \bar{0}$, $n \leq 0$, и последовательностью

$$y_1 = y, \quad y_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(n^{1+\varepsilon} - (n-k)^{1+\varepsilon}\right) A_k x_{n-k}, \quad n \geq 2. \tag{12}$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно установить ограниченность последовательности (12). Используя установленную ограниченность последовательности $\{u_n\}$ и оценку

$$\frac{n^{\varepsilon}}{k^{\varepsilon}(n-k)} \leq 2, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

при $n \geq 2$ имеем

$$\|y_n\| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(n^{1+\varepsilon} - (n-k)^{1+\varepsilon}\right)}{n-k} \|A_k\| \|u_{n-k}\| \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(n^{1+\varepsilon} - (n-k)^{1+\varepsilon}\right)}{n-k} \|A_k\| \leq c_1(1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^{\varepsilon}}{k^{\varepsilon}(n-k)} \left(k^{1+\varepsilon}\|A_k\|\right) \leq$$

$$\leq 2c_1(1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{n-1} \left(k^{1+\varepsilon}\|A_k\|\right) \leq 2c_1(1+\varepsilon) a_{1+\varepsilon}.$$

Лемма доказана.

3. Пусть выполнены условия (2), (3) и $\{x_n\}$ — соответствующая рекуррентная последовательность, определенная выражениями (6). Тогда согласно лемме 1 (с учетом произвольности постоянной $t \geq 1$ в (7)) корректно определена аналитическая в круге $|z| < r_0 = \min\{a^{-1}, 1\}$ вектор-функция

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k x_k. \tag{13}$$

Домножим n-е соотношение в (6) на z^n с $|z| < r_0$ и просуммируем получившиеся равенства по $n = 1, 2, \ldots$. Тогда в соответствии с (13) получим

$$\phi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} z^n A_k x_{n-k} + f(z), \quad |z| < r_0, \tag{14}$$

где

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n f_n, \quad f_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k \alpha_{n-k} + y_n, \quad n \geq 1. \tag{15}$$

При этом коэффициенты f_n равномерно ограничены:

$$\forall n \geq 1: \|f_n\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \|A_k\| \|\alpha_{n-k}\| + \|y_n\| \leq ab_0 + b_1, \tag{16}$$

а также с учетом определения (4)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} z^n A_k x_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k A_k \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} z^m x_m \right\} = G(z)\phi(z).$$

Таким образом, из (14) получаем, что вектор-функция $\phi(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$(I - G(z))\phi(z) = f(z), \quad |z| < r_0. \tag{17}$$

Верно и обратное утверждение, а именно, если аналитическая в круге $|z| < r_0$ вектор-функция $\phi(z)$ является решением уравнения (17) с правой частью $f(z)$, задаваемой выражением (15), то коэффициенты Тейлора x_n, $n = 1, 2, \ldots$, функции $\phi(z)$ образуют рекуррентную последовательность (6). Для того чтобы убедиться в этом, следует приравнять коэффициенты Тейлора в равенстве (17).

При выполнении условия (2) непрерывная в равномерной операторной топологии оператор-функция $G(z)$, $z \in \overline{D}$, является аналитической в круге D. Предположим, что оператор-функция $I - G(z)$ непрерывно обратима при $z \in \overline{D}$:

$$R(z) = (I - G(z))^{-1} \in \mathcal{R}(B), \quad z \in \overline{D}. \tag{18}$$

Тогда вследствие непрерывности отображения $T \to T^{-1}$ множества обратимых ограниченных операторов на себя (см. [4, с. 624]) оператор-функция $R(z)$ непрерывна на $\overline{D}$, а также согласно [5, с. 46]

$$R'(z) = R(z)G'(z)R(z), \quad z \in D, \tag{19}$$

где $R'(z) = dR(z)/dz$. Следовательно, оператор-функция $R(z)$ является аналитической в круге $|z| < 1$ и справедливо разложение

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n R_n, \quad z \in D, \tag{20}$$

где операторы $R_n \in \mathcal{R}(B)$ определяются выражениями

$$R_0 = I, \quad R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{R(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \geq 1, \tag{21}$$

и γ_r — положительно ориентированная окружность радиуса $r \leq 1$ с центром в точке $z = 0$. В частности, выбирая в (21) значение $r = 1$, получаем

$$\|R_n\| \leq \sup_{|z|=1} \|R(z)\| := d < \infty, \quad n \geq 1. \tag{22}$$

Таким образом, в случае непрерывной обратимости $I - G(z)$, $z \in \overline{D}$, на основании равенств (17), (18) и (20) получаем, что функция $\phi(z)$ аналитична в круге D и для нее справедливо представление

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n R_n \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} z^k f_k \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \phi_m, \quad z \in D, \tag{23}$$

с коэффициентами (см. (16), (22))

$$\phi_m = \sum_{k+n=m} R_n f_k = \sum_{n=0}^{m-1} R_n f_{m-n},$$

$$\| \phi_m \| \le \sum_{n=0}^{m-1} \| R_n \| \| f_{m-n} \| \le md(ab_0 + b_1), \quad m \ge 1.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5), (18). *Тогда рекуррентные соотношения* (1) *имеют свойство ограниченности.*

Доказательство. Достаточно доказать, что последовательность $\{ \phi_m \}$ из (23) является ограниченной при любой ограниченной последовательности $\{ f_m \}$. Для этого докажем, что операторы R_n, $n \ge 1$, из разложения (20) удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| R_n \| < \infty. \tag{24}$$

В силу формулы (19) оператор-функция $R'(z)$ является непрерывной при $|z| \le 1$. Тогда интегрируя по частям в (21) и стягивая контур γ_r к единичной окружности, при $n \ge 1$ имеем

$$R_n = \frac{1}{n} R_n^{(1)}, \qquad R_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{R'(z)}{z^n} dz. \tag{25}$$

Используя условие (5) и оценку

$$\left| z_1^k - z_2^k \right| \le 2^{1-\varepsilon} k^{\varepsilon} |z_1 - z_2|^{\varepsilon}, \quad z_j \in \overline{D}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \varepsilon \in [0, 1],$$

получаем, что оператор-функция $G'(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем ε:

$$\| G'(z_1) - G'(z_2) \| \le \sum_{k=2}^{\infty} \left| z_1^{k-1} - z_2^{k-1} \right| k \| A_k \| \le$$

$$\le 2^{1-\varepsilon} |z_1 - z_2|^{\varepsilon} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)^{\varepsilon} k \| A_k \| \le c_2 |z_1 - z_2|^{\varepsilon}, \quad z_j \in \overline{D}, \quad j = 1, 2. \tag{26}$$

Далее, так как $R(z)$, $G'(z)$ непрерывны при $z \in \overline{D}$, то из (19) и (26) заключаем, что $R'(z)$ также удовлетворяет условию Гельдера с показателем ε:

$$\| R'(z_1) - R'(z_2) \| \le \{ \| R(z_1) \| \| G'(z_1) \| +$$

$$+ \| R(z_2) \| \| G'(z_2) \| \} \| R(z_1) - R(z_2) \| +$$

$$+ \| R(z_1) \| \| R(z_2) \| \| G'(z_1) - G'(z_2) \| \le$$

$$\le c_3 |z_1 - z_2|^{\varepsilon}, \quad z_j \in \overline{D}, \quad j = 1, 2. \tag{27}$$

Тогда стандартным образом показываем [6] (гл. 2), что операторы $R_n^{(1)}$ из (25) допускают оценки

$$\| R_n^{(1)} \| \le \frac{c_4}{n^{\varepsilon}}, \quad n \ge 1. \tag{28}$$

Действительно, при $n \ge 1$ имеем

$$2\pi R_{n+1}^{(1)} = \int_0^{2\pi} R'(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[R'(e^{i\theta}) - R'(e^{i(\theta+\pi/n)})\right]e^{-in\theta}\,d\theta,$$

и, значит,

$$\left\| R_{n+1}^{(1)} \right\| = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\| R'(e^{i\theta}) - R'\left(e^{i(\theta+\pi/n)}\right)\right\| d\theta \le$$

$$\le \frac{c_3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left| e^{i\theta} - e^{i(\theta+\pi/n)}\right|^{\varepsilon} d\theta \le \frac{c_3\pi}{n^{\varepsilon}},$$

где c_3 — постоянная из неравенства (27). Из (25), (28) вытекает оценка (24), что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. В случае сепарабельного гильбертова пространства $B = H$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ теорема 2 остается справедливой при условии (5) с $\varepsilon = 0$. Действительно, в этом случае при фиксированном $x \in H$ на основании равенства Парсеваля для вектор-функции $zR'^{*}(z)x,\ z \in T,$ из $L_2(T, H)$ [7] (гл. 5, § 1) для сопряженных к $R_n^{(1)}$ операторов $R_n^{(1)*}$ получаем оценку

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\| R_n^{(1)*}x\right\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left\| R_n'^{*}(z)x\right\|^2 |dz| \le c_4\|x\|^2,$$

и, значит, для любого $m \ge 1$ имеем неравенство

$$\|\phi_m\|^2 = (\phi_m, \phi_m) \le 2\sum_{n=0}^{m-1}\|f_{m-n}\|\frac{\left\| R_n^{(1)*}\phi_m\right\|}{n+1} \le$$

$$\le 2\left\{\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\|f_{m-n}\|}{(n+1)^2}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left\| R_n^{(1)*}\phi_m\right\|^2\right\}^{1/2} \le c_5\|\phi_m\|$$

с постоянной $c_5 > 0$, не зависящей от m. Таким образом, последовательность $\{x_m = \phi_m\}$ является ограниченной в H.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (5) *и рекуррентные соотношения* (1) *имеют свойство ограниченности. Тогда для оператор-функции* $I - G(z)$ *выполняется условие* (18).

Доказательство. Согласно теореме Банаха об обратном операторе [4], достаточно доказать, что при любом $z \in \overline{D}$ оператор $I - G(z)$ имеет тривиальное ядро, а его образ совпадает со всем пространством B.

Тривиальность ядра оператора $I - G(z)$ при любом $z \in \overline{D}$ следует из рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 1 работы [2]. Поэтому для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что при любом $z \in \overline{D}$ уравнение

$$(I - G(z))x = y \tag{29}$$

имеет решение $x \in B$ для произвольного $y \in B$. Пусть ограниченная последовательность $\{x_n\}$ определяется соотношениями (11). Тогда в силу леммы 2 и (13), (17) вектор-функция

$$\psi(z) = z^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} z^k x_k, \quad z \in \overline{D},$$

аналитична в круге D, сильно непрерывна при $|z| \leq 1$ и удовлетворяет уравнению

$$(I - G(z))\psi(z) = y, \quad z \in \overline{D}.$$

Это значит, что уравнение (29) при любом $y \in B$ и любом $z \in \overline{D}$ имеет решение $x = \psi(z)$.

Теорема доказана.

1. *Городній М. Ф., Лагода О. А.* Обмеженість розв'язків двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі // Мат. VIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 2000. – С. 256.
2. *Городній М. Ф., Лагода О. А.* Обмежені розв'язки деяких класів різницевих рівнянь з операторними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1495 – 1500.
3. *Томілов Ю. В.* Асимптотична поведінка розв'язків однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі // Асимптотичне інтегрування нелінійних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1992. – С. 146 – 153.
4. *Данфорд Н. Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 616 с.
7. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 432 с.

Получено 12.11.2002